UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — Unité d'enseignement MAT 243

Licence de Sciences et Technologie

Examen du mardi 19 mai 2009

durée : 2h

Le barême est indicatif.
Toute affirmation devra être justifiée.
Les espaces de probabilité associés aux variables aléatoires ne devront pas être nécessairement décrits s'ils sont infinis.

Exercice 1

Partie 1 *(3 points)*
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
On notera $\mathbb{N}_0 = \{0\}$, $\mathbb{N}_1 = \{1, \cdots, 9\}$ et pour $l \geq 2$, $\mathbb{N}_l$ sera l'ensemble des entiers de longueur l, c'est-à-dire ayant l chiffres dans l'écriture en base 10. Si $x \in \mathbb{N}$, on notera $l(x)$ sa longueur.
On a donc si $l \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$, $l(x) = l$ si et seulement si $x \in \mathbb{N}_l$.
Ainsi par exemple $\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid l(n) = 2\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 10 \leq n \leq 99\}$.

1. Donner pour $l \geq 0$, le cardinal de $\mathbb{N}_l$.
2. Montrer que pour tout $l \geq 1$, $\displaystyle\sum_{x \in \mathbb{N}_l} x \geq 9(100)^{l-1}$.

Partie 2 *(13 points)*
On considère une urne possédant 11 boules. Une est noire et les autres sont numérotées de 0 à 9. On procède dans cette urne à une suite de tirages **avec** remise. On notera pour $k \geq 1$, X_k le résultat du $k^{\text{ème}}$ tirage. On arrête de tirer des boules à la première boule noire tirée. On note T le nombre de tirages effectués.

1. Donner la loi de T et son espérance.

On définit la variable Z suivante :

Si $T = 1$ alors $Z = 0$.

Si $T = l \geq 2$ et si lors des $l - 1$ premiers tirages, on a tiré dans l'ordre les boules portant les numéros $x_1, \cdots, x_{l-1}$ (c'est-à-dire que $X_1 = x_1, \cdots, X_{l-1} = x_{l-1}$), alors on pose $Z = 10^{l-2}x_{l-1} + \cdots + 10x_2 + x_1$.

Par exemple, si on a tiré successivement 0,4,1,0,3,0,Noire, alors $T = 7$ et $Z = 30140$.

2. Calculer pour $n \geq 1$, $P((Z,T) = (0,n))$.
3. Calculer pour $l \geq 1$, $x \in \mathbb{N}_l$ et $n \geq 1$, $P((Z,T) = (x,n))$.
4. Déduire du résultat précédent que pour $l \geq 0$, $x \in \mathbb{N}_l$, $P(Z = x) = (\frac{1}{11})^l \frac{1}{10}$
5. Soit L la variable aléatoire définie par $L = l(Z)$.
   Déterminer la loi de L et calculer son espérance.
6. Calculer la loi de $(Z, T - L)$ et montrer que les variables aléatoires Z et $T - L$ sont indépendantes.
7. Expliquer la formule valable pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{x=1}^{10^N-1} xP(Z = x) = \sum_{l=1}^{N} \sum_{x \in \mathbb{N}_l} xP(Z = x)$$

   En utilisant la partie 1, montrer que Z n'admet pas d'espérance.

On rappelle que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. De plus la dérivée de la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $]-1,1[$ s'obtient en dérivant terme à terme.

Exercice 2

(4 points)

Une pièce est éclairée par 10 ampoules. On suppose que les durées de vie en jour des ampoules notées $X_1, \cdots, X_{10}$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{10}$.
On rappelle qu'une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ a une densité f donnée par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$.

1. Calculer l'espérance de X_1.
2. Calculer $P(X_1 > 10)$.
3. Soit N le nombre d'ampoules fonctionnant au bout de 10 jours.
   Déterminer la loi de N.