Licence de Mathématiques — Université J. Fourier
Topologie, L31 — **Feuille d'exercices 3** — 2010-2011

Quelques exemples de distances

Exercice 1 1. Montrer que $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ définit une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Si φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à quelle(s) condition(s) la formule $d(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ définit-elle une distance sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 Soit (X,d) un espace métrique.
1. Montrer que $d_1(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}$ définit une distance d_1 sur X, et que (X,d_1) est borné.
2. Mêmes questions pour d_2 avec $d_2(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

Soit désormais φ une application de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$, telle que :

(a) $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(b) φ est croissante,

(c) $\forall u,v \geq 0,\ \varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$ (on dit que φ est *sous − additive*).

3. Vérifier que l'application $\varphi(d) := \varphi \circ d$ est une distance sur E.
4. Montrer que les fonctions concaves vérifient (c). En déduire que $\log(1+d)$ et d^α $(0 < \alpha < 1)$ sont des distances sur E.
5. Si d est une distance, on note pour $x \in E$ et $r > 0$, $B_d(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r, c'est à dire $\{y \in E / d(x,y) < r\}$.

On suppose que φ est continue en 0.

Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$, $B_{\varphi(d)}(x, \varphi(r)) \subset B_d(x,r)$.

Montrer que pour tout $x \in E$ et $r > 0$, il existe $r' > 0$ tel que $B_d(x,r') \subset B_{\varphi(d)}(x,r)$.

Que se passe t-il si φ n'est pas continue en 0 ?

Exercice 3 (Espace de suites) Soit X l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $d(x,y) = \Sigma_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^n} \min(|y_n - x_n|, 1)$ définit une distance sur X.

Exercice 4 (Distance SNCF) Si x et y sont deux vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|$, on définit $d(x,y) = \|x-y\|$ si x et y sont colinéaires et $d(x,y) = \|x\| + \|y\|$ s'ils ne le sont pas.
1. Montrer que d est une distance (appelée *distance SNCF*, pourquoi ?).
2. Décrire géométriquement la boule $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,y) < r\}$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^\star$ quelconques fixés.
3. Existe-t-il une norme N sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ telle que d soit la distance associée à N ?

Exercice 5 (Distances sur l'espace des polynômes) Si P et Q sont des polynômes à coefficients réels, on définit

$$d_0(P,Q) = \mathrm{Sup}_{x\in[0,1/2]} |P(x) - Q(x)|,$$

$$d_1(P,Q) = \int_0^1 |P(x) - Q(x)| \mathrm{d}x,$$

$$d_2(P,Q) = \begin{cases} \deg(P-Q) + 1 & \text{si } P \neq Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que ce sont des distances sur l'espace $\mathbb{R}[X]$.
2. Quel est le comportement de la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour chacune de ces distances ?

Exercice 6 Soit (E, d) un espace métrique. La formule

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b)/(a, b) \in A \times B\}$$

définit-elle une distance sur l'ensemble des parties non vides de E ?

Exercice 7 Soit E un ensemble fini. Lorsque A et B sont deux parties de E, on note $A\Delta B$ leur différence symétrique (défini par $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$), et on pose $d(A, B) = \mathrm{card}(A\Delta B)$.

Montrer que d est une distance sur l'ensemble des parties de E.

Exercice 8 (distance géodésique sur S^n) On note $(x|y)$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{n+1}$, avec $||x||^2 = (x|x)$, et S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Montrer que pour x, $y \in S^n$, on a $|(x|y)| \leq 1$.
2. On pose $s(x, y) = \mathrm{Arcos}(x|y) \in [0, \pi]$. Pour x, y et z fixés distincts, on pose $a = s(y, z)$, $b = s(x, z)$ et $c = s(x, y)$. On définit aussi $y_x = (y - (x|y)x)/||y - (x|y)x||$, et de même pour z_x. Soit $\alpha = s(y_x|z_x)$. Montrer les relations suivantes:

$$\begin{aligned} y &= \cos(c)x + \sin(c)y_x \\ z &= \cos(b)x + \sin(b)z_x \\ \cos(a) &= \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha) \end{aligned}$$

3. Déduire de la dernière relation que s est une distance sur S^n.
4. Soit pour x et y dans S^n, $d(x, y) = \|x - y\|$. Exprimer $d(x, y)$ en fonction de $s(x, y)$.

Montrer que pour tout x et y dans S^n,

$$d(x, y) \leq s(x, y) \leq \frac{\pi}{2} d(x, y)$$

Peut-on améliorer les bornes ?

Distances provenant d'une norme ou d'un produit scalaire

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel réel, et d une distance sur E. Montrer que d provient d'une norme sur E si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. invariance par translation : pour tous $x, y, z \in E$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$;
2. action des dilatations : pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

Exercice 10 Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, on définit, pour toute matrice réelle $n \times n$ A,

$$|||A||| = \mathrm{Sup}_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur l'espace des matrices réelles $n \times n$, qui vérifie de plus, pour toutes telles matrices A et B : $|||AB||| \leq |||A|||\ |||B|||$.

Exercice 11 (Inégalité de Hölder) On fixe dans ce qui suit un réel $p > 1$, et on note p' l'unique réel tel que $1/p + 1/p' = 1$ (on a aussi $p' > 1$).

1. En utilisant la convexité de la fonction exponentielle, montrer que pour tous $a, b \geq 0$, on a

$$ab \leq a^p/p + b^{p'}/p'$$

2. Inégalité de Hölder. Lorsque $x, y \in \mathbb{R}^n$, montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^{p'}\right)^{1/p'},$$

avec égalité seulement si x et y sont colinéaires (on pourra utiliser la question précédente avec $a = |x_k|/(\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}},\ b = |y_k|/(\sum_{k=1}^n |y_k|^{p'})^{\frac{1}{p'}}$).

3. En déduire l'inégalité de Minkowski : pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

En déduire que l'application $x \mapsto (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

4. Procéder de même en remplaçant $\mathbb{R}^n$ par l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles (et les sommes, par des intégrales).

Exercice 12 (Comparaison de normes sur $\mathbb{R}^2$) Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $p > 0$, on pose :

$$N_p(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad N_\infty(x) = \max(|x_1|, |x_2|)$$

1. On a démontré que pour tout $p \geq 1$, N_p est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Démontrer que N_∞ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Montrer que si $p < 1$, N_p n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^2$, l'application $p \mapsto N_p(x)$ est décroissante et $N_p(x) \to N_\infty(x)$ quand $p \to +\infty$.
3. Pour $0 < p < q < +\infty$, montrer que $N_q \leq N_p \leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} N_q$

Exercice 13 (Distance ultramétrique) Soit E un ensemble et $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que

i) $\forall (x,y) \in E \times E,\ d(x,y) = d(y,x)$

ii) $\forall (x,y) \in E \times E,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $\forall (x,y,z) \in E^3,\ d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y))$

1. Montrer que d est une distance et que si $d(x,z) \neq d(z,y)$, iii) est une égalité. (Dans E tous "les triangles sont isocèles").
2. Montrer que si $r > 0$ et $x \in E$, pour tout $y \in B(x,r)$, $B(y,r) = B(x,r)$.
3. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de E est de Cauchy si et seulement si la suite $(d(x_n, x_{n+1}))_{n\geq 0}$ tend vers 0.
4. Soit p un nombre premier. Pour tout entier strictement positif, on définit $v_p(n)$ comme étant l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers.
Si $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $x = \pm r$ avec r entier strictement positif, on pose $v_p(x) = v_p(r)$.
Si $x, y \in \mathbb{Z}$, on pose $d_p(x,y) = \begin{cases} p^{-v_p(x-y)} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$
a) Montrer que d_p est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Z}$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$, déterminer les éléments de la boule ouverte $B(x, p^{-n})$ et de la boule fermée $\tilde{B}(x, p^{-n})$.
c) Montrer que la suite de terme général $u_n = 6^n$ converge vers 0 dans $(\mathbb{Z}, d_2)$ mais diverge dans $(\mathbb{Z}, d_5)$.