Documents, Calculatrices, Téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Questions de cours [6 points]

1) Soit (u_n) une suite de réels. Montrer :

(u_n) converge $\iff$ i) (u_n) est bornée et ii) (u_n) a une seule valeur d'adhérence.

2) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

3) Démontrer ce théorème par dichotomie.

Exercice 1. [4 points]

Pour un $x \in [0,1[$, on note $0,a_1 \cdots a_n \cdots$ l'écriture décimale propre de x.
Soit $A = \{x \in [0,1[\mid \forall n, \exists\, i,j \geq n \text{ avec } a_i \text{ pair et } a_j \text{ impair}\}$.
Autrement dit, A est l'ensemble des nombres $x \in [0,1[$ dont l'écriture décimale propre comporte à la fois une infinité de chiffres pairs et une infinité de chiffres impairs.

a) Déterminer $\inf A$ et $\sup A$. Est-ce que A a un plus petit élément ? un plus grand élément ?

b) Montrer que A est dense dans $[0,1]$.

Exercice 2. [4 points] Soit deux suites réelles (x_n), (y_n) positives et majorées.

1) Rappeler la définition de $\overline{\lim}\, x_n$ et de $\underline{\lim}\, x_n$.

2) Montrer qu'on a

$$\underline{\lim}\, x_n \,\overline{\lim}\, y_n \leq \overline{\lim}(x_n y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n \,\overline{\lim}\, y_n,$$

et donner un exemple où les deux inégalités sont strictes.

Exercice 3. [5 points] Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{n-e^x}{n+e^x}$.

a) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite (f_n).

b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite (f_n).

c) Qu'en déduit-on pour la suite $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$? (on ne calculera pas explicitement I_n)

Exercice 4. [6 points] Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

On considère $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable
(la dérivée $f'(a)$ étant la dérivée à droite en a et $f'(b)$ la dérivée à gauche en b).
On suppose pour simplifier que $f'(a) < f'(b)$.
Soit k tel que $f'(a) < k < f'(b)$ et la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - kx$.

1) Montrer que g admet un minimum en un $c \in]a,b[$.

2) En déduire qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = k$.

3) Quel résultat a-t'on montré pour la fonction dérivée f' ? (Théorème de Darboux)

Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in [a,b]$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_a^x h(t)dt$.
(on admet que la fonction continue h est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$)

4) Montrer que f est dérivable et a pour dérivée $f' = h$.

5) Ce qui précède permet de redémontrer un théorème du cours. Lequel ?

— ◇ —