Feuille d'exercices 5
Topologie générale et Compacts

Cours de Licence 3

Année 10/11

1 Espaces topologiques généraux

Exercice 1.1. Déterminer toutes les topologies sur un ensemble à 2 éléments (resp. à 3 éléments) et dire si elles sont séparées ou non.

Exercice 1.2. Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de E qui contient E et $\emptyset$.
Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$.
1) Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par intersection finie.
2) Montrer que $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie sur E c'est à dire qu'il existe une topologie $\mathcal{O}$ sur E telle que tout élément de $\mathcal{O}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.
On dit $\mathcal{O}$ est engendrée par $\mathcal{A}$.
3) Montrer que si $\mathcal{O}_1$ est une topologie sur E qui contient $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1$.
4) Soit $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{]-\infty, x[; x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Décrire la toplogie engendrée par $\mathcal{A}$. Est-elle séparée ?
5) Soit $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{]x, y[; (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Décrire la toplogie engendrée par $\mathcal{A}$.

Exercice 1.3. Exemple d'espace topologique non métrisable
Soit E l'espace vectoriel des applications de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Si $f \in E$, $N \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_N) \in [0, 1]^N$ et $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N) \in (\mathbb{R}_+^*)^N$, on définit

$$V_{f,x_1,\ldots,x_N,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N} = \{g \in E / \forall i = 1 \cdots N, |f(x_i) - g(x_i)| < \epsilon_i\}$$

On définit l'ensemble $\mathcal{O}$ comme l'ensemble des réunions d'ensembles précédents.

1. Montrer que $\mathcal{O}$ définit une topologie sur E.
2. Montrer qu'une suite de fonctions de E est convergente pour cette topologie si et seulement si elle converge simplement.
3. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de E nulles sauf en un nombre fini de points. Montrer que $\mathcal{D}$ est dense dans E.
4. En utilisant une fonction de E non nulle sur un ensemble non dénombrable, montrer que la topologie précédente n'est pas métrisable.

2 Près du cours

Exercice 2.1. Soit (K,d) est un espace métrique compact. Montrer que son diamètre est bien défini et est atteint.

Exercice 2.2. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est-elle une partie compacte de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{Q}$?

Exercice 2.3. Soit (E,d) un espace métrique compact. Montrer que E possède une partie dénombrable dense. (On dit que E est séparable).

Exercice 2.4. Soit (E,d) un espace métrique compact. Soit $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ un recouvrement ouvert de E.
Soit $\varphi : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sup\limits_{\lambda\in L} d(x, U_\lambda^c) \end{array}$.
a) Montrer que φ est continue.
b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toute boule ouverte de rayon α soit contenue dans au moins un U_λ.
c) Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouverment ouvert de $[0,1]$. Trouver n et une subdivision $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, tel que pour tout k, il existe $i \in I$, tel que $[x_k, x_{k+1}] \subset U_i$. Montrer qu'on peut choisir $x_k = \frac{k}{n}$, pour n assez grand.

Exercice 2.5. Soit (E,d) un espace métrique compact. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties fermées non vides de (E,d). Montrer que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide et que tout ouvert contenant $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ contient l'un des fermés F_n.

3 Compacité et distance entre parties

Exercice 3.1. Soit (E,d) un espace métrique et A une partie compacte de E
a) Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x,A)$ est atteinte.
b) Soit B un fermé tel que $A \cap B = \emptyset$, montrer que $d(A,B) > 0$ où $d(A,B) = \inf\limits_{(a,b)\in A\times B} d(a,b)$.
Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. (On pourra considerer $\{x \in E | d(x,A) < \epsilon\}$)
Donner un contre-exemple lorsque A est seulement supposé fermé.
c) Soit B un compact, montrer qu'il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $d(A,B) = d(a,b)$.

Exercice 3.2. Soit A une partie fermée et non bornée de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance usuelle. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(x) \longrightarrow +\infty$ quand $\|x\| \longrightarrow +\infty$, $(x \in A)$.
a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, $\{x | x \in A \text{ et } f(x) \leq k\}$ est compact.
b) Montrer que $f(A)$ est minorée et qu'il existe $a \in A$ tel que $\inf f(A) = f(a)$.
c) Utiliser ce résultat pour montrer que les questions a) et c) de l'exercice précédent restent vraies si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}^n$ telles que A soit fermée et B compacte.

4 Exemples d'espaces compacts

Exercice 4.1. Les espaces suivants sont-ils compacts. Pour chaque exemple, on précisera la distance.

1. le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, distance usuelle.
2. la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$, distance usuelle.
3. l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \frac{1}{x+1} \geq y \geq 0\}$, distance usuelle.
4. l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ \frac{1}{x+1} \geq y > 0\}$, distance usuelle.
5. l'ensemble $\{(x, \sin(1/x)); x \in]0, 1]\} \cup \{(0, x);\ x \in [-1, 1]\}$, distance usuelle.
6. $GL_n(\mathbb{R})$, distance usuelle.
7. $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales en dimension n, distance usuelle.
8. l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n dont toutes les valeurs propres sont dans $[-1, 1]$, distance usuelle.

Exercice 4.2. Soit (E, d) un espace métrique, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergente. On note l sa limite. Montrer que $\{u_n \in E \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est une partie compacte de E.

Exercice 4.3. Soit $l^1(\mathbb{R}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{n\geq 0} |u_n| < \infty\}$, muni de la norme $||u|| = \sum_{n\geq 0} |u_n|$.
a) Soit

$$A = \prod_{n\geq 0} [0, 2^{-n}].$$

Montrer que A est une partie compacte de $l^1(\mathbb{R})$.
b) Soit $B = \{(u_n) \in l^1(\mathbb{N}); ||u|| = 1\}$. Montrer que B n'est pas compact. (On pourra considérer la suite de $l^1(\mathbb{N}), (e_n)$ où $e_n(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$)

5 Compacité et applications

Exercice 5.1. Un théorème de point fixe
Soit (K, d) un espace métrique compact, et $f : K \to K$ telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in K$, $x \neq y$. Montrer que f a un unique point fixe. (*indication* : considérer $x \mapsto d(x, f(x))$).

Exercice 5.2. Dilatations et isométries
Soit (K, d) un espace métrique compact, et $T : K \to K$ telle que : $\forall x, y \in K, \quad d(Tx, Ty) \geq d(x, y)$.
a) Montrer qu'il existe une extraction σ telle que $(T^{\sigma(n)}x)_n$ et $(T^{\sigma(n)}y)_n$ convergent.
b) Quelle est la limite de $(T^{\sigma(n+1)-\sigma(n)}x)_n$?
c) Montrer que $\forall (x, y) \in K,\ d(T(x), T(y)) = d(x, y)$ (*Indication* : $\sigma(n + 1) - \sigma(n) \geq 1$).
d) Montrer que T est surjective (*indication* : $\sigma(n + 1) - \sigma(n) \geq 1$ et question 2.).

Exercice 5.3. Soit (K, d) un espace métrique compact, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de K dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in K$, la suite $f_n(x)$ décroit et converge vers 0. Montrer que f_n converge uniformément vers 0. (*Indication* : pour tout $\varepsilon > 0$, on pourra considérer la suite de fermés $F_n = \{x \in K \mid f_n(x) \geq \varepsilon\}$).

Exercice 5.4. Utilisation de l'uniforme continuité
Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. Montrer que le sous-ensemble de E des fonctions affines par morceaux est dense dans E.

6 Ensemble triadique de Cantor

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\frac{x+A}{3}$ l'image de A par l'homothétie de centre x et de rapport $\frac{1}{3}$.
L'ensemble triadique de Cantor $K \subset [0, 1]$ est défini par récurrence de la façon suivante : $K_0 = [0, 1]$, $K_{n+1} = \frac{K_n}{3} \cup \frac{2+K_n}{3}$ et $K = \cap_{n\geq 0} K_n$.
Ainsi, on découpe $[0, 1]$ en trois intervalles égaux et on retire celui du milieu en gardant les bornes.
Donc $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
On réitère le procédé précédent sur chaque segment, chaque segment est coupé en 3 parties égales et la partie centrale est retirée en gardant les bornes.
$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
1) Soit $n \geq 1$, montrer que K_n est la réunion de 2^n segments disjoints de la forme $[x_n, x_n + \frac{1}{3^n}]$ où les x_n décrivent l'ensemble $\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}; a_i \in \{0, 2\}\}$.
2) Montrer que K est compact non vide, d'intérieur vide.
2) Montrer que tout élément x de K s'écrit de manière unique $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec les a_i égaux à 0 où 2.
Réciproquement, montrer que si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$ avec les a_i égaux à 0 où 2, alors $x \in K$.
3) Montrer que K est sans point isolé , c'est à dire que pour tout $x \in K$, pour tout $\epsilon > 0$, $]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap K \setminus \{x\} \neq \emptyset$. (On dit que K est parfait).
Montrer que si $x \in K$ et $y \in K$ et $x \neq y$, alors il existe un ouvert de K contenant x et un ouvert de K contenant y disjoints. (On verra plus tard que ceci signifie que les composantes connexes de K sont les singletons, on dit que K est complètement discontinu).
4) Montrer que K n'est pas dénombrable.
5) L'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie suivante : Si $x = (x_n)_{n\geq 0}$ est un élément de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, une base de voisinnages ouverts de x est donnée par $V_k(x) = \{y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ / pour tout $i \leq k,\ y_i = x_i\}$ où k parcourt $\mathbb{N}$.
Montrer que cet espace topologique est homéomorphe à K.