L3B – Topologie **Contrôle continu du 5 octobre 2012** **1h30**

Documents, Calculatrices, Téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.

Question de cours [4 points]

1) Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

2) Utiliser ce théorème pour démontrer que toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue (théorème de Heine).

Exercice 1. [2 points]

Soit A le sous ensemble de $\mathbb{R}$ suivant $A = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]1 - \frac{1}{n}, 1] \right) \cup \left([2, \sqrt{11}] \cap \mathbb{Q} \right)$.

A possède-t-il une borne inférieure ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? un plus grand élément ?

Exercice 2. [5 points]

Soient deux réels $a < b$.

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim u_{2n} = a$ et $\lim u_{2n+1} = b$.

1) Donner un exemple d'une telle suite.

2) Déterminer l'ensemble U des valeurs d'adhérence de (u_n).

3) Déterminer $\underline{\lim}\, u_n$ et $\overline{\lim}\, u_n$.

4) Que peut-on dire de $\alpha = \inf u_n$ et $\beta = \sup u_n$?

Exercice 3. [5 points]

Soit f une fonction réelle définie pour $x \geq 0$ et la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = f(x+n) \quad \forall x \geq 0.$$

On suppose que la fonction f est *croissante* et *majorée*.

1) Montrer que $f(x)$ converge vers une limite l lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement.

3) Est-ce que la suite (f_n) converge uniformément ?

4) Que se passerait-il si la fonction f (et donc les fonctions f_n) étaient définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 4. [4 points]

Soit $h : [0,1] \to [0,1]$ une application continue injective. On suppose que $h(1) - h(0) > 0$.

1) Pour $t \in [0,1]$, que peut-on dire du signe de $h(t) - h(0)$?

2) A $t_0 \in [0,1]$ fixé et pour $s \in [0, t_0]$, que peut-on dire du signe de $h(t_0) - h(s)$?

3) En déduire que h est strictement croissante.

4) On suppose de plus que h est bijective et on note $g = h^{-1}$ son application réciproque. Montrer que g est continue.

— ◊ —

L3B – Topologie **Corrigé du Contrôle continu du 5 octobre 2012** **1h30**

Question de cours 1) Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite convergente.

2) Soit une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Dire que f n'est pas uniformément continue reviendrait à $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall n > 0$, $\exists x, y \in [0,1]$ tels que $|x - y| < 1/n$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. On pourrait donc pour chaque entier $n > 0$ choisir $x_n, y_n \in [0,1]$ tels que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. D'après Bolzano-Weierstrass, de la suite bornée x_n, on peut extraire une suite $x_{\varphi(n)}$ convergente. Appelons x sa limite. Puisque $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < 1/\varphi(n)$, la suite $y_{\varphi(n)}$ converge aussi vers x. Comme f est continue en x, la suite $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon > 0$ convergerait vers 0. Contradiction. Donc f est uniformément continue (théorème de Heine).

Exercice 1. $A = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]1 - \frac{1}{n}, 1]\right) \cup \left([2, \sqrt{11}] \cap \mathbb{Q}\right) = \{1\} \cup \left([2, \sqrt{11}] \cap \mathbb{Q}\right)$

On a $1 \in A$ minorant de A donc $\inf A = \min A = 1$ et $\sup A = \sqrt{11}$ car $\sqrt{11}$ est un majorant de A qui est limite d'une suite de rationnels $< \sqrt{11}$ (prendre par exemple la suite x_n des troncatures d'ordre n dans un développement décimal de $\sqrt{11}$). Comme $\sqrt{11} \notin \mathbb{Q}$, A n'a pas de plus grand élément.

Exercice 2. 1) Un exemple d'une telle suite : $u_n = (a+b)/2 + (-1)^n(a-b)/2$.

2) Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers a et b donc $\{a, b\} \subset U$.

Soit $l \in U$, il existe donc une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ convergeant vers l. Comme φ est strictement croissante, la suite $\varphi(n)$ prend une infinité de fois des valeurs d'une même parité. Soit $\psi(n)$ une suite strictement croissante d'indices pour lesquels $\varphi(\psi(n))$ est constamment pair ou constamment impair. Dans le premier cas, la suite extraite $u_{\varphi(\psi(n))}$ de $u_{\varphi(n)}$ converge vers a donc $l = a$, dans le deuxième la suite extraite $u_{\varphi(\psi(n))}$ de $u_{\varphi(n)}$ converge vers b donc $l = b$. On a montré que $U = \{a, b\}$

3) $\lim(u_{2n}) = a$ et $\lim(u_{2n+1}) = b$ implique

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N,\ a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$ si $n = 2k$ et $b - \varepsilon < u_n < b + \varepsilon$ si $n = 2k+1$.

et donc si $\frac{b-a}{2} > \varepsilon > 0$, on a $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ et donc $\exists N$ tel que $\forall n \geq N,\ a - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} u_k \leq a + \varepsilon$.

Ceci montre que $\underline{\lim}\, u_n = \lim \inf_{k \geq n} u_k = a$. On montrerait de même que $\overline{\lim}\, u_n = b$.

4) On a $\alpha = \inf u_n \leq \underline{\lim}\, u_n = a$ et $\beta = \sup u_n \geq \overline{\lim}\, u_n b$ mais il n'y a pas forcément égalité.

Exercice 3. 1) Soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de f, c'est-à-dire vérifiant $f(x) \leq M$ pour tout $x \geq 0$. La suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée par M. Comme f est croissante, la suite de réels $(f(n))$ est aussi croissante, elle converge donc vers une limite $l \leq M$.

Montrons que la fonction f converge aussi vers l lorsque x tend vers $+\infty$. Ecrivons pour cela la convergence de la suite croissante $(f(n))$ vers l : $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall n \geq N,\ l - \varepsilon < f(n) \leq l$ ce qui implique avec la croissance de f que $\forall x \geq N,\ l - \varepsilon < f(N) \leq f(x) \leq l$. au total

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tel que $\forall x \geq N,\ l - \varepsilon < f(x) \leq l \iff f(x)$ tend vers l quand x tend vers l'infini.

2)3) On a donc aussi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall x \geq 0,\ l - \varepsilon < f_n(x) = f(x+n) \leq l$ ce qui exprime que la suite (f_n) converge uniformément (donc simplement) vers la fonction constante égale à l.

4) La suite f_n convergerait toujours simplement vers l mais pas uniformément, à moins que f soit constante. Exemple : $f(x) = \arctan x$.

Exercice 4. 1) Par le théorème des valeurs intermédiaires, $h(t) - h(0)$ reste > 0 si $t > 0$, sinon la fonction continue $h(t) - h(0)$ s'annulerait en $t \neq 0$ et donc $h(0)$ serait atteint deux fois.

2) Par le même théorème, $h(t_0) - h(s)$ reste > 0 si $t_0 > s$, sinon la fonction continue $h(t_0) - h(s)$ s'annulerait en $s \neq t_0$ et donc $h(t_0)$ serait atteint deux fois.

3) On en déduit que pour tout couple s, t tel que $s < t$, on a $h(s) < h(t)$ c'est-à-dire h est strictement croissante.

4) Application du cours : une fonction continue strictement croissante a une réciproque continue.