Documents, Calculatrices, Téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Questions de cours [6 points]

1) Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application.

a) Écrire avec des quantificateurs que l'application f est continue en 0 (relativement aux normes indiquées).

b) Montrer que f est continue en 0 si et seulement si pour toute suite (u_n) de $(E, ||.||)$ convergeant vers 0 la suite $(f(u_n))$ de $(F, ||.||')$ converge vers $f(0)$ (critère séquentiel de continuité).

2) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

a) Que veut dire qu'une suite (u_n) de $(E, \|\cdot\|)$ est de Cauchy ?
b) Par définition, à quelle condition l'espace $(E, \|\cdot\|)$ est-il complet ?

On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est complet et on considère une suite (u_n) de $(E, \|\cdot\|)$.

c) Que veut dire que la série $\sum u_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$?
d) Montrer que si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge (on dit qu'il y a convergence normale) alors la série $\sum u_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$.

Exercice 1. [3 points]

1) A quelle condition sur le réel a la fonction

$$N_a(x, y) = \max(|x + y|, |x - ay|)$$

est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

2) Quand la condition est remplie, décrire la boule unité B_a de la norme N_a.

Exercice 2. [3 points] Soit (E, d) un espace métrique.

1) Montrer qu'on obtient une nouvelle distance δ sur E en posant $\delta(x, y) = \min(d(x, y), 1)$.

2) Montrer que les distances d et δ définissent les mêmes suites convergentes et les mêmes suites de Cauchy.

3) Pour $x \in E$ donné, comparer selon la valeur de $r \geq 0$ les boules de centre x et de rayon r notées respectivement $B(x, r)$ dans l'espace (E, d) et $B'(x, r)$ dans l'espace (E, δ).

Exercice 3. [6 points]

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une application.
On dit que f est k-lipschitzienne si elle vérifie la propriété

$$\forall x, y \in E \quad ||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y|| \quad (*)$$

où $k > 0$, est un nombre réel fixé.

1) Montrer que si f est k-lipschitzienne pour un certain $k > 0$, alors f est continue de $(E, ||.||)$ dans $(E, ||.||)$.

2) On suppose que f est linéaire. Montrer que f est k-lipschitzienne équivaut à

$$\sup_{||x||=1} ||f(x)|| \leq k.$$

3) On considère le cas particulier où $E = \mathbb{R}^2$ et $||(u, v)|| = \max(|u|, |v|)$. Soit l'application linéaire

$$f(u, v) = (u + v, u + 2v).$$

Montrer que f est k-lipschitzienne pour au moins un $k > 0$ que l'on précisera.

On considère maintenant le cas où l'espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ est *complet* et où k est un nombre fixé vérifiant $0 < k < 1$. Soit $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne.
Il s'agit de montrer ici que f possède un unique point fixe, c'est à dire qu'il y a un unique point $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = x_0$.

4) Montrer que si f a un point fixe, il est unique.

Soit la suite (v_n) de E définie par $v_0 = v \in E$ donné et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose $u_n = v_{n+1} - v_n$.

5) Après avoir majoré $||u_{n+1}||$ à l'aide de $||u_n||$, montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement.

6) En déduire que la suite (v_n) converge dans $(E, ||.||)$ et conclure.

Exercice 4. [3 points]

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, \pi/2]$ par $v_n(x) = (-1)^n (\sin x) \cos^n x$.
On pourra noter $u_n = |v_n| = (\sin x) \cos^n x$ sur $[0, \pi/2]$.
1) La suite v_n converge-t-elle simplement ? uniformément ?
2) Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement.
Que vaut pour $x \in [0, \pi/2]$ la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$?
3) Est-ce que $\sum v_n$ converge normalement ?
[on déterminera précisément $||v_n||_\infty = \sup_{t\in[0,\pi/2]} |v_n(t)|$]
4) Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément.

— ◊ —

Questions de cours 1) Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application.

a) f est continue en $0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta$ tel que $\forall x,\ ||x|| < \eta,\ ||f(x) - f(0)||' < \varepsilon$.

b) *Critère séquentiel de continuité : Soit $x \in E$.*

f continue en $0 \iff$ pour toute suite x_n convergeant vers 0, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(0)$.

a) $\Rightarrow$ *b)* Soit une suite (x_n) convergeant vers 0. On a $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta$ tel que $\forall x,\ ||x|| < \eta,\ ||f(x) - f(0)||' < \varepsilon$ et pour ce $\eta > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N,\ ||x_n|| < \eta \Rightarrow ||f(x_n) - f(0)||' < \varepsilon$.

Au total, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N,\ ||f(x_n) - f(0)||' < \varepsilon$ et donc $f(x_n) \to f(0)$.

b) $\Rightarrow$ *a)* Supposons que f ne soit pas continue en 0, autrement dit : $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta$, $\exists x$ avec $||x|| < \eta$ et $||f(x) - f(0)||' \geq \varepsilon_0$.

La propriété énoncée permet pour chaque $n > 0$ (en prenant $\eta = 1/n$) de trouver un x_n tel que $||x_n|| < 1/n$ et $||f(x_n) - f(0)||' \geq \varepsilon_0$. Si f n'était pas continue en 0, on aurait donc une suite x_n convergeant vers 0 sans que la suite $f(x_n)$ converge vers $f(0)$.

2) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

a) Une suite (u_n) de $(E, \|\cdot\|)$ est de Cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n, m \geq N,\ ||u_n - u_m|| < \varepsilon$.

b) Par définition, l'espace $(E, \|\cdot\|)$ est complet si toute suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.

On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est complet et on considère une suite (u_n) de $(E, \|\cdot\|)$.

c) La série $\sum u_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ revient à dire que la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge.

d) Dire que la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge c'est dire que la suite de ses sommes partielles $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ converge donc est de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n, m \geq N,\ |S'_n - S'_m| < \varepsilon$.

On en tire que la suite (S_n) est aussi de Cauchy et donc converge dans $(E, \|\cdot\|)$ complet en observant que $||S_n - S_m|| = ||\sum_{k=n}^{k=m} u_k|| \leq \sum_{k=n}^{k=m} ||u_k|| = |S'_n - S'_m| < \varepsilon$.

Exercice 1 : 1) Un réel a étant donné, la fonction $N_a(x, y) = \max(|x + y|, |x - ay|)$ est clairement homogène et vérifie l'inégalité triangulaire comme maximum de valeurs absolues de deux formes linéaires. Reste à savoir à quelle condition sur a elle est définie positive. On a $N_a(x, y) = 0 \iff x + y = 0$ et $x - ay = 0 \iff y = -x$ et $(1 + a)x = 0$ qui est équivalent à $x = y = 0$ uniquement si $a \neq -1$. Donc N_a est une norme ssi $a \neq -1$.

2) Lorsque la condition $a \neq -1$ est remplie, on constate que la boule unité B_a est le domaine du plan bordé par les quatre droites d'équations $x + y = \pm 1$ et $x - ay = \pm 1$. Ce domaine est un domaine paralellogramme qui est un domaine carré si $a = 1$.

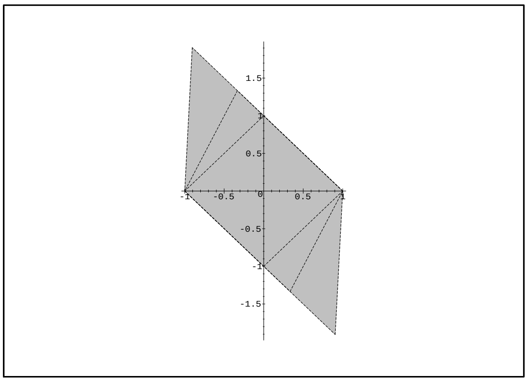

FIGURE 1 – Les boules B_0 et $B_{1/2}$ et B_1

Exercice 2 : 1) $\delta(x, y) = \min(d(x, y), 1)$ est une nouvelle distance. En effet :

a) $\delta \geq 0$ et $\delta(x, y) = \min(d(x, y), 1) = \min(d(y, x), 1) = \delta(y, x)$ (symétrie)
b) $\delta(x, y) = \min(d(x, y), 1) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$ car d est une distance.
c) Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire : soient $x, y, z \in E$.
Si $d(x, y) \geq 1$ ou $d(y, z) \geq 1$, on a $\delta(x, y) = 1$ ou $\delta(y, z) = 1$ et donc $\delta(x, z) = \min(d(x, z), 1) \leq 1 \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$.
Dans le cas contraire où $d(x, y) < 1$ et $d(y, z) < 1$, on a $\delta(x, y) = d(x, y)$ et $\delta(y, z) = d(y, z)$ et donc
$\delta(x, z) =\leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \delta(x, y) + \delta(y, z)$.
Dans tous les cas, $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$.
Donc δ est bien une distance.

2) Dire que $u_n \to \ell$ dans (E, d) c'est dire que $\forall \varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon \leq 1$ $\exists N$ tel que $\forall n \geq N, d(u_n, \ell) < \varepsilon$ mais comme

$d(u_n,\ell) < \varepsilon \le 1$, on a $\delta(u_n,\ell) = d(u_n,\ell) < \varepsilon$. Donc $u_n \to \ell$ aussi dans (E,δ).

Dire que u_n dans (E,d) est de Cauchy, c'est dire que $\forall\varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon \le 1$ $\exists N$ tel que $\forall n,m \ge N, d(u_n,u_m) < \varepsilon$ mais comme $d(u_n,u_m) < \varepsilon \le 1$, on a $\delta(u_n,u_m) = d(u_n,u_m) < \varepsilon$. Donc u_n est aussi de Cauchy dans (E,δ).

3) Pour $x \in E$ donné, comparer selon la valeur de $r \ge 0$ les boules de centre x et de rayon r notées respectivement $B(x,r)$ dans l'espace (E,d) et $B'(x,r)$ dans l'espace (E,δ).

Si $r \le 1$ on a $\delta(x,y) < r \iff d(x,y) < r$ donc $B(x,r) = B'(x,r)$.

Si $r > 1$ on a pour tout $y \in E$ $\delta(x,y) \le 1 < r$ donc $B'(x,r) = E$ qui contient $B(x,r)$.

Exercice 3 : Soient $(E,||.||)$ un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une application. On dit que f est k-lipschitzienne si elle vérifie la propriété $\forall x,y \in E \quad ||f(x)-f(y)|| \le k||x-y|| \quad (*)$ où $k > 0$ est fixé.

1) Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\forall x,y$ $||x-y|| < \dfrac{\varepsilon}{k}$, $||f(x)-f(y)|| \le k||x-y|| < \varepsilon$. Donc f est uniformément continue (donc continue) de $(E,||.||)$ dans $(E,||.||)$.

2) En général, en supposant juste que $f(0) = 0$ (sans supposer que f est linéaire) on a : si f est k-lipschitzienne alors $\forall x \in E \quad ||f(x)-f(0)|| = ||f(x)|| \le k||x||$ donc $\sup_{||x||=1} ||f(x)|| \le k$.

Réciproquement, si f est linéaire et $\sup_{||x||=1} ||f(x)|| \le k$ on a : $\forall x,y$ avec $||x-y|| \ne 0$ on a $\left\| f\Big(\dfrac{x-y}{||x-y||}\Big)\right\| \le k$ soit par la linéarité $\dfrac{1}{||x-y||}||f(x-y)|| \le k$ d'où, toujours par la linéarité, $||f(x-y)|| = ||f(x)-f(y)|| \le k||x-y||$. Donc f est k-lipschitzienne.

Si f est linéaire, f est k-lipschitzienne équivaut bien à $\sup_{||x||=1} ||f(x)|| \le k$.

3) Cas particulier où $E = \mathbb{R}^2$ avec $||(u,v)|| = \max(|u|,|v|)$ et $f(u,v) = (u+v, u+2v)$.

On remarque que f est linéaire et on a $||f(u,v)|| = \max(|u+v|, |u+2v|) \le \max(|u|+|v|, |u|+2|v|) \le |u|+2|v| \le 3\max(|u|,|v|)$, d'après 2), f est k-lipschitzienne pour $k = 3$.

On considère maintenant le cas où l'espace vectoriel normé $(E,||.||)$ est *complet* et où k est un nombre fixé vérifiant $0 < k < 1$. Soit $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne. Il s'agit de montrer ici que f possède un unique point fixe, c'est à dire qu'il y a un unique point $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = x_0$.

4) Soit x et y deux points fixes, alors $||f(x)-f(y)|| = ||x-y|| \le k||x-y||$ qui avec $k < 1$ ne peut avoir lieu que si $||x-y|| = 0$. Donc si f a un point fixe, il est unique.

Soit la suite (v_n) de E définie par $v_0 = v \in E$ donné et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose $u_n = v_{n+1} - v_n$.

5) On a $||u_{n+1}|| = ||v_{n+2}-v_{n+1}|| = ||f(v_{n+1})-f(v_n)|| \le k||v_{n+1}-v_n|| = k||u_n||$, donc en réitérant $||u_n|| \le k^n||u_0||$. La série $\sum ||u_n||$ a son terme général positif majoré par une suite géométrique de raison $k < 1$, elle est donc convergente. La série $\sum u_n$ converge donc normalement ce qui implique qu'elle converge (QC2-d).

6) Dire que la série $\sum u_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ revient à dire que la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \cdots + v_{n+1} - v_n = v_{n+1} - v_0$ converge (QC1). Ceci revient encore à ce que la suite (v_n) converge dans $(E,||.||)$. Appelons ℓ sa limite. Comme f est continue, la suite $f(v_n)$ converge vers $f(\ell)$. Mais comme $f(v_n) = v_{n+1}$ converge vers ℓ, par unicité de la limite on a $f(\ell) = \ell$ et donc ℓ est un point fixe qui est unique d'après 4).

Exercice 4 : Soit $(v_n)_{n\ge1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,\pi/2]$ par $v_n(x) = (-1)^n(\sin x)\cos^n x$. Notons $u_n = |v_n| = (\sin x)\cos^n x$ sur $[0,\pi/2]$.

1) On a $u_n'(x) = \cos^{n+1} x - (n\cos^{n-1} x)(\sin^2 x) = ((1+n)\cos^2 x - n)\cos^{n-1} x$ qui change de signe quand $\cos^2 x = \dfrac{n}{1+n}$. On tire de ceci $||u_n||_\infty = \displaystyle\sup_{t\in[0,\pi/2]} |u_n(t)| = \Big(\frac{n}{1+n}\Big)^{n/2}\Big(\frac{1}{1+n}\Big)^{1/2} \le \Big(\frac{1}{1+n}\Big)^{1/2} \to 0$ quand $n \to 0$.

Donc la suite $u_n = |v_n|$ converge uniformément (donc simplement) vers 0. Il en est d emême de la suite (v_n).

2) On reconnait en $v_n(x)$ une suite géométrique de premier terme $-\sin x\cos x$ et de raison $-\cos x$. Donc on a $\sigma(x) = \sum_{n=1}^\infty v_n(x) = 0$ si $x = 0$ et $\sigma(x) = -\dfrac{\sin x\cos x}{1+\cos x}$ si $x \ne 0$.

3) La série $\sum v_n$ ne converge pas normalement car

$||v_n||_\infty = ||u_n||_\infty = \Big(\dfrac{n}{1+n}\Big)^{n/2}\Big(\dfrac{1}{1+n}\Big)^{1/2} \sim \dfrac{e^{-1/2}}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente.

4) On a $\sigma_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^n v_k(x) = -\frac{\sin x\cos x(1-(-1)^n\cos^n x)}{1+\cos x}$ et donc $\sigma(x) - \sigma_n(x) = -\dfrac{\sin x\cos x}{1+\cos x}(-1)^n\cos^n x$ d'où $||R_n||_\infty = ||\sigma - \sigma_n||_\infty \le ||u_{n+1}||_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$. La série $\sum v_n$ converge uniformément sur $[0,\pi/2]$.
La convergence simple de $\sum v_n$ et l'inégalité $||R_n||_\infty \le ||u_{n+1}||_\infty$ découle aussi du critère des séries alternées.