Devoir à la maison n$^{\text{o}}$ 2

À rendre avant le 1er décembre 2010

Exercice . Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application vérifiant

$$\forall\,(x, y) \in X^2, \quad x \neq y \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

On veut montrer que f possède un point fixe : il existe $x \in X$ tel que $f(x) = x$.

1. Soit $g : (X, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ défini par $g(x) = d(x, f(x))$. Montrer que g est continue.
2. En observant que $\inf_{x\in X}\{g(x)\}$ est un minimum, atteint en x_0, montrer que x_0 est un point fixe de f.

Problème . ([1]) `Sous-groupes compacts de` $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

A. *Théorème du point fixe de Kakutani.* Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit K un compact convexe non vide de E. Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$ tel que, pour tout $g \in G$, on a $g(K) \subseteq K$. On veut montrer qu'il existe $x \in K$ tel que, pour tout $g \in G$, $g(x) = x$.

1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(K) \subseteq K$. Soit $x \in K$ et

$$x_n := \frac{1}{n+1}\left(x + u(x) + u^2(x) + \cdots + u^n(x)\right)$$

(u^i désigne la composée $u \circ \cdots \circ u$ i fois). Montrer que $x_n \in K$.

2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u(x_n) - x_n) = 0$.

3) Montrer que si a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $u(a) = a$. En déduire que u possède un point fixe.

4) i) Montrer qu'il existe sur E une norme euclidienne (*i.e.* qui provient d'un produit scalaire).

ii) Soit $\|.\|$ une telle norme sur E. Pour $x \in E$, soit

$$\|x\|_G := \sup\{\|g(x)\|,\ g \in G\}.$$

Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\|x\|_G \in \mathbb{R}$ et que $\|.\|_G$ définit une norme sur E.

iii) Soit $x, y \in E$. Montrer que si $\|x + y\|_G = \|x\|_G + \|y\|_G$ alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$. En déduire que si $x_1, \ldots, x_n \in E$ vérifient

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|_G = \|x_1\|_G + \cdots + \|x_n\|_G$$

alors il existe $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ tels que $x_i = \lambda_i x$.

iv) Montrer que tous les éléments de G sont des isométries pour $\|.\|_G$.

5) Pour démontrer le théorème de Kakutani, on raisonne par l'absurde. Si $g \in G$, on pose $\Omega_g := \{x \in K\,;\ g(x) \neq x\}$. Montrer qu'existent $r \in \mathbb{N}^*$ et $g_1, \ldots, g_r \in G$ tels que $K = \bigcup_{i=1}^r \Omega_{g_i}$ (on montrera que Ω_g est un ouvert de K).

6) Soit $u := \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r g_i$. Montrer qu'il existe $k \in K$ tel que $u(k) = k$.

7) Déduire de 4-iii) et 4-iv) que, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on a $g_i(k) = k$ puis aboutir à une contradiction.

B. *Théorème de Carathéodory.* Soit C une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $\mathrm{conv}(C)$ l'enveloppe convexe de C, *i.e.* le plus petit convexe (pour l'inclusion) de $\mathbb{R}^n$ contenant C.

1) Justifier l'existence de $\mathrm{conv}(C)$.

1. Dans ce problème, les parties ne sont pas indépendantes entre elles.

2) Montrer que $\mathrm{conv}(C)$ est l'ensemble des éléments de la forme $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c_i$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $c_1, \ldots, c_p \in C$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \geq 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ (on dit que x est combinaison linéaire convexe des c_i).

3) Soit $p \geq n+2$ et $c_1, \ldots, c_p \in C$. En observant que la famille $\{c_2 - c_1, \ldots, c_p - c_1\}$ est liée sur $\mathbb{R}$, montrer qu'il existe $I \subseteq \{1, \ldots, p\}$ et $(\theta_i)_{1 \leq i \leq p} \in (\mathbb{R}^+)^p \setminus \{0\}$ tels que $\sum_{i \in I} \theta_i = \sum_{j \notin I} \theta_j \neq 0$ et $\sum_{i \in I} \theta_i c_i = \sum_{j \notin I} \theta_j c_j$.

4) Soit $x \in \mathrm{conv}(C)$ écrit avec des c_i comme dans B-2. Montrer que si $p \geq n+2$ alors x est combinaison linéaire convexe d'au plus $p-1$ des c_i.

5) En déduire le théorème de Carathéodory : tout point de $\mathrm{conv}(C)$ est combinaison linéaire convexe d'au plus $n+1$ points de C.

6) Montrer alors que si C est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ il en est de même pour $\mathrm{conv}(C)$.

7) Montrer que si C est une partie compacte non vide d'un espace de Banach E alors l'adhérence $\overline{\mathrm{conv}(C)}$ est compacte dans E (on pourra montrer que $\mathrm{conv}(C)$ est précompact).

C. On veut montrer qu'un sous-groupe compact G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe des isométries $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ à conjugaison près : il existe $p \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $pGp^{-1} \subseteq \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\,;\ P^{-1} = {}^t P\}$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2) Soit q la forme quadratique provenant du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si P est une isométrie pour q (*i.e.* $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $q(Px) = q(x)$).

3) Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{E}^+$ la partie de $\mathcal{E}$ formée des formes quadratiques définies positives. Montrer que $\mathcal{E}^+$ est un ouvert de $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}^+ = \{q \circ A\,;\ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

4) Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soit K l'enveloppe convexe de $C := \{q \circ g \in \mathcal{E}\,;\ g \in G\}$ dans $\mathcal{E}$. Prouver que $K \subseteq \mathcal{E}^+$ et que K est compact (on utilisera B-5).

5) Pour $g \in G$, soit $\theta_g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ défini par $\theta_g(Q) = Q \circ g$ pour $Q \in \mathcal{E}$. Justifier le fait que $\theta_g \in \mathrm{GL}(\mathcal{E})$.

6) Soit $\mathcal{G} := \{\theta_g \in \mathrm{GL}(\mathcal{E})\,;\ g \in G\}$. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathcal{E})$.

7) Montrer que, pour tout $e \in \mathcal{G}$, on a $e(K) \subseteq K$.

8) Déduire du théorème de Kakutani l'existence de $Q \in K$ tel que, pour tout $g \in G$, $Q \circ g = Q$.

9) Conclure en utilisant C-3).