UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — Unité d'enseignement MAT 243

Licence de Sciences et Technologie

Examen du mercredi 17 juin 2009

durée : 2h

Le barême est indicatif.
Toute affirmation devra être justifiée.

Question de cours *5 points*

Soit $0 \leq k \leq n$ des entiers.
Montrer que l'ensemble des parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est donné par $\binom{n}{k}$.

Exercice 1 *10 points*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.
Soit X et Y deux variables aléatoires sur cet espace à valeurs dans $\{0, 1\}$ et de même loi donnée par $P(X = 0) = q = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$ où $p \in]0, 1[$.
Notons x la probabilité $P((X, Y) = (1, 1))$.

1. Montrer que $\max(2p - 1, 0) \leq P((X, Y) = (1, 1)) \leq p$.
   Déterminer la loi de (X, Y) en fonction de x et de p.
   (On pourra représenter les résultats sous forme d'un tableau).
2. Pour quelle valeur de x, X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la covariance de (X, Y) en fonction de x et de p.
4. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.
5. Quelle est la loi de $|X - Y|$?
   Calculer l'espérance de $|X - Y|$ en fonction de x et p.
   Pour quelle valeur de x est-elle minimale ? Que peut-on alors dire de (X, Y) ?
6. Donner un exemple de variables aléatoires montrant que le résultat de la question 4 n'est pas vrai en général.

Exercice 2 *5 points*

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
On note F sa fonction de répartition.
On suppose que F est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{x^2}{8} & \text{si } 2 \leq x < 2\sqrt{2} \\ 1 & \text{si } 2\sqrt{2} \leq x \end{cases}$$

1. Montrer que X admet une densité f que l'on déterminera.
2. Montrer que X admet une espérance que l'on calculera.
3. Soit Y la partie entière de X.
   Déterminer la loi de Y.