Feuille d'exercices 1

Cours de Licence 3

Année 10/11

Exercice 1. *On travaille dans cet exercice sur $\mathbb{R}$. L'expression "pour tout $t > 0$" signifiera donc "pour tout réel $t > 0$".*
Quels sont les réels x vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall t > 0,\ |x| \leq t$?
2. $\forall t \geq 0,\ |x| \leq t$?
3. $\forall t \geq 0,\ |x| < t$?
4. $\forall t > 0,\ |x| < t$?

Exercice 2.
1. *Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est irrationnel.*
2. *Décrire par une formule (algorithme) la suite donnée par :*

$$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, ..., 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1, ...$$

3. *Expliciter avec des quantificateurs le fait suivant :*
   $\frac{\sqrt{2}}{2}$ peut être approché d'aussi près qu'on veut par des termes de cette suite.
4. *Montrer que le fait précédent est vrai.*
   (On pourra montrer que la suite définie par $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - v_n^2)$ et $v_0 = 0$ est une sous-suite de la suite précédente qui tend vers $\frac{\sqrt{2}}{2}$.)

Exercice 3. *Déterminer toutes les implications vraies entre deux propriétés parmi les propriétés suivantes des suites réelles :*

1. *constante*
2. *stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang)*
3. *croissante*
4. *croissante à partir d'un certain rang*
5. *strictement croissante*
6. *strictement croissante à partir d'un certain rang*
7. *monotone à partir d'un certain rang*
8. *majorée*

9. *majorée à partir d'un certain rang*
10. *minorée*
11. *bornée*
12. *périodique à partir d'un certain rang*
13. *convergente*

Donner une suite réelle qui ne possède aucune des propriétés ci-dessus.

Exercice 4. *Soit S l'ensemble des suites croissantes d'éléments de $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.*
a)*Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$x_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \cdots + \frac{1}{q_0 \cdots q_n}$$

est convergente et que sa limite appartient à $]0, 1]$.
b) *Montrer que l'application de S dans $]0, 1]$ qui à $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ associe $\lim x_n$ est une bijection.*
c) *Montrer $\lim x_n$ est rationnel si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq k \quad q_n = q_k$$

Exercice 5. *Démontrer les résultats suivants :*

1. *Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, $\inf A \geq \inf B$ et $\sup A \leq \sup B$.*
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.
3. *Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (a, b) \in A \times B,\ a \leq b$, alors* $\sup A \leq \inf B$.
4. *Soit f une fonction d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$. On notera $\sup\limits_E f$, $\sup\{f(x), x \in E\}$.*
   Montrer que si f et g sont deux applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$, alors $\sup\limits_E(f + g) \leq \sup\limits_E f + \sup\limits_E g$.
5. *Que valent $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*} x^{\frac{1}{x}}$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{Q}_+^*} x^{\frac{1}{x}}$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{N}^*} x^{\frac{1}{x}}$*

Exercice 6. Théorème des valeurs intermédiaires
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a) < f(b)$.
Pour $y \in]f(a), f(b)[$ on pose,

$$g(y) = \inf\{x \in [a, b] | f(x) \geq y\}$$

Montrer que $g(y) \in]a, b[$ et que $f(g(y)) = y$.

Exercice 7. Soit F une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ non constante.
On note $m = \inf\limits_{\mathbb{R}} F$ et $M = \sup\limits_{\mathbb{R}} F$.
On définit sur $]m, M[$, l'application $F^{\leftarrow}$ par :

$$F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \mid F(x) \geq y\}$$

1) Montrer que $\{x \mid F(x) \geq y\} =]F^{\leftarrow}(y), +\infty[$ ou $[F^{\leftarrow}(y), +\infty[$.
On suppose maintenant que F est continue à droite.
2) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]m, M[$, $F(x) \geq y \iff x \geq F^{\leftarrow}(y)$
3) Montrer que $F^{\leftarrow}$ est croissante et continue à gauche.
4) A quelle condition sur F, $F^{\leftarrow}$ est-elle continue ?
5) Que représente $F^{\leftarrow}$ si F est continue et strictement croissante ?

Exercice 8. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit à $\{0\}$. On note $P = \{x \in G | x > 0\}$.
1) Montrer que P est non vide.
On note $\omega = \inf P$.
2) On suppose que $\omega > 0$. Montrer que $G = \omega\mathbb{Z} = \{n\omega,\ n \in \mathbb{Z}\}$.
3) On suppose $\omega = 0$. Montrer que pour tout $a < b$, il existe $g \in G$ tel que $a < g < b$. (On dit que G est dense dans $\mathbb{R}$).
4) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$. Déterminer $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.
5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}_+^*$. Montrer que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $a > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ tels que $0 < n + m\alpha < a$.
Montrer que $\mathbb{N} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
6) Montrer que pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a < \cos n < b$.
Montrer que pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a < \sin n < b$.

Exercice 9. Soit $a_1 < \cdots < a_n$, n nombre réels.
Quelle est la borne inférieure de $\{\sum\limits_{i=1}^{n} |x - a_i| \ , x \in \mathbb{R}\}$?
Quelle est la borne inférieure de $\{\sum\limits_{i=1}^{n} (x - a_i)^2 \ , x \in \mathbb{R}\}$?

Exercice 10. Soit E un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre notée $\leq$. On suppose que toute partie non vide de E admet une borne inférieure.
1) Soit f une application croissante de E dans E. On suppose qu'il existe x_0 élément de E tel que $f(x_0) \leq x_0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f admet un plus petit élément.
2) Montrer que toute application croissante de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet au moins un point fixe. Est-ce vrai pour une application décroissante ?
3) Soit $p \geq 1$ un réel. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.
On considère l'équation fonctionnelle :

$$f \geq 0; \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - f(x+1)^p = g(x)$$

On suppose que g vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq g(x+1)^p \leq \alpha g(x)$$

avec α tel que $\begin{cases} 0 \leq \alpha < \frac{1}{p}(\frac{p-1}{p})^{p-1} & \text{si } p > 1 \\ 0 \leq \alpha < 1 & \text{si } p = 1 \end{cases}$.
Montrer que l'équation admet au moins une solution. Calculer explicitement en fonction de g la plus petite solution lorsque $p = 1$.

Exercice 11. 1) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ majorée sur un intervalle ouvert non vide I.
En utilisant la borne supérieure M de l'ensemble $f(I)$, montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a \in I$ et $\eta > 0$ tels que

$$|h| < \eta \;\Rightarrow\; f(a+h) - f(a) < \epsilon$$

Que peut-on dire si f est minorée sur un intervalle ouvert non vide ?
2) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant la propriété d'addivité

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que s'il existe un intervalle ouvert sur lequel f est bornée alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
De quelle forme est alors f ?
Remarque : Avec l'axiome du choix on peut construire des fonctions additives discontinues.