corrigé du CC2

Cours de Licence 3

Année 10/11

Exercice 1
A

1)Si $P = \sum_{k=1}^{n} p_k X^k$.

Pour tout $x \in [0,1]$, $|P(x)| = |\sum_{k=1}^{n} p_k x^k| \leq \sum_{k=1}^{n} |p_k| = \|P\|_1$.

D'où $\|P\|_\infty \leq \|P\|_1$.

2) a)$P_n(1-x) = 2^n \prod_{j=1}^{2n} (1 - x - \frac{j}{2n}) = 2^n \prod_{j=1}^{2n} (x - \frac{2n-j}{2n})$.

Le changement de variable $k = 2n - j$ donne :

$$P_n(1-x) = 2^n \prod_{k=0}^{2n-1} (x - \frac{k}{2n})$$

On en déduit facilement que :

$$xP_n(x) + (1-x)P_n(1-x) = 0$$

b) Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$

On a pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $-\frac{1}{2} \leq -\frac{j}{2n} \leq x - \frac{j}{2n} \leq \frac{n-j}{2n} \leq \frac{1}{2}$.

Donc $|x - \frac{j}{2n}| \leq \frac{1}{2}$ et $2^n \prod_{j=1}^{n} |x - \frac{j}{2n}| \leq 1$.

De plus $\prod_{j=n+1}^{2n} |x - \frac{j}{2n}| = \prod_{j=n+1}^{2n} (\frac{j}{2n} - x) \leq \prod_{j=n+1}^{2n} \frac{j}{2n} \leq 1$.

D'où $|P_n(x)| \leq 1$.

c) Si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $1 - x \in [0, \frac{1}{2}]$.

D'où $|P_n(x)| = \frac{1-x}{x}|P_n(1-x)| \leq |P_n(1-x)| \leq 1$.

3) Le coefficient de X^{2n} est 2^n. Donc $\|P_n\|_1 \geq 2^n$.

On en déduit qu'il n'existe pas de constante C telle que pour tout P de E, $\|P\|_1 \leq C\|P\|_\infty$, car sinon pour tout $n \geq 1$, $2^n \leq C$.

4) L'espace $(E, \| \|_\infty)$ n'est pas de Banach. En effet par exemple la suite de polynomes donnée par $Q_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $(E, \| \|_\infty)$.
Même exemple pour montrer que $(E, \| \|_1)$ n'est pas de Banach.

B

1) Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k X^k$,

$$L(P) = \sum_{k=0}^{n} p_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} X^i = \sum_{i=0}^{n} (\sum_{k=i}^{n} p_k \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix}) X^i$$

Donc $\|L(P)\|_1 \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} |p_i| \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \leq \sum_{i=0}^{n} |p_i| \sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \leq \sum_{i=0}^{n} |p_i| 2^i \leq 2^n \|P\|_1$

2) L étant une application linéaire, on en déduit que la restriction de L à E_n est lipschitzienne de constante de Lipschitz plus petite que 2^n. Elle est donc continue pour la norme $\| \|_1$ et donc pour toute norme, E_n étant un espace vectoriel de dimension finie.

3) L'ensemble $\{\|L(P)\|_1; P \in E_n \text{et } \|P\|_1 \leq 1\}$ est non vide et majoré par 2^n. Il admet donc une borne supérieure.

Soit $B_1 = \{P \in E_n / \|P\|_1 \leq 1\}$ est un compact de E_n comme partie bornée et fermée d'un espace vectoriel de dimension finie. De plus l'application de B_1 dans $\mathbb{R}$ qui à P associe $\|L(P)\|_1$ est continue, on en déduit par le théorème de Heine, qu'elle atteint sa borne supérieure.

4) $L(X^n) = (X+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^k$.

on a donc $\|X^n\|_1 = 1$ et $\|L(P)\|_1 = 2^n$.

Or $|||L_n||| \leq 2^n$ et comme $2^n = \frac{\|L(P)\|_1}{\|X^n\|_1} \leq |||L_n|||$, on a $|||L_n||| = 2^n$.

Exercice 2

1) On montre que F est isométrique à $\mathbb{R}^n$ pour un bon choix de norme sur $\mathbb{R}^n$ si n est la dimension de F.

Or $\mathbb{R}^n$ muni de n'importe quelle norme est complet, toutes les normes étant équivalentes. On en déduit que F est complet donc fermé dans E.

2)a)Toute suite de X admet une valeur d'adhérence. si la suite est de Cauchy, elle converge alors vers cette valeur.

b) Si X est compact, pour tout $\epsilon > 0$, les boules ouvertes de rayon $\epsilon > 0$ et de centre x quand x décrit X forment un recouvrement ouvert de X, on peut donc en extraire un recouvrement fini.

c) Soit X précompact. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ tels que $X \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon)$.

On en déduit donc que si x et y sont dans X, il existe i et j tels que $x \in B(x_i, \epsilon)$ et $y \in B(x_j, \epsilon)$.

Soit $M = \max\{\|x_i - x_j\|, (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2\}$.

On a donc $\|x - y\| \leq \|x - x_i\| + \|x_i - x_j\| + \|x_j - y\| \leq 2\epsilon + M$.

Donc le diamètre de X est plus petit que $2\epsilon + M$.
La réciproque n'est pas vraie. Considérons par exemple sur $\mathbb{R}$ la distance définie par $\delta(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.
Alors $(\mathbb{R}, \delta)$ est un espace métrique borné. Il n'est pas précompact car s'il l'était $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle d serait aussi précompact ($B_\delta(x, \frac{\epsilon}{1+\epsilon}) \subset B_d(x,\epsilon)$). Or $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas précompact car sinon il serait compact car il est complet.
Autre exemple : On considère l^∞ l'espace vectoriel des suites rélles bornées muni de la norme sup. Soit X l'ensemble formé par la base 'canonique'. Alors X est borné de diamètre égal à 2, mais comme deux éléments distincts sont à distance 1, on ne peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$.
3) L'ensemble $\{\|e-x\|; x \in X\}$ est non vide et minoré par 0, il admet donc une borne inférieure.
4) Soit $e \in E$. Soit $f \in F$.
Soit $B = \{y \in F / \|e-y\| \leq \|e-f\|\}$.
B estune partie bornée et fermée de F. C'est donc un compact. (F est de dim finie).
Or $d(e,F) \leq \|e-f\|$. Donc $d(e,F) = \inf\{\|e-x\|; x \in B\}$.
L'application de B dans $\mathbb{R}$ $x \mapsto \|e-x\|$ étant continue, cet inf est atteint.
5) Soit $(e,f) \in E^2$.
Pour tout $x \in X$,

$$d(e,X) \leq \|e-x\| \leq \|e-f\| + \|f-x\|$$

On en déduit donc que $d(e,X) - \|e-f\|$ est un minorant de $\{\|f-x\|; x \in X\}$, donc $d(e,X) - \|e-f\| \leq d(f,X)$.
Et de même, $d(f,X) - \|e-f\| \leq d(e,X)$. D'où $|d(e,X) - d(f,X)| \leq \|e-f\|$.
Soit $\epsilon > 0$.
Pour tout $(e,f) \in E^2$, $\|e-f\| \leq \epsilon$ entraine $|d(e,X) - d(f,X)| \leq \epsilon$.
L'application est donc uniformément continue.
6) L'application de F dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,X)$ est continue. On en déduit que $Y_F(r)$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
De plus si $x, y \in Y_F(r)$, il existe $x', y' \in X$ tels que $\|x-x'\| \leq d(x,X)+1$ et $\|y-y'\| \leq d(y,X)+1$.
On en déduit que $\|x-y\| \leq \|x-x'\| + \|x'-y'\| + \|y'-y\| \leq 2r + 2 + \delta(X)$, où $\delta(X)$ est le diamètre de X.
$Y_F(r)$ est donc fermé et borné dans F, donc compact, F étant de dim finie.
7) Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$.
Un compact d'un espace métrique est toujours fermé et borné.
Soit $\epsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ tels que $X \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$.
Soit E_ϵ l'espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_n$. Il est de dim finie.
De plus si $x \in X$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in B(x_i, \epsilon)$.
Donc $d(x, E_\epsilon) \leq \|x - x_i\| \leq \epsilon$.
Montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$.
X est complet comme fermé d'un complet.
Il reste donc à montrer que X est précompact.
Soit $\epsilon > 0$.

D'après (ii) il existe $E_{\frac{\epsilon}{3}}$ sous-espace de dimension finie tel que pour tout $x \in X$, $d(x, E_{\frac{\epsilon}{3}}) \leq \frac{\epsilon}{3}$.
D'après la question 6), l'ensemble $Y_{E_{\frac{\epsilon}{3}}}(\frac{\epsilon}{3})$ est compact, X étant borné.
Il est donc précompact.
Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in Y_{E_{\frac{\epsilon}{3}}}(\frac{\epsilon}{3})^n$ tels que $Y_{E_{\frac{\epsilon}{3}}(\frac{\epsilon}{4})} \subset \cup_{i=1}^n B(y_i, \frac{\epsilon}{6})$.
De plus comme $d(y_i, X) \leq \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{2}$, il existe $x_i \in X$ tel que $\|y_i - x_i\| < \frac{\epsilon}{2}$.
Soit $x \in X$.
D'après la question 4), il existe $e \in E_{\frac{\epsilon}{3}}$ tel que $d(x, E_{\frac{\epsilon}{3}}) = \|x - e\|$.
On a donc $d(e, X) \leq \|x - e\| \leq \frac{\epsilon}{3}$.
Donc $e \in Y_{E_{\frac{\epsilon}{3}}}(\frac{\epsilon}{3})$.
Donc il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $e \in B(y_i, \frac{\epsilon}{6})$.
D'où $\|x - x_i\| \leq \|x - e\| + \|e - y_i\| + \|y_i - x_i\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{2}$.
On en déduit donc que $X \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$.
8) Si E est de dimension finie, l'énoncé précédent dit que les compacts sont les fermés bornés.
En effet la condition il existe un sous espace de dim finie tel que pour tout $x \in X$ $d(x, E_\epsilon) \leq \epsilon$ est toujours satisfaite. Il suffit de prendre $E_\epsilon = E$.
9) Supposons que X soit une partie de l^1 telle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$, on ait $\displaystyle\sum_{n \geq N} |x_n| \leq \epsilon$.
Soit E_ϵ le sous-espace de l^1 contenant toutes les suites nulles à partir du rang N. C'est un sous-espace de dimension finie.
Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ et soit $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $y_k = x_k$ si $k < N$ et $y_k = 0$ si $k \geq N$.
$y \in E_\epsilon$ et $\|x - y\| = \displaystyle\sum_{n \geq N} |x_n| \leq \epsilon$.
Donc $d(x, E_\epsilon) \leq \epsilon$.
la condition (ii) est donc satisfaite et X est donc un compact de l^1 .
Supposons maintenant que X est un compact de l^1 .
C'est donc un fermé borné.
Soit $\epsilon > 0$.
Soit $f_N : X \longrightarrow l^1,\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (x_0, \ldots, x_N, 0 \ldots)$
Pour tout $x, y \in X$, $\|f_N(x) - f_N(y)\| = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} |x_k - y_k| \leq \|x - y\|$.
De plus pour tout $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$, $\|f_N(x) - x\| = \displaystyle\sum_{n \geq N} |x_n|$ tend vers 0 quand N tend vers ∞.
Montrons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f_N(x) - x\| \leq \epsilon$.
Si ceci n'est pas vrai, il existe une suite de X, $x^{(N)}$ telle que pour tout N, $\|f_N(x^{(N)}) - x^{(N)}\| > \epsilon$.
Or X est compact, donc la suite $x^{(N)}$ admet une valeur d'adhérence x. Il existe donc une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x^{(\varphi(N))}$ tende vers x. Mais

alors

$$
\begin{aligned}
\epsilon &\leq \|f_{\varphi(N)}(x^{(\varphi(N))}) - x^{(\varphi(N))}\| \\
&\leq \|f_{\varphi(N)}(x^{(\varphi(N))}) - f_{\varphi(N)}(x)\| + \|f_{\varphi(N)}(x) - x\| + \|x - x^{(\varphi(N))}\| \\
&\leq 2\|x - x^{(\varphi(N))}\| + \|f_{\varphi(N)}(x) - x\|
\end{aligned}
$$

en faisant tendre N vers ∞, on obtient $\epsilon \leq 0$, ce qui est absurde.