Documents, Calculatrices, Téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Questions de cours ou exercices de TD [10 points]

1) Soit (u_n) une suite d'entiers. Montrer que

(u_n) converge $\iff$ (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

2) a) Énoncer la propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

b) Énoncer la propriété des suites croissantes de réels.

c) Démontrer l'équivalence de ces deux propriétés.

3) Soit (u_n) une suite réelle bornée.

a) Rappeler la définition de la limite inférieure $\underline{\lim}(u_n)$ et de la limite supérieure $\overline{\lim}(u_n)$.

b) Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\underline{\lim}(u_n) = \overline{\lim}(u_n)$.

c) Montrer que $\overline{\lim}(u_n)$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite (u_n).

d) Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass. Dire pourquoi il est une conséquence de c).

Exercice 1. [5 points]

Soit $x \in [0, 1[$ fixé, on note $0, a_1\, a_2 \cdots a_k \cdots$ l'écriture décimale propre de x.

On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par

$$u_n = 0, a_n\, a_{n+1} \cdots a_{k+n-1} \cdots$$

Autrement dit, le développement décimal de u_n s'obtient en gommant les $n-1$ premiers chiffres de x après la virgule. On peut aussi définir u_n comme la partie fractionnaire de $10^{n-1}x$.

a) Donner un exemple de nombre x pour lequel la suite (u_n) est convergente. Quelle est alors la limite u dans l'exemple donné ?

On suppose maintenant que x est tel que la suite (u_n) associée est convergente de limite u.

b) Etablir une expression de u_n à l'aide de a_n et u_{n+1}. En déduire que la suite (a_n) converge.

c) En déduire une caractérisation des nombres $x \in [0, 1[$ pour lesquels la suite (u_n) est convergente et les limites u possibles.

Exercice 2. [7 points]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. L'objet de cet exercice est de montrer que l'ensemble D des points de discontinuité de f est fini ou dénombrable.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.

a) En considérant la suite $u_n = f(a - 1/n)$, montrer que $f(a^-) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existe et $f(a^-) \leq f(a)$.

b) Comment montrerait-on de même que $f(a^+) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe et $f(a^+) \geq f(a)$?

c) Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en a ?

2) Soit un intervalle ouvert $]a, b[$ avec $a < b$.

a) Montrer que

$$f(a^+) = \inf(f(]a, b[)) \text{ et } f(b^-) = \sup(f(]a, b[)).$$

b) On suppose que f n'est continue ni en a ni en b. Montrer que

$$f(a^-) < f(a^+) \leq f(b^-) < f(b^+)$$

Soit $D \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des points de discontinuité de f.

3) a) Construire une application $g : D \to \mathbb{Q}$ telle que $g(x) \in]f(x^-), f(x^+)[$.

b) Déduire de 2)b) que g est injective. Conclure.

— ◇ —

L3B – Topologie **Corrigé du Contrôle continu du 9 octobre 2014** **1h30**

Questions de cours ou exercices de TD

1) Il est clair que toute suite réelle (u_n) constante à partir d'un certain rang est convergente.
Reste à montrer que si (u_n) une suite d'entiers converge alors elle est constante à partir d'un certain rang. En effet, si (u_n) converge alors $u_{n+1} - u_n$ converge vers 0, ce qui implique en particulier pour $\varepsilon = 1$ qu'il existe un rang N tel que $\forall n \geq N$ on ait $|u_{n+1} - u_n| < 1 \iff u_{n+1} = u_n$ puisque $u_{n+1} - u_n$ est entier. Donc u_n est constante à partir du rang N.

2) a) Propriété de la borne supérieure : toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majorée a une borne supérieure.

b) Propriété des suites croissantes de réels : toute suite réelle (u_n) croissante et majorée est convergente.

c) Équivalence de ces deux propriétés : a) $\Rightarrow$ b) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée, la borne supérieure $\ell = \sup u_n$ existe par i), ℓ est donc un majorant qui peut-être approché aussi près que l'on veut par les u_n, c'est-à-dire $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_0$ tel que $\ell - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq \ell$. La croissance de la suite donne alors pour tout $n \geq n_0$, $\ell - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq \ell$ ce qui prouve que u_n converge vers ℓ.

b) $\Rightarrow$ a) : Soit un ensemble $A \neq \emptyset$ majoré, appelons $\mathcal{M}$ l'ensemble de ses majorants. On a $\forall\varepsilon > 0, \exists a \in A$ et $m \in \mathcal{M}$ tels que $m - \varepsilon < a \leq m$ car sinon on aurait un $\varepsilon_0 > 0$ avec la propriété $m \in \mathcal{M} \Rightarrow m - \varepsilon_0 \in \mathcal{M}$ d'où une suite de majorants tendant vers $-\infty$ ce qui contredirait le fait que $\mathcal{M}$ est minoré par un quelconque élément de A.

Il est alors facile de construire une suite de $a_n \in A$ et une suite décroissante de $m_n \in \mathcal{M}$ telles que $0 \leq m_n - a_n < 1/n$. La suite décroissante minorée m_n converge d'après ii) vers $m \in \mathcal{M}$ et donc m est un majorant limite d'une suite $a_n \in A$ ce qui montre que $m = \sup A$.

3) Soit (u_n) une suite réelle bornée.

a) On peut donc bien définir les suites $v_n = \sup_{k\geq n} u_k$ et $w_n = \inf_{k\geq n} u_k$. La suite v_n est décroissante minorée et la suite w_n est croissante majorée. Elles sont donc convergentes. La limite $\lim v_n$ (resp. $\lim w_n$) est appelée *limite supérieure* (resp. *inférieure*) de la suite u_n et notée $\overline{\lim}(u_n)$ (resp. $\underline{\lim}(u_n)$).

b) i) $\underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n \iff$ ii) u_n est convergente et $\lim u_n = \underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$.

i) $\Rightarrow$ ii) : on a l'encadrement $w_n = \inf_{k\geq n} u_k \leq u_n \leq \sup_{k\geq n} u_k = v_n$ et les suites v_n et w_n ont une limite commune $\ell = \liminf u_n = \limsup u_n$ donc u_n converge aussi vers ℓ.

ii) $\Rightarrow$ i) : la suite u_n converge vers ℓ càd $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$ qui entraine trivialement $\ell - \varepsilon < v_n < \ell + \varepsilon$ et $\ell - \varepsilon < w_n < \ell + \varepsilon$ c.à.d $\lim v_n = \lim w_n = \ell$.

c) Considérons de nouveau la suite $v_n = \sup_{k\geq n} u_k$ qui converge vers $\limsup u_n$. Par définition de la borne supérieure $v_n = \sup_{k\geq n} u_k$ il existe un entier noté $\varphi(n) \geq n$ tel que $v_n - 1/n < u_{\varphi(n)} \leq v_n$ ce qui donne une suite $u_{\varphi(n)}$ extraite ayant pour limite $\overline{\lim}\, u_n$. Donc $\overline{\lim}\, u_n$ est une valeur d'adhérence. Montrons que c'est la plus grande, en effet soit a une valeur d'adhérence, par définition, c'est la limite d'une suite extraite $u_{\psi(n)}$ convergente. On a donc $u_{\psi(n)} \leq v_{\psi(n)}$ et en passant à la limite $a \leq \overline{\lim}\, u_n$.

d) Théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence. Ce théorème est une conéquence de c) qui assure que pour une suite réelle (u_n) bornée, $\overline{\lim}(u_n)$ par exemple est une valeur d'adhérence (la plus grande).

Exercice 1. Soit $x \in [0,1[$ fixé, on note $0, a_1\, a_2 \cdots a_k \cdots$ l'écriture décimale propre de x.
On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = 0, a_n\, a_{n+1} \cdots a_{k+n-1} \cdots$

a) Exemple : si $x = 0,123411111...111...$ on a $u_n = 0,1111...$ $\forall n \geq 5$ donc (u_n) converge vers $u = 0,11111... = 1/9$.

On suppose maintenant que x est tel que la suite (u_n) associée est convergente de limite u.

b) On a $u_n = \dfrac{a_n}{10} + \dfrac{u_{n+1}}{10} \iff a_n = 10u_n - u_{n+1}$ donc la suite (a_n) converge vers $9u$.

c) Donc si la suite (u_n) est converge vers u, la suite (a_n) converge vers $9u$ et comme les a_n sont entiers, la suite a_n est un entier constant c entre 0 et 8 valant $9u$ à partir d'un certain rang (QC1).
Les x pour lesquels la suite u_n converge sont donc les nombres de la forme
$x = 0, a_1\, a_2 \cdots a_N\, c\,c\,c \cdots c\,c\,c \cdots = \dfrac{a_1\, a_2 \cdots a_N}{10^N} + u$ avec c entier entre 0 et 8 et alors $u = c/9$.

Exercice 2.

1) a) Comme f est croissante, la suite $u_n = f(a-1/n)$ est croissante et majorée par $f(a)$ donc elle converge vers sa borne supérieure $\ell \leq f(a)$.

On a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N$, on a $\ell - \varepsilon < u_n \leq \ell \leq f(a)$. En posant $\eta = 1/N$, $\forall n > N$, on a $\forall x$, si $a - \eta < x < a$ alors $\exists n > N$ tel que $a - \eta < x \leq a - 1/n$ et donc

$$\ell - \varepsilon < u_N = f(a-\eta) \leq f(x) \leq f(a - 1/n) = u_n \leq \ell \leq f(a).$$

D'où la conclusion $f(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ existe et $f(a^-) \leq f(a)$.

b) On montrerait de manière analogue que $f(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe et $f(a^+) \geq f(a)$ en considérant la suite décroissante $v_n = f(a+1/n)$ minorée par $f(a)$.

c) On a donc $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$ donc f continue en a équivaut à $f(a^-) = f(a^+)$.

2) Soit un intervalle ouvert $]a,b[$ avec $a < b$.

a) La partie $f(]a,b[)$ de $\mathbb{R}$ est minorée par $f(a)$, elle a donc une borne inférieure, $\ell = \inf(f(]a,b[)) \geq f(a)$. Soit ε un réel positif fixé. Par définition de la borne inférieure, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\ell \leq f(c) \leq \ell + \varepsilon$. Mais puisque f est croissante, $a < x \leq c \Longrightarrow \ell \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$. Donc $\ell = f(a^+)$ la limite à droite en a.

De manière analogue on montre que $f(b^-) = \sup(f(]a,b[)) \leq f(b)$.

b) Si f n'est continue ni en a ni en b on a donc

$$f(a^-) < f(a^+) = \inf(f(]a,b[)) \leq \sup(f(]a,b[)) = f(b^-) < f(b^+).$$

Soit $D \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des points de discontinuité de f.

3) a) Pour tout $x \in D$, l'intervalle non vide $]f(x^-), f(x^+)[$ contient un rationnel (densité dans $\mathbb{R}$ des rationnels). Choisissons en un noté $g(x)$. On a ainsi construit $g : D \to \mathbb{Q}$ telle que $g(x) \in\,]f(x^-), f(x^+)[$.

b) D'après 2)b) si $a < b$, on a $f(a^-) < g(a) < f(a^+) \leq f(b^-) < g(b) < f(b^+)$ donc g est injective. Par conséquent, D est en bijection par g avec $g(D) \subset \mathbb{Q}$ dénombrable donc D est fini ou dénombrable.