UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — Unité d'enseignement MAT 243

Licence de Sciences et Technologie

Examen du mercredi 18 mai 2010

durée : 2h

Le barême est indicatif.
Toute affirmation devra être justifiée.

Question de cours *(3 points)*

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules rouges.
On procède dans cette urne à n tirages **sans remise**.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 1 *(7 points)*

À l'aide d'un test sanguin on veut détecter les personnes atteintes d'une certaine maladie dans un groupe de N personnes.
On suppose que la probabilité p qu'une personne ait un test positif est la même pour toutes les personnes et que les résultats au test sont des variables aléatoires indépendantes.
On notera $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq N}$, la suite de variables aléatoires suivantes :

$$\text{Pour } \ i = 1, \ldots, N, \ \epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si la personne } i \text{ a un test sanguin positif} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les variables aléatoires $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq N}$ sont donc indépendantes et de même loi, la loi de Bernoulli de paramètre p.
On veut détecter toutes les personnes ayant un test positif et on s'intéresse au nombre de tests nécessaires à effectuer. Cela peut-être fait de l'une des deux manières suivantes :

Méthode 1 On teste toutes les personnes. Dans ce cas N tests sont nécessaires.

Méthode 2 On choisit un entier k tel que $2 \leq k \leq N$. On répartit la population en groupe de k personnes plus éventuellement un groupe plus petit. On suppose pour simplifier que $N = mk$ où $m \in \mathbb{N}$, on a ainsi m groupes de k personnes.

Dans chaque groupe constitué, on mélange le sang et on teste le mélange. Si le test est négatif, alors on sait que toutes les personnes constituant le groupe ont un

test négatif. Si le test du mélange est positif, alors il faut tester chaque personne séparément. Donc k tests complémentaires sont nécessaires pour tester toutes les personnes de ce groupe. Pour $1 \leq u \leq m$, on note Z_u la variable aléatoire donnant le nombre total de tests effectués (y compris le test du groupe) pour détecter par cette méthode les personnes ayant un test positif parmi les k personnes du groupe numéro u.

On s'intéresse au nombre de tests effectués dans la méthode 2.

1. Quelles sont les valeurs prises par Z_u pour $1 \leq u \leq m$?
2. Quelle est la loi de Z_u pour $1 \leq u \leq m$?
3. Calculer l'espérance et la variance de Z_u.
4. Montrer que les variables aléatoires $(Z_u)_{1 \leq u \leq m}$ sont indépendantes.
5. Soit $X_k = \sum_{u=1}^{m} Z_u$. Que représente X_k ?
6. Calculer l'espérance et la variance de X_k.
7. **Question bonus** On suppose que $N = 100$ et $p = 0,01$. On note k_0 une valeur de k qui minimise le nombre moyen de tests nécessaires pour détecter toutes les personnes ayant un test positif par la méthode 2. Montrer que k_0 est proche de $\frac{1}{\sqrt{p}}$. En déduire une valeur approchée de $E[X_{k_0}]$. Comparer les méthodes 1 et 2.

Exercice 2 *(6 points)*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, la loi exponentielle de paramètre 1.
La loi exponentielle de paramètre 1 a pour densité sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner la fonction de répartition de X.
2. Calculer pour $u > 0$, $P(X + Y \leq u)$.
3. Soit $N = \mathbf{1}_{\{X \leq 1\}} + \mathbf{1}_{\{X+Y \leq 1\}}$.
   Quelles sont les valeurs prises par N ?
   Donner la loi de N.
4. Soit $Z = \frac{X}{X+Y}$.
   Calculer pour $u \in [0, 1]$, $P(Z \leq u)$.
   (On pourra représenter $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x, 0 < y, \frac{x}{x+y} \leq u\}$.)
   En déduire la loi de Z.

Exercice 3 *(4 points)*

Je désire vérifier si la pièce que je possède est bien équilibrée. Pour ceci, je la lance 100 fois. J'obtiens 56 fois pile.

1. Pour une pièce équilibrée, on appele S la variable aléatoire donnant le nombre de piles obtenu lors de 100 lancers.

   Quelle est la loi de S ?

2. En utilisant le théorème central limite (ou plus exactement le théorème de De Moivre), expliquer pourquoi, on peut supposer que $P(S \in [40, 60]) \geq 0,95$.

   Valeur numérique : $F(2) \simeq 0,977$ où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

3. Que pensez-vous de l'hypothèse suivante : *La pièce est bien équilibrée*