L3B – Topologie **Contrôle continu du 13 décembre 2013** **13h30-15h30**

Documents, Calculatrices, Téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Questions de cours [6 points] Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

1) Donner la définition d'une partie compacte A de E.

2) Montrer que toute partie compacte K de E est fermée et bornée.

3) Si A et B sont deux compacts de E, montrer que $A \cup B$ est un compact.

4) La sphère unité S^2 de l'espace $\mathbb{R}^3$ munie de la norme euclidienne, est-elle compacte ? La sphère unité S^2 privée du pôle nord $N = (0, 0, 1)$, est-elle compacte ? Justifier la réponse.

Exercice 1. [5 points] On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |.|)$: le plan complexe $\mathbb{C}$ muni de la norme donnée par le module défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Pour $r \geq 0$, on définit la partie $A_r \subset \mathbb{C}$ par $A_r = B(-1, r) \cup \bar{B}(1, 2r)$
(A_r est donc la réunion de la boule ouverte $B(-1, r)$ et de la boule fermée $\bar{B}(1, 2r)$).

1) Dessiner A_r dans les trois cas particuliers $r = 1/2$, $r = 1$ et $r = 3$.

Pour chacune des questions suivantes, justifiez avec soin vos réponses.

2) Déterminer selon la valeur de $r \geq 0$ l'intérieur $\overset{\circ}{A_r}$.

3) Faire la même chose pour l'adhérence $\bar{A}_r$. A quelle condition sur $r \geq 0$, la partie A_r est-elle compacte ?

4) Déterminer en fonction de r le diamètre $\delta(r) = \sup_{x,y \in A_r} |x - y|$.

5) A quelle condition sur $r \geq 0$, la partie A_r est-elle connexe par arc ?

Exercice 2. [4 points] On note l^∞ l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles et bornées que l'on munit de la norme $|| \cdot ||_\infty$ définie par $||(u_n)||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

1) Montrer que $|| \cdot ||_\infty$ est une norme sur l^∞.

2) On considère l'application

$$f : l^\infty \to l^\infty, \quad (u_n) \mapsto (v_n), \quad \text{où} \quad v_n = u_{n+1} - u_n\,.$$

Montrer que f est une application linéaire continue. Calculer la norme $|||f|||$.

Exercice 3. [6 points] Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, et soient A et B deux fermés non vides de E, tels que

$$A \cap B \text{ et } A \cup B \text{ sont connexes par arc.}$$

On se propose de montrer qu'alors A est connexe par arc (et de la même manière B est connexe par arc).

1) Pourquoi $A \cap B$ est-il non vide ?

On choisit pour la suite un point $b \in A \cap B$.

2) Soit $a \in A$ et $\gamma : [0, 1] \to A \cup B$ un arc continu d'origine $\gamma(0) = a$ et d'extrémité $\gamma(1) = b$.

- **a)** Pourquoi un tel arc existe-t-il ?
- **b)** Soit $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] | \gamma([0, t]) \subset A\}$. Montrer que $\gamma(t_0) \in A \cap B$.
- **c)** En conclure que A est connexe par arc.

3) Montrer que si l'on suppose seulement que $A \cap B$ et $A \cup B$ sont connexes alors A est connexe (et de la même manière B est connexe).

L3B – Topologie **Corrigé du contrôle continu du 13 décembre 2013**

Questions de cours Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

1) Une partie A de E est compacte si et seulement si de toute suite (a_n) d'éléments de A on peut extraire une suite convergente c'est-à-dire : il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(a_{\varphi(n)})$ converge.
La compacité est aussi équivalente à la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement ouvert $O_i, i \in I$ (i.e. les $O_i \subset E$ sont ouverts et $A \subset \cup_{i\in I} O_i$) on peut extraire un sous-recouvrement fini (i.e. il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $A \subset \cup_{i\in J} O_i$).

2) Une partie compacte K de E est fermée : en effet, soit (a_n) une suite de K convergeant vers $l \in E$. Puisque K est compacte, on peut extraire une suite $(a_{\varphi(n)})$ ($\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) convergeant vers $a \in K$. Mais toutes les sous-suites de la suite convergente (a_n) convergent vers la limite l de (a_n), donc (a_n) converge vers $a \in K$ et donc K est fermée.

Une partie compacte K de E est bornée : prenons le recouvrement ouvert $B(k, 1), k \in K$ (les boules ouvertes de rayon 1 centrées en les différents points de K). La propriété de Borel-Lebesgue appliquée à la partie compacte K nous dit qu'il existe un sous-ensemble fini $J \subset K$ tel que $K \subset \cup_{k\in J} B(k, 1)$ qui est borné comme réunion finie d'ensembles bornés (de manière explicite $\forall x \in K,\ ||x|| \leq \max_{k\in J}(||k|| + 1)$).

3) Si A et B sont deux compacts de E, montrons que $A \cup B$ est un compact. Soit $O_i, i \in I$ un recouvrement ouvert i.e. $A \cup B \subset \cup_{i\in I} O_i$ et les O_i sont ouverts. Comme A et B sont compacts, il existe $I_1 \subset I$ et $I_2 \subset I$ finis tels que $A \subset \cup_{i\in I_1} O_i$ et $B \subset \cup_{i\in I_2} O_i$. Donc l'ensemble fini $J = I_1 \cup I_2 \subset I$ est tel que $A \cup B \subset \cup_{i\in J} O_i$. De tout recouvrement ouvert de $A \cup B$ on peut extraire un sous-recouvrement fini : $A \cup B$ est bien compact.

4) Dans $(\mathbb{R}^3, ||.||)$,espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées. On a $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ||v|| = 1\} = f^{-1}(\{1\})$ où $f(v) = ||v||$ est la norme euclidienne. Comme f est continue, S^2 est fermée comme image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par f. De plus $S^2 \subset \bar{B}(0, 1)$ est bornée, donc S^2 est compacte.

La sphère unité privée du pôle nord $S^2 \setminus \{N\}$ (où $N = (0, 0, 1)$) n'est pas fermée car, par exemple, la suite $v_n = (\sin(1/n), 0, (\cos(1/n)) \in S^2 \setminus \{N\}$ converge vers $N = (0, 0, 1) \notin S^2 \setminus \{N\}$. Donc $S^2 \setminus \{N\}$ n'est pas compacte.

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{C}, |.|)$: le plan complexe $\mathbb{C}$ muni du module $|z|$.

Pour $r \geq 0$, on définit la partie $A_r \subset \mathbb{C}$ par $A_r = B(-1, r) \cup \bar{B}(1, 2r)$
(A_r est donc la réunion de la boule ouverte $B(-1, r)$ et de la boule fermée $\bar{B}(1, 2r)$).

1)

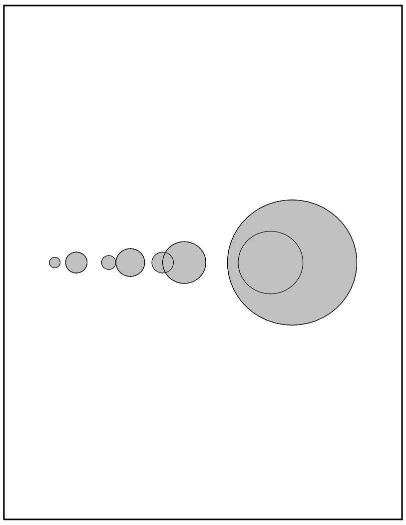

FIGURE 1 – Les parties A_r pour $r = 1/2, 2/3, 1$ et 3.

2) Pour tout $r \geq 0$ l'intérieur $\overset{\circ}{A_r} = B(-1, r) \cup B(1, 2r)$. En effet, on a toujours que l'intérieur d'une réunion de deux ensembles contient la réunion des intérieurs et on vérifie sans difficulté que pour un point z du cercle $\partial\bar{B}(1, 2r)$ il n'y a aucune boule ouverte $B(z, \varepsilon)$ centrée en ce point incluse dans A_r.

3) De manière générale l'adhérence d'une réunion de deux ensembles est la réunion des adhérences de ces ensembles. Donc pour tout $r \geq 0$ l'adhérence $\bar{A}_r = \bar{B}(-1, r) \cup \bar{B}(1, 2r)$.

Dans $(\mathbb{C}, |.|)$ la partie bornée A_r (union de deux bornés) est compacte ssi elle est fermée c'est à dire si
$\bar{A}_r = \bar{B}(-1, r) \cup \bar{B}(1, 2r) = B(-1, r) \cup \bar{B}(1, 2r)$ ce qui revient à
$\bar{B}(-1, r) \subset B(-1, r) \cup \bar{B}(1, 2r)$ ou encore à $\partial B(-1, r) \subset \bar{B}(1, 2r)$. Ceci revient encore à $-1 - r \geq 1 - 2r \iff r \geq 2$.

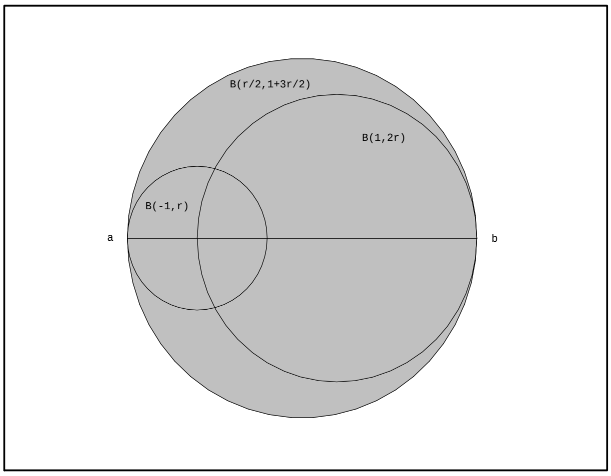

FIGURE 2 – Détermination du diamètre de A_r.

4) Montrons que $\delta(r) = \sup_{x,y\in A_r} |x-y| = 4r,$ si $r \geq 2,$ et $2+3r,$ si $r \leq 2$.

a) $\delta(r) = \mathrm{diam} A_r = \mathrm{diam} \bar{A}_r$.

Il est clair déjà que $\mathrm{diam} A_r \leq \mathrm{diam} \bar{A}_r$ ($A_r \subset \bar{A}_r$). D'autre part, il existe $a, b \in \bar{A}_r$ tels que $\mathrm{diam} \bar{A}_r = |a-b|$ puisque $\bar{A}_r$ est fermé et borné donc compact dans $(\mathbb{C}, |.|)$ et $(x,y) \to |x-y|$ est continue. En choisissant deux suites a_n et b_n de A_r convergeant vers a et b, on obtient $\mathrm{diam} A_r \geq |a_n - b_n| \to |a-b| = \mathrm{diam} \bar{A}_r$ d'où l'autre inégalité : $\mathrm{diam} A_r \geq \mathrm{diam} \bar{A}_r$.

b) Si $r \geq 2$ c'est-à-dire $\bar{B}(-1,r) \subset \bar{B}(1,2r)$ alors $\bar{A}_r = \bar{B}(1,2r)$ et donc $\mathrm{diam} \bar{A}_r = 4r$.

c) Si $r \leq 2$ considérons les points $a = -1-r$ et $b = 1+2r$. On a $\bar{A}_r = \bar{B}(-1,r) \cup \bar{B}(1,2r) \subset \bar{B}(r/2, 1+3r/2)$ la boule de diamètre ab (comme le montre la figure et que l'on peut vérifier grâce à l'inégalité triangulaire). Comme a et b appartiennent à $\bar{A}_r$, ceci montre que ab est aussi un diamètre de $\bar{A}_r$ et donc dans ce cas $\mathrm{diam} \bar{A}_r = 2+3r$.

5) Considérons les deux demi plans ouverts disjoints
$H^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x < -1/3\}$ et $H^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x > 1/3\}$.

Il est facile de voir que si $r < 2/3,$ $B(-1,r) \subset H^-$ et $B(1,2r) \subset H^+$ donc A_r partagé en deux ouverts non vides n'est pas connexe et donc n'est pas connexe par arc. Sauf si $r = 0$ cas où $B(-1,r) = \emptyset$ et $A_0 = \{1\}$.

Par contre si $r \geq 2/3$ on constate que A_r contient le segment $S = [-1,1]$ joignant les centres des boules $B(-1,r)$ et $\bar{B}(1,2r)$ donc $A_r = (\bar{B}(-1,r) \cup S) \cup \bar{B}(1,2r)$ est connexe par arc donc connexe en appliquant deux fois la proposition du cours : deux connexes par arc d'intersection non vide ont une réunion connexe par arc (une boule est connexe par arc parce que convexe).

Exercice 2. On considère l'application $f : l^\infty \to l^\infty, \quad (u_n) \mapsto (v_n), \quad$ où $\quad v_n = u_{n+1} - u_n$.

f est clairement linéaire et $||f((u_n))||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(|u_{n+1}| + |u_n|) \leq 2||(u_n)||_\infty$ donc f est continue et $|||f||| \leq 2$. De plus pour la suite $u_n = (-1)^n$, on a $v_n = 2(-1)^{n+1}$ et donc dans ce cas $||(u_n)||_\infty = 1$ et $||f((u_n))||_\infty = 2$ d'où $|||f||| = 2$.

Exercice 3. Soient A et B deux fermés $\neq \emptyset$ tels que $A \cap B$ et $A \cup B$ sont connexes par arc.

1) Si $A \cap B$ était vide, $A \cup B$ serait réunion disjointes des deux fermés non vides A et B et donc $A \cup B$ ne serait pas connexe donc ne serait pas connexe par arc.

On choisit pour la suite un point $b \in A \cap B$.

2) a) Soit $a \in A$, comme $A \cup B$ est connexe par arc, il existe $\gamma : [0,1] \to A \cup B$ un arc continu d'origine $\gamma(0) = a$ et d'extrémité $\gamma(1) = b$.

2) b) Soit $t_0 = \sup\{t \in [0,1] | \gamma([0,t]) \subset A\}$. Par définition du sup, il existe une suite τ_n telle que $\gamma([0,\tau_n]) \subset A$ et $\lim \tau_n = t_0$. Par continuité de γ, on a $\lim \gamma(\tau_n) = \gamma(t_0)$ et comme A est fermé, $\gamma(t_0) \in A$.

Reste à montrer que $\gamma(t_0) \in B$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $\gamma(t_0) \in B^c$ ouvert et donc par continuité de γ en t_0, on aurait pour un certain $\varepsilon > 0,$ $\gamma(t) \in B^c$ et donc $\gamma(t) \in A$ (car $\gamma(t) \in A \cup B$) pour $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$. D'où $\gamma([0, t_0 + \varepsilon/2]) \subset A$ contredisant la définition de t_0.

2) c) Donc tout point $a \in A$ peut être relié par un arc à au moins un point $c \in A \cap B$ lequel peut être relié dans $A \cap B$ à b. Donc en tout, $a \in A$ peut être relié par un arc dans A à b. Deux points a, a' de A sont donc reliés dans A en reliant d'abord dans A le point a à b puis b à a'. Donc A est connexe par arc.

3) On suppose seulement que $A \cap B$ et $A \cup B$ sont connexes montrons qu'alors A est connexe (idem pour B).

Supposons que A ne soit pas connexe, alors il existe deux fermés non vides $F \subset A$ et $F' \subset A$ disjoints tels que $A = F \cup F'$. On a donc aussi $A \cap B = G \cup G'$ où les fermés $G = F \cap B$ et $G' = F' \cap B$ sont disjoints. Comme $A \cap B$ est connexe, $G = \emptyset$ ou $G' = \emptyset$. On peut supposer par exemple que $G = \emptyset$ et donc $G' = A \cap B$. Alors G ne rencontre pas B et donc on a en posant $H = F' \cup B$ que $A \cup B = F \cup H$ où F et H sont des fermés non vides disjoints, contredisant la connexité de $A \cup B$. Donc A est connexe.