UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — Unité d'enseignement MAT 243

Licence de Sciences et Technologie

Corrigé de l'examen du mercredi 18 mai 2010

Question de cours

Voir cours

Exercice 1

1. Z_u est à valeurs dans $\{1, k+1\}$.
2. $P(Z_u = 1) = P(\epsilon_1 = 0, \ldots, \epsilon_k = 0) = \prod_{i=1}^{k} P(\epsilon_i = 0) = q^k$
   les variables aléatoires ϵ_i étant indépendantes. $(q = 1 - p)$
   $P(Z_u = k+1) = 1 - P(Z_u = 1) = 1 - q^k$.
3. $E[Z_u] = 1 \times P(Z_u = 1) + (k+1) \times P(Z_u = k+1) = 1 + k - kq^k$.
   $V(Z_u) = E[Z_u^2] - E[Z_u]^2 = 1^2 \times P(Z_u = 1) + (k+1)^2 \times P(Z_u = k+1) - E[Z_u]^2 = 1 + k - kq^k - (1 + k - kq^k)^2 = k^2 q^k (1 - q^k)$.
4. Pour $1 \leq u \leq m$, Z_u est une fonction de $(\epsilon_{k(u-1)+1}, \ldots, \epsilon_{uk})$.
   L'indépendance des variables aléatoires $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq N}$ entraîne donc celle des $(Z_u)_{1 \leq u \leq m}$.
   Si on ne veut pas utiliser cet argument, il suffit de dire que montrer que les variables aléatoires $(Z_u)_{1 \leq u \leq m}$ sont indépendantes si et seulement si les événements $\{Z_u = 1\}, 1 \leq u \leq m$ sont indépendants. Or $\{Z_u = 1\} = \cap_{i=(u-1)k+1}^{ku} \{\epsilon_i = 0\}$, ce qui entraîne facilement le résultat grâce à l'indépendance des variables aléatoires $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq N}$.
5. $E[X_k] = \sum_{i=1}^{m} E[Z_u] = mE[Z_1] = m + mk - mkQ^k = N + N(\frac{1}{k} - q^k)$.
   Les variables aléatoires $(Z_u)_{1 \leq u \leq m}$ étant indépendantes, $V(X_k) = \sum_{i=1}^{m} V(Z_u) = mV(Z_1) = mk^2 q^k (1 - q^k)$.
6. Minimiser $E[X_k]$ revient à minimiser la fonction $k \mapsto \frac{1}{k} - q^k$.
   On peut ainsi faire le tableau de variation de φ fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \frac{1}{x} - q^x$.
   $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}\psi(x)$ où $\psi(x) = 1 + x^2(\ln q)e^{x \ln q}$.
   $\psi'(x) = (\ln q)xq^x\,(2 + x(\ln q))$
   On obtient ainsi le tableau de variation :

x	0		$\frac{-2}{\ln q}$		$+\infty$
$\psi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\psi(x)$	1	$\searrow$	$\psi(\frac{-2}{\ln q}) < 0$	$\nearrow$	1
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

On voit donc que le minimum de φ est atteint au point x_q tel que $\varphi'(x_q) = 0$ et $x_q < \frac{-2}{\ln q}$,
Or q est proche de 1 et donc $\frac{-2}{\ln q}$ est proche de $\frac{2}{p}$ et $\frac{1}{\sqrt{p}} < \frac{2}{p}$.
De plus $\psi(\frac{1}{\sqrt{p}}) = 1 + \left(\frac{\ln(1-p)}{p}\right) e^{\frac{\ln(1-p}{\sqrt{p}}}$.
Comme $\frac{\ln(1-p)}{\sqrt{p}}$ tend vers 0 et $\frac{\ln(1-p)}{\sqrt{p}}$ tend vers 1 quand p tend vers 0, on en déduit que $\psi(\frac{1}{\sqrt{p}})$ tend vers 0, donc x_q est proche de $\frac{1}{\sqrt{p}}$ quand p est proche de 0.
Alors si k_0 est proche de $\frac{1}{\sqrt{p}}$, $E[X_{k_0}]$ est proche de $N + N(\sqrt{p} - q^{\sqrt{p}})$.
Or $q^{\sqrt{p}} = e^{\frac{\ln(1-p)}{\sqrt{p}}} = e^{\frac{-p+o(p)}{\sqrt{p}}} = e^{-\sqrt{p}+o(\sqrt{p})} = 1 - \sqrt{p} + o(\sqrt{p})$.
D'où $E[X_{k_0}] \simeq 2\sqrt{p}N \simeq 20$ qui est bien plus petit que 100.

Exercice 2

1. $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Si $u > 0$,
$$P(X + Y \leq u) = \int_0^u e^{-x} \left(\int_0^{u-x} e^{-y} dy \right) dx = 1 - (1 + u)e^{-u}$$

3. N est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$
$$P(N = 0) = P(X > 1) = e^{-1}$$
$$P(N = 2) = P(X + Y > 1) = 1 - P(X + Y \leq 1) = 2e^{-1}$$
$$P(N = 1) = 1 - P(N = 0) - P(N = 2) = 1 - 3e^{-1}$$

4. $P(Z \leq u) = P(\frac{X}{X+Y} \leq u) = P(\frac{1-u}{u}X \leq Y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\int_{\frac{1-u}{u}x}^{+\infty} e^{-y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-\frac{1-u}{u}x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{u}x} dx = u$
On trouve la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3

1. S suit la loi binomiale de paramètre $(100, \frac{1}{2})$.
2. Le théorème de De Moivre dit que lorsque n est grand, on peut approcher la loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$ par la loi normale de paramètre $(\frac{n}{2}, \frac{n}{4})$.
Donc $P(40 \leq S \leq 60)$ est proche de $P(40 \leq X \leq 60)$ ou X suit une loi normale de paramètre $(50, 25)$.
Alors $\frac{X-50}{\sqrt{25}} = \frac{X-50}{5}$ suit une loi normale de paramètre $(0, 1)$.
d'où $P(40 \leq X \leq 60) = P(-2 \leq \frac{X-50}{5} \leq 2) = F(2) - F(-2) = 2F(2) - 1 \simeq 0,954 > 0,95$.
On peut donc supposer que $P(40 \leq S \leq 60) > 0,95$.

3. Le résultat précédent nous dit qu'avec une probabilité de 95%, le nombre de piles obtenu lors de 100 lancers d'une piéce équilibrée appartient à l'intervalle $[40, 60]$. Lors d'une expérience, nous avons obtenu 56 piles qui appartient bien à cet intervalle. Cette expérience ne nous permet donc pas de rejeter l'hypothèse *La pièce est bien équilibrée.*

   On aurait pu se poser la question suivante : Sachant que lors d'une expérience consistant à lancer 100 fois une pièce de monnaie, on a obtenu 56 piles, peut-on accepter l'hypothèse *La pièce est bien équilibrée* ?

   On pouvait alors chercher un intervalle de confiance pour le paramètre p inconnu (probabilité d'obtenir pile) toujours en utilisant le théorème de Laplace . Dans ce cas S suit la loi binomiale de paramètre $(100, p)$.

   $\mathcal{P}(|\frac{S}{100} - p| \leq t)$ est alors à proche de $2F(t\sqrt{\frac{100}{p(1-p)}}) - 1 \geq 2F(20t) - 1$ car $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

   Ainsi en prenant $20t = 2$, soit $t = 0,1$, $[\frac{56}{100} - 0,1, \frac{56}{100} + 0,1] = [0,46\ , 0,66]$ est un intervalle de confiance pour p à 95%. On ne peut donc rejeter l'hypothèse.