Exercice

1.
$$\begin{aligned}|g(x)-g(y)| &= |d(x,f(x))-d(y,f(y)|\\ &= |d(x,f(x))-d(x,f(y))+d(x,f(y))-d(y,f(y))|\\ &\leq d(f(x),f(y))+d(x,y)\\ &\leq 2d(x,y)\end{aligned}$$
g est donc 2 lipschitzienne donc continue.
2. g continue sur un compact atteint ses bornes. Il existe donc $x_0 \in X$ tel que $\inf_{x\in X}\{g(x)\} = g(x_0)$.
Or si $x_0 \neq f(x_0)$, $d(f(f(x_0)), f(x_0)) < d(f(x_0), x_0)$.
C'est à dire $g(f(x_0)) < g(x_0)$, ce qui est contradictoire avec la définition de x_0.
Donc $x_0 = f(x_0)$.

Problème

A.

1. $x_n \in K$ car K est convexe et $u(K) \subset K$.
2.
$$\|x_{n+1}-x_n\| = \|\frac{1}{(n+1)(n+2)}(x+u(x)+u^2(x)+\cdots+u^n(x)) - \frac{1}{n+2}u^{n+1}(x)\|$$
K est compact donc borné. Donc il existe M, tel que pour tout $y \in K$, $\|y\| \leq M$.
Donc, pour tout $0 \leq k \leq n+1$, $\|u^k(x)\| \leq M$, d'où $\|x_{n+1}-x_n\| \leq 2\frac{M}{n+2}$
$$u(x_n) - x_n = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}(x) - x)$$
D'où $\|u(x_n)-x_n\| \leq 2\frac{M}{n+1}$.
3. Si a est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)}$ tend vers a.
u est continue donc $u(x_{\varphi(n)})$ tend vers $u(a)$ et commme $u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}$ tend vers 0, on a $u(a) = a$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'un compact donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence. On en déduit donc que u admet un point fixe.
4. i) E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimmension finie. Soit n sa dimension et $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E. Alors la forme bilinéaire symétrique définie par $< x, y >= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ est un produit scalaire sur E ; $(x_1,\ldots,x_n)$ et $(y_1,\ldots,y_n)$ étant les coordonnées de x et y dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$.
ii) L'application $G \to \mathbb{R}; g \mapsto \|g(x)\|$ est continue. En effet, $GL(E)$ est une partie de l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans E, qui est normé par
$$\|g\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|g(x)\|}{\|x\|}$$

On a donc si g et h sont dans G,

$$|\|g(x)\| - \|h(x)\|| \leq \|g(x) - h(x)\| \leq \|x\| \|g - h\|$$

G étant compact, $\|x\|_G$ est bien défini dans $\mathbb{R}$.
On vérifie facilement que $\| \ \|_G$ définit une norme sue E.
iii) Soit x et y dans E tels que $\|x + y\|_G = \|x\|_G + \|y\|_G$.
D'après la question précédente, il existe $g \in G$, $\|x + y\|_G = \|g(x + y)\|$.
Or $\|x + y\|_G = \|g(x + y)\| \leq \|g(x)\| + \|g(y)\| \leq \|x\|_G + \|y\|_G$
Donc $\|x + y\|_G = \|x\|_G + \|y\|_G$ entraine que $\|g(x + y)\| = \|g(x)\| + \|g(y)\|$.
Cette norme provenant d'un produit scalaire, on en déduit le résultat.
La preuve peut se faire par récurrence sur le nombre de vecteurs.
Supposons que $\|x_1 + \cdots + x_{n+1}\|_G = \|x_1\|_G + \cdots + \|x_{n+1}\|_G$.
Si un des vecteurs est nul, c'est fini. Supposons alors qu'ils sont tous non nuls.
Comme de plus

$$\|x_1 + \cdots + x_{n+1}\|_G \leq \|x_1 + \cdots + x_n\|_G + \|x_{n+1}\|_G \leq \|x_1\|_G + \cdots + \|x_{n+1}\|_G$$

On en déduit donc que $\|x_1 + \cdots + x_n\|_G = \|x_1\|_G + \cdots + \|x_n\|_G$ et
$\|(x_1 + \cdots + x_n) + x_{n+1}\|_G = \|x_1 + \cdots + x_n\|_G + \|x_{n+1}\|_G$.
Si $x_1 + \cdots + x_n = 0$, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i = 0$. et donc le résultat est vrai avec $x = x_{n+1}$.
Supposons $x_1 + \cdots + x_n \neq 0$.
D'après ce qui précède, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x_{n+1} = \lambda(x_1 + \cdots + x_n)$.
La propriété vraie au rang n entraine qu'il existe $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ tels que $x_i = \lambda_i x$. on alors $x_{n+1} = \lambda(\lambda_1 + \ldots \lambda_n)x$.
iv) Soit $g \in G$.
Quand h décrit G, $g \circ h$ décrit G car G est un groupe.
Donc $\|x\|_G = \sup\{\|h(x)\|,\ h \in G\} = \sup\{\|(h \circ g)(x)\|,\ h \in G\} = \|g(x)\|_G$

5. Par l'absurde, on suppose que pour tout $x \in K$, il existe $g \in G$ tel que $g(x) \neq x$.
On a donc $K = \cup_{g \in G} \Omega_g$.
$\Omega_g = \{x \in K\,;\ \|g(x) - x\| > 0\}$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.
K étant compact, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $g_1, \ldots, g_r \in G$ tels que $K = \bigcup_{i=1}^r \Omega_{g_i}$.
6. $u = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r g_i$. Soit $x \in K$, $u(x) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r g_i(x)$. Comme par hypothèse, $g_i(x) \in K$, et K convexe, on a $u(x) \in K$. donc $u(K) \subset K$.
En utilisant la question 3), on en déduit qu'il existe $k \in K$ tel que $u(k) = k$.
7. Comme pour tout $i = 1 \ldots r$, $\|g_i(k)\|_G = \|k\|_G$ (question 4)iv)), $\| \sum_{i=1}^r g_i\|_G = \sum_{i=1}^r \|g_i(k)\|_G$.
La question 4)iii) entraine donc qu'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$, tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, $g_j(k) = \lambda_j g_i(k)$.

Or $\|g_j(k)\|_G = \|g_i(k)\|_G = \|k\|_G$ donc $\lambda_j = 1$.
Donc $u(k) = g_i(k) = k$.
Ce qui contredit $K = \bigcup_{i=1}^r \Omega_{g_i}$.

B

1. Une intersection quelconque de convexes est convexe.
   Ainsi $\mathrm{conv}(C)$ est l'intersection de tous les convexes contenant C. Il en existe car $\mathbb{R}^n$ est un convexe contenant C.
2. Soit D l'ensemble des éléments de la forme $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i c_i$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $c_1, \ldots, c_p \in C$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \geqslant 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.
   on vérifie que D est convexe. Comme il contient C, il contient le plus petit convexe contenant C, $\mathrm{conv}(C)$.
   Réciproquement, tout convexe contenant C contient D, donc $\mathrm{conv}(C)$ contient D.
   D'où $\mathrm{conv}(C) = D$.
3. La famille $\{c_2 - c_1, \ldots, c_p - c_1\}$ est liée car contient plus de $n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n.
   Donc il existe $(\lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=2}^p \lambda_i(c_i - c_1) = 0$.
   Posons $\lambda_1 = -\displaystyle\sum_{i=2}^p \lambda_i$. On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$.
   Soit $I = \{i \in \{1, \ldots, p\} / \lambda_i > 0\}$. I est non vide et $\{1, \ldots, p\} \setminus I$ est non vide car $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$ et $(\lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.
   On pose pour $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\theta_i = |\lambda_i|$.
   On a donc $\displaystyle\sum_{i \in I} \theta_i = \sum_{i \notin I} \theta_i$ et $\displaystyle\sum_{i \in I} \theta_i c_i = \sum_{i \notin I} \theta_i c_i$.
4. On suppose que $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i c_i$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $c_1, \ldots, c_p \in C$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \geqslant 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$.
   On suppose de plus que tous les α_i sont non nuls. En effet, si un des α_i est nul, le problème est résolu.
   On utilise pour les $c_1, \ldots, c_p$ les résultats et notations de la question précédente.
   Soit $i_0 \in I$ tel que $\frac{\theta_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = \max(\frac{\theta_i}{\alpha_i}; i \in I)$.
   Alors $x = \displaystyle\sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} (\alpha_i - \frac{\alpha_{i_0}\theta_i}{\theta_{i_0}})c_i + \sum_{i \notin I} (\alpha_i + \frac{\alpha_{i_0}\theta_i}{\theta_{i_0}})c_i$.
   Alors pour tout $i \in I$, $\alpha_i - \frac{\alpha_{i_0}\theta_i}{\theta_{i_0}} \geq 0$.
   Pour tout $i \notin I$, $\alpha_i + \frac{\alpha_{i_0}\theta_i}{\theta_{i_0}} \geq 0$.
   De plus $\displaystyle\sum_{i \in I} (\alpha_i - \frac{\alpha_{i_0}\theta_i}{\theta_{i_0}}) + \sum_{i \notin I} (\alpha_i + \frac{\alpha_{i_0}\theta_i}{\theta_{i_0}}) = 1$.
   On a ainsi exprimé x comme combinaison linéaire convexe de $p-1$ points de C.

5. On réitère la méthode précédente jusqu'à obtenir un nombre de points inférieur ou égal à $n+1$.
6. Si C est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, C^{n+1} est compact comme produit de compacts. De même l'ensemble $\Delta = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$ est une partie bornée et fermée de $\mathbb{R}^{n+1}$ donc est compacte. Ainsi $C^{n+1} \times \Delta$ est compact.

   De plus l'application
$$\begin{array}{cl} C^{n+1} \times \Delta & \to \operatorname{conv}(C) \\ ((c_1, \dots, c_{n+1}), (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})) & \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i c_i \end{array}$$
   est continue et surjective d'après la question précédente.

   Donc $\operatorname{conv}(C)$ est compact comme image d'un compact par une application continue.
7. Soit C une partie compacte non vide d'un espace de Banach E.

   $\overline{\operatorname{conv}(C)}$ est complet comme partie fermée d'un espace complet.

   Il suffit donc de montrer que $\overline{\operatorname{conv}(C)}$ est précompact. Il est facile de voir que $\operatorname{conv}(C)$ précompact entraine $\overline{\operatorname{conv}(C)}$ est précompact.

   Soit $\epsilon > 0$.

   C est compact donc précompact. Donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_N) \in C^N$ tels que $C \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \frac{\epsilon}{2})$.

   Soit F l'espace vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_N)$ et L l'envellope convexe de $\{x_1, \dots, x_N\}$.

   D'après la question précédente, L est compacte donc il existe $M \in \mathbb{N}^*$, $(l_1, \dots, l_M) \in L^M$ tels que $L \subset \bigcup_{i=1}^M B(l_i, \frac{\epsilon}{2})$.

   De plus $L \subset \operatorname{conv}(C)$ donc $(l_1, \dots, l_M) \in \operatorname{conv}(C)^M$.

   Soit $x \in \operatorname{conv}(C)$. D'après la question 2) vraie dans E, il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $(c_1, \dots, c_p) \in C^p$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in [0,1]^p$ avec $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ tels que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i c_i$.

   Or pour tout $1 \le i \le p$, il existe $j_i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\|c_i - x_{j_i}\| \le \frac{\epsilon}{2}$.

   Soit alors $y = \displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i x_{j_i}$.
$$\|x - y\| \le \sum_{i=1}^p \lambda_i \|c_i - x_{j_i}\| \le \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\epsilon}{2} \le \frac{\epsilon}{2}$$
   Or $y \in L$ donc il existe $j \in \{1, \dots, M\}$ tel que $\|y - l_j\| < \frac{\epsilon}{2}$.

   Donc $\|x - l_j\| < \epsilon$.

   On a donc montré que $\operatorname{conv}(C) \subset \bigcup_{i=1}^M B(l_i, \epsilon)$.

   On en déduit donc que $\operatorname{conv}(C)$ est précompact.

C

1. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. De plus $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. En effet, si on prend comme norme d'une matrice le sup de ses coefficients alors la norme d'une matrice orthogonale est plus petite que 1. On en déduit donc que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est compact. (Dim finie)
2. Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $q(x) = {}^t x x$.

   On a donc $\forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $q(Px) = {}^t x {}^t P P x$.

   On en déduit que $\forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,
   $$ {}^t x {}^t P P y = {}^t x y $$
   d'où ${}^t P P = I_n$.
3. A une forme quadratique est associée de façon unique une matrice symétrique. Ainsi si Q est une forme quadratique, la matrice S symétrique associée est définie par
   $$ Q(x) = \sum_{i=1}^{n} S_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} S_{i,j} x_i x_j = {}^t x S x $$
   Q est définie positive si et seulement si S est une matrice symétrique définie positive.
   Il existe donc une matrice P orthogonale, une matrice diagonale D dont les éléments de la diagonale sont tous strictement positifs tels que $S = P D {}^t P$.
   Soit alors $A = P \sqrt{D} {}^t P$ où $\sqrt{D}$ est la matrice diagonale à éléments de la diagonale strictement positifs telle que $\sqrt{(}D)\sqrt{(}D) = D$.
   On alors ${}^t x S x = {}^t x P \sqrt{(}D)\sqrt{(}D) {}^t P x = {}^t (P \sqrt{(}D) {}^t P x)(P \sqrt{(}D) {}^t P x) = {}^t (Ax)(Ax) = q(Ax)$.
   On en déduit donc que $Q = q \circ A$.
   De plus la partie de $\mathcal{S}(n, \mathbb{R})$ formée des matrices symétriques définies positives est un ouvert de $\mathcal{S}(n, \mathbb{R})$.
   En effet, on peut par exemple caractériser parmi les matrices symétriques celles qui strictement posives par le fait que certaine famille finie de déterminants est strictement positive. On l'obtient ainsi comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.
   On a montré que $\mathcal{E}^+ \subset \{q \circ A\,;\ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.
   La réciproque est clair car la matrice symétrique associée à la forme quadratique $q \circ A$ est ${}^t A A$ qui est une matrice symétrique définie positive si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

4. Grâce à la caractérisation précédente, il est clair que $C \subseteq \mathcal{E}^+$. Or si S et T sont deux matrices symétriques définies positives, et si $t \in [0,1]$, alors $tS + (1-t)T$ est encore une marice symétrique définie positive. Il suffit de voir que si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, ${}^t x(tS + (1-t)T)x > 0$ car ${}^t xSx > 0$ et ${}^t xTx > 0$. Ainsi $\mathcal{E}^+$ est convexe donc contient K.

   La compacité découle de B 6), C étant compact.
5. θ_g est linéaire et inversible. Son inverse est donnée par $Q \mapsto Q \circ g^{-1}$.
6. Il est facile de voir que $\mathcal{G}$ est un sous groupe. Il est compact car G est compacct.
7. Soit $e = \theta_h \in \mathcal{G}$.

   $e(q \circ g) = q \circ (g \circ h)$ et $g \circ h \in G$, donc $e(C) \subset C$. La linéarité de e donne $e(K) \subset K$.
8. K est un convexe compact d'un espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{E}$. $\mathcal{G}$ est un sous-groupe compact de $GL(\mathcal{E})$ tel que pour tout $e \in \mathcal{G}$, $e(K) \subset K$.

   Le théorème de Kakutani entraine donc que il existe $Q \in K$ tel que pour tout $e \in \mathcal{G}$, $e(Q) = Q$, i.e., il existe $Q \in K$ tel que pour tout $g \in G$, $Q \circ g = Q$.
9. Or d'après 3), il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $Q = q \circ A$.

   On a donc pour tout $g \in G$, $q \circ A = q \circ A \circ g$, d'où $q = q \circ A \circ g \circ A^{-1}$.

   Ceci entraine d'après 2) que $A \circ g \circ A^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et donc

$$AGA^{-1} \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

   ,