Université Grenoble I
Mathématiques
Topologie

Licence L351A
Vendredi 5 novembre 2010
08H00-12H00

Examen

Durée : 4 H

Avertissement : La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note finale. Rappelons qu'en Mathématique toute **affirmation** doit être **justifiée**, soit en faisant appel au cours, soit par équivalence avec un énoncé plus simple, clairement vrai. Et tout cela avec une extrême rigueur !

Questions de cours ou proches du cours

1. Montrer que $\mathbb{R}$ et $[0, +\infty[$ ne sont pas homéomorphes.
2. Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'adhérence de la boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ est la boule fermée de centre x et de rayon r.

Exercice 1. On munit $\mathbb{R}^n$ de la topologie usuelle.

1) Donner une base de voisinages ouverts définissant la topologie « usuelle » de $\mathbb{R}^n$.
2) Montrer que l'addition $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto x + y$ est une application continue.
3) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}^n, +)$. Montrer que si G est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ alors $G = \mathbb{R}^n$.
4) On dit que le groupe G est discret si l'ensemble des éléments de G de norme euclidienne plus petite que r est fini pour tout $r \geq 0$. Montrer que si G est discret alors tous les points de G sont isolés dans $\mathbb{R}^n$. (On rappelle qu'un point $x \in G$ est isolé si il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \cap G = \{x\}$)
5) a) Montrer que si G est discret, alors G est fermé.
   b) Montrer en donnant un exemple que la réciproque n'est pas vraie.
6) On prend ici $n = 1$ et $G \neq \mathbb{R}$. Montrer que G est fermé si et seulement s'il existe $g \in \mathbb{R}$ tel que $G = \mathbb{Z}.g$.

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit E de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in [0, 1]\}$. Soit N l'application de E dans $\mathbb{R}$ donnée par $N(f) = \sup\{|xf(x)|, x \in [0, 1]\}$.

1) Montrer que N est une norme sur E.
2) Montrer que $N(f) \leq \|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$.
3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $f \in E$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f dans (E, N). Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f uniformément sur $[\epsilon, 1]$.

4) Soit $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$. La partie F est-elle fermée dans $(E, \|.\|_\infty)$? dans (E, N) ?

5) Les normes N et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\sin x| \leq |x|$.

2) En comparant avec une intégrale (par exemple), montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ alors $x_n := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ appartient à $\mathbb{R}$ et montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{x}{k}\right)^2 .$$

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$.

4) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur les intervalles bornés de $\mathbb{R}$.

5) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, appelée droite étendue (ou droite achevée).

1) a) Prouver qu'il existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ une relation d'ordre unique : $\leq$ telle que la restriction de $\leq$ à $\mathbb{R}$ soit l'ordre habituel de $\mathbb{R}$ et que l'on ait : $-\infty < x < +\infty$, pour tout nombre réel x.

   b) Prouver que cet ordre est total.

   c) Prouver que toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.

Soit $I = [-1, 1]$ muni de la distance d_I donnée par la valeur absolue. Soit

$$\begin{array}{llll} \varphi : & \overline{\mathbb{R}} & \rightarrow & I \\ & +\infty & \mapsto & 1 \\ & -\infty & \mapsto & -1 \\ & x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \text{ si } \ x \in \mathbb{R} \end{array}$$

2) Montrer que φ est une bijection et donner son application réciproque.

3) On définit pour a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\delta(a, b) = |\varphi(a) - \varphi(b)|$. Montrer que δ est une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$ et que $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ est borné.

4) Montrer que φ est un homéomorphisme de $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ dans (I, d_I).

On note δ' la restriction de δ à $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ qui est donc une distance sur $\mathbb{R}$.

5) δ' et la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ sont-elles équivalentes ?

6) δ' et la distance usuelle sur $\mathbb{R}$ sont-elles topologiquement équivalentes ?

7) Montrer que toute suite de Cauchy de (I, d_I) converge. En déduire que toute suite de Cauchy de $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$ converge.

8) Le théorème de Bolzano-Weierstrass est-il vrai dans $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$?