Ouverts, fermés, adhérence et métrique induite

Exercice 1 1. Soit $X = [0,1]$, muni de la distance induite par la valeur absolue. La partie $A =]0,1[$ est elle ouverte ou fermée dans X? Même question pour $[0,1[$, $]0,1]$, $[1/4,1/3]$, $[1/2,1[$.
2. Même question avec $X = [0,1[$.

Exercice 2 Soit X le sous ensemble de $(\mathbb{R}^2, us)$ défini par

$$X = \{(x,y); x > 0, y \geq 0, xy < 1\} \cup \{0\}.$$

Est-ce une partie : ouverte dans ($\mathbb{R}^2$,us) ? Fermée dans ($\mathbb{R}^2$,us) ? On muni X de la distance induite. La partie $]0,\infty[\times\{0\}$ est-elle : ouverte dans X ? Fermée dans X ? Et dans $(\mathbb{R}^2, us)$? Même question pour $\{(x,y); x > 0, y > 0, xy < 1\}$ et $\{(x,y); x > 0, y \geq 0, xy \leq 1/2\}$.

Exercice 3 Déterminer pour les parties suivantes A de $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme, si elles sont ouvertes, fermées, leur intérieur et leur adhérence :
1. $A = \{f \in X | \forall x \in D, f(x) = 0\}$, où D est une partie de $[0,1]$ quelconque fixée;
2. $A = \{f \in X | \exists x \in [0,1/2], f(x) > 1\}$;
3. $A = \{f \in X | \forall x \in\in [0,1], f(x) \leq 0\}$.

Exercice 4 Soit $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.
1. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n}x$ si $x \in [0,1/2]$, et $f_n(x) = \frac{n-2}{n}(x-1)+1$ si $x \in [1/2,1]$. Dessiner le graphe de f_n et montrer que la suite (f_n) converge dans X vers une fonction que l'on déterminera.
2. Montrer que $D = \{f \in X | f \text{ est derivable en } 1/2\}$ est d'intérieur vide dans X.

Exercice 5 Soit (E_i, d_i), $i = 1 \ldots k$, une famille d'espaces métriques et $E = \prod_{i=1}^k E_i$ l'espace métrique produit. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $x^n = (x_i^n)_{i=1\ldots k}$ dans E. Montrer que, si $x = (x_i)_{i=1\ldots k} \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x^n)_n$ dans E, alors, pour tout $i \in \{1\ldots k\}$, x_i est une valeur d'adhérence de la suite $(x_i^n)_n$ dans E_i. Etudier la réciproque.

Exercice 6 On se place dans $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.
1. Soit $A = [0,1]\times[0,1]$. Est-ce que $\mathbb{Q}^2 \cap A$ est dense dans A ?
2. Même question avec $A = \{(x,\lambda x), x \in [0,1]\}$, où $\lambda \in [0,1]$ est un paramètre réel fixé.

Exercice 7 Soit $a \in [0,1]$.
1. Est-ce que l'ensemble des fonctions nulles en a est dense dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), || \, ||_2)$?
2. Même question dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), || \, ||_\infty)$.

Exercice 8 (Une courbe de Peano dans $S^1 \times S^1$) Soient $\theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $A = \{e^{in\theta} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}\}$, et $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. On munit S^1 de la distance induite par $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$.
1. En utilisant la caractérisation topologique des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, montrer que pour $2\pi/\theta$ irrationnel, l'ensemble A est dense dans S^1.
2. En déduire que la courbe image de l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (e^{2i\pi t}, e^{i\theta t})$ est dense dans $S^1 \times S^1$. (On pourra utiliser l'inclusion $\cup_i \bar{A}_i \subset \overline{\cup_i A_i}$, où $\{A_i\}$ est une famille quelconque de parties d'un espace métrique (E,d), et $\bar{A}$ désigne l'ensemble des points de E qui sont limites de suites de A).
3. Que se passe-t-il si $2\pi/\theta \in \mathbb{Q}$?

Exercice 9 Dans $E = (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ déterminer les valeurs d'adhérence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ données par :
1. $u_n = \big(n, (-1)^n\big)$; 2. $u_n = \big((-1)^n, (-1)^{n+1}\big)$; 3. $u_n = \big(1/n, \cos(n)\big)$; 4. $u_n = \big(\alpha^n, \beta^n\big)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; 5. $u_n = \big(\cos(n), \sin(n)\big)$;
Même question dans $E = \mathbb{C}$, muni de la distance usuelle, avec
6. $u_n = e^{in\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$;
7. $u_n = A^n v$ où $A \in \mathrm{End}(E)$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $v \in E$;

Exercice 10 Soit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On identifie $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$, que l'on munit de la distance produit d_∞.
1. Montrer que le sous-ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices inversibles est ouvert et dense dans $M_n(\mathbb{R})$. (Remarquer que : $(\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}))(\exists \varepsilon > 0)(\lambda \in]0, \varepsilon[\Rightarrow A + \lambda \mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.
2. En déduire que pour toutes matrices A, B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\chi(AB) = \chi(BA)$, où χ est le polynôme caractéristique.
3. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
4. Que peut-on dire de l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales? Des projecteurs ?

Fonctions continues entre espaces métriques

Exercice 11 Soit (X, d) un espace métrique. Soit f une fonction bijective de X dans X. On définit la distance $\delta(x, y) = d(f(x), f(y))$. Montrer que d est topologiquement équivalente à δ si et seulement si f est un homéomorphisme. Montrer que d et δ sont équivalentes si et seulement si f est bi-lipschitzienne.

Exercice 12 Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que $d : X \to \mathbb{R}$ est continue et lipschitzienne.

Exercice 13 Soit X la sphère de S^n, muni de la distance géodésique s. Soit $y \notin S^n$. Montrer que la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x - y}{||x - y||}$$
est continue de (X, s) dans (X, s).

Exercice 14 Déterminer les classes d'équivalence d'intervalles homéomorphes.

Exercice 15 S^n est-elle homéomorphe à $\mathbb{R}^n$?

Exercice 16 Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Montrer que :
1. $d(f, g) = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} \min(1, \sup_{\mathrm{x}\in[-\mathrm{p},\mathrm{p}]} |\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{g}(\mathrm{x})|)$ définit une distance sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
2. une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d)$ vers f si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 17 Soit (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application.
1. Montrer que si $x_0 \in X$ est un point isolé (c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap X = \{x_0\}$), f est continue en x_0.
2. Montrer que si f est continue, alors son graphe $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in X\}$ est une partie *fermée* de $X \times Y$.

Exercice 18 On se place dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$.
1. Montrer que pour tous x, $y \in \mathbb{R}^2$, et tous r, $r' > 0$, les boules fermées $\tilde{B}(x,r)$ et $\tilde{B}(y,r')$ sont homéomorphes.
2. Fixons $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. On note $S = S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 |\ d_2(x,y) = r\}$ le *bord* de $B(x,r]$. Prouver que pour tout homéomorphisme $g : S \longrightarrow S$, il existe un homéomorphisme $f : B(x,r] \longrightarrow B(x,r]$ tel que $f_{|S} = g$. (Chercher une extension radiale de g).

Exercice 19 Soit S^n la sphère unité de $(\mathbb{R}^n, d_2)$. Montrer que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}_+^* \times S^n$, muni de la distance produit. (Utiliser les coordonnées sphériques).

Exercice 20 Soit $f : (\mathbb{R}^n, d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ une application bijective et continue. Montrer que si $\lim_{||x|| \to +\infty} ||f(x)|| = +\infty$, alors f est un homéomorphisme.

Exercice 21 (projection stéréographique) Soient S^n la sphère unité de $(\mathbb{R}^{n+1}, d_2)$, munie de la distance induite, et N le point $(0, \ldots, 0, 1)$.
1. Pour tout point $p \in S^n \setminus \{N\}$, on considère l'intersection $\pi(p)$ de la droite (Np) avec le plan équatorial $P = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_{n+1} = 0\}$. Montrer qu'on définit ainsi une application $\pi : S^n \setminus \{N\} \longrightarrow P$.
2. Vérifier que π est un homéomorphisme.

Exercice 22 (Tore de dimension deux) Soient $0 < r < a$ fixés. Pour α et β dans $I = [0, 2\pi]$, on pose :

$$g(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) = ((a + r\cos\alpha)\cos\beta, (a + r\cos\alpha)\sin\beta, r\sin\alpha).$$

Vérifier que g est un homéomorphisme de $S^1 \times S^1$ sur son image (munis de la distance induite par $(\mathbb{R}^4, d_\infty)$ et $(\mathbb{R}^3, d_\infty)$ respectivement).