Feuille d'exercices 2

Équipotence et dénombrabilité

Exercice 1 Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n,m) = 2^n(2m+1) - 1$ est une bijection. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exercice 2 Soit X est un ensemble quelconque, et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties. Montrer qu'il n'existe pas de bijection $f : X \to \mathcal{P}(X)$. (Indication : raisonner pas l'absurde, et considérer le sous-ensemble $E = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$.)

Exercice 3 Montrer que l'ensemble des fonctions $f : X \to \{0,1\}$ est équipotent à $\mathcal{P}(X)$.

Exercice 4 Montrer que si A n'est pas dénombrable et $B \subset A$ est dénombrable, alors A et $A \setminus B$ sont équipotents. En déduire que les nombres réels et les irrationnels sont en bijection.

Exercice 5 Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}$ et les intervalles $[0,1]$ et $]0,1[$ sont équipotents.

Exercice 6 Montrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents. En déduire qu'il existe des bijections $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}$.

Suites et valeurs d'adhérence

Exercice 7 Soit $u_n = (-n)^n$. Montrer que (u_n) n'a pas de suite extraite bornée.

Exercice 8 Soit $l \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite réelle ne tendant pas vers l. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de la suite (u_n) tels que, pour tout n, on ait $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| > \varepsilon$.

Exercice 9 On considére les suites de rationnels $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ et $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
1) Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers e.
2) En utilisant l'encadrement $a_n < e < b_n$, qui est vérifié pour tout n, déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 10 Soit φ une bijection de $\mathbb{N}^\star$ sur lui-méme. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^2}$? (on pourra utiliser le critére de Cauchy)

Exercice 11 Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
1) la suite (u_n) posséde exactement k valeurs d'adhérence, pour $k = 0,1,2,3$.
2) la suite (u_n) posséde une seule valeur d'adhérence, et est divergente.
3) l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est $[0,1]$.

Exercice 12 Soit (u_n) une suite réelle bornée. On définit $a_n = \inf_{k\geq n} u_k$ et $b_n = \sup_{k\geq n} u_k$.
1) Montrer que a_n et b_n convergent. On note $\underline{\lim}(u_n)$ et $\overline{\lim}(u_n)$ leurs limites respectives.
2) Montrer que $\underline{\lim}(u_n)$ est la plus petite valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\underline{\lim}(u_n) = \overline{\lim}(u_n)$.
3) Démontrer les inégalités suivantes pour des suites réelles bornées (u_n) et (v_n):

$$\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leq \underline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$$
$$\underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$$

4) Déterminer $\underline{\lim}$ et $\overline{\lim}$ pour

a) $u_n = (-1)^{n^2}$ b) $u_n = \cos(n)$ c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

d) $u_n = n\cos(n)$ e) $u_n = \frac{1}{\sin(n)}$ f) $u_n = \frac{3+n^2+2n}{n(\cos n - n)}$

g)

$$u_n = \begin{cases} (-1)^p \ si \ n = 2p \\ \sin(p) \ si \ n = 2p+1 \end{cases}$$

h)

$$u_n = \begin{cases} 1 + \frac{1+(-1)^p}{p} \ si \ n = 2p \\ (1+\frac{1}{p})^p \ si \ n = 2p+1 \end{cases}$$

Exercice 13 Soit (u_n) une suite réelle et $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Déterminer lesquelles des assertions suivantes sont vraies :

1) $u_n \in A$ à partir d'un certain rang.
2) Si A est non vide, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
3) Tout intervalle $[a, b]$ ne rencontrant pas A ne contient qu'un nombre fini des u_n.
4) Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il n'existe qu'un nombre fini de n tels que $u_n \geq \sup A + \varepsilon$.
5) Si A est borné, alors (u_n) est bornée.
6) Si $A = \emptyset$ et $u_n \geq 0$ pour tout n, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
7) Si $v_n = u_{\varphi(n)}$ est une suite extraite de u_n, et B l'ensemble de ses valeurs d'adhérence, alors
- $\underline{\lim}\, v_n = \underline{\lim}\, u_n$;
- B est inclus dans A.
8) Si A ne posséde qu'un seul élément et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est aussi A.
9) Une suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence converge.

Exercice 14 Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que, si pour tout k, λ_k est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors il en est de même de λ.

Exercice 15 Soit (v_n) une suite réelle telle que $v_{n+1} - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (v_n) est un intervalle.

Exercice 16 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $u_{n+m} \leq u_n u_m$ pour tous indices m et n.

1) Soit m fixé. Déduire de la division euclidienne de n par m que $\overline{\lim}\, u_n^{1/n} \leq u_m^{1/m}$.
2) Montrer que la suite $(u_n^{1/n})$ converge vers $\inf(u_n^{1/n})$.

Exercice 17 Soit a, $b \in]0, 1]$, et (u_n) et $v_n)$ deux suites de nombres complexes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mid u_n - a \mid \leq 1 - a$, $\mid v_n - b \mid \leq 1 - b$, et la suite $(\mid u_n v_n \mid)$ converge vers 1. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Convergence simple et uniforme

Exercice 18 Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes:

1. $E =]0, +\infty[$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$;
2. $E =]0, +\infty[$, $f_n(x) = \inf(n, \ln(x))$;

3. $E=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$;
4. $E=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{\sin(n^2x)}{n}$;
5. $E=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sqrt{x^2+1/n}$;
6. $E=\mathbb{R}$, $f_n(x)=g(x-n)$ où $g(x)=|1-x|$ si $|x|\leq 1$ et $g(x)=0$ sinon ;
7. $E=[0,1]$, $g(x)=n^2x$ si $x\leq 1/n$, $g(x)=n-n^2(x-1/n)$ si $1/n\leq x\leq 2/n$ et $g(x)=0$ sinon.

Exercice 19 Trouver une suite $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f_n continue, convergeant simplement vers f définie par $f(x)=1/x$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$. La convergence peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 20 Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément sur une partie E de $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que (f_n+g_n) converge uniformément sur E.

2) Si on suppose de plus que (f_n) et (g_n) sont des suites de fonctions bornées, montrer que (f_ng_n) converge uniformément sur E.

3) Construire deux suites de fonctions (f_n) et (g_n) convergeant uniformément sur E mais telle que (f_ng_n) ne converge que simplement sur E.

Exercice 21 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f continue sur $[a,b]$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a,b]$ ayant une limite l, $(f_n(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$.

Exercice 22 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f. Montrer que $\int_a^b f_n(t)\,dt$ converge vers $\int_a^b f(t)\,dt$.

Exercice 23 1) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On suppose que la suite des dérivées converge uniformément sur $[a,b]$ vers g, et que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour un $x_0\in[a,b]$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, et telle que $f'=g$ [indication : $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(t)\,dt$].

2) Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$, qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, mais sans que la suite des dérivées converge vers f'.