Le Théorème du point fixe de **BROUWER**

Dunias Vincent
Tuteur : Yves Carrière

Année 2002-2003

1 Introduction.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) est un mathématicien Hollandais qui de 1909 à 1913 découvre la majeure partie des théorèmes auxquels son nom est rattaché. Pour beaucoup, Brouwer est le père de la topologie moderne. Après la guerre, il consacrera le reste de sa carrière aux mathématiques intuitionnistes, mathématiques niant la possibilité de déduire toutes les mathématiques de la seule logique et défendant le rôle de l'intuition pour éviter les antinomies que peuvent faire naître le développement de la science.

Nous nous intéresserons dans cet exposé à l'un de ses théorèmes :

Théorème du point fixe de Brouwer :

Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ *dans elle même admet un point fixe.*

2 Une démonstration du théorème.

Avant tout, on est amené à définir la notion suivante :

Définition 1. On appelle rétraction d'un espace topologique A sur un sous ensemble $B \subset A$ une application continue $r : A \longrightarrow B$ telle que

$$r_{|B} = id_B.$$

On verra dans la suite que la plupart des démonstrations se déroulent de la manière suivante. On commence par montrer le

Théorème 1. *Il n'y a pas de rétraction de la boule unité fermée B^n de $\mathbb{R}^n$ sur la sphère unité S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$.*

Puis on déduit le théorème du point fixe de la

Proposition 2. *Soit f une application continue de la boule unité fermée B^n de $\mathbb{R}^n$ dans elle même, ne possédant aucun point fixe, alors on peut construire une rétraction de B^n sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.*
De plus cette rétraction à même régularité que f.

Démonstration :

Supposons donc que

$$\forall\, x \in B^n, \quad f(x) \neq x.$$

On peut donc définir la demi droite d'extrémité $f(x)$:

$$\Delta_x = \{f(x) + \lambda(x - f(x)),\ \lambda \geq 0\}$$

alors Δ_x coupe S^{n-1} en un unique point qu'on notera $r(x)$, qui vérifie

$$r(x) = f(x) + \lambda_x(x - f(x)) \qquad \text{avec } \lambda_x \geq 0 \text{ et } \|r(x)\| = 1.$$

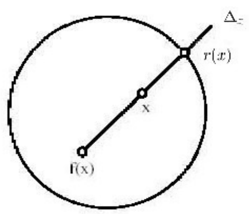
Donc λ_x est l'unique solution positive de l'équation :

$$\lambda^2 \|x - f(x)\|^2 + 2\lambda < f(x), x - f(x) > + \|f(x)\|^2 - 1 = 0.$$

Tout ceci nous donne une expression de $r(x)$:

$$r(x) = f(x) + \frac{\sqrt{p^2 + (1 - \|f(x)\|^2)} - p}{\|x - f(x)\|}(x - f(x)) \qquad \text{où } p = \frac{< f(x), x - f(x) >}{\|x - f(x)\|}.$$

$\square$



Démontrons à présent le théorème 1 par l'absurde. Soit donc r une rétraction de B^n sur S^{n-1}.

Définition 2. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une application définie sur A. Alors, on dit que f est une application $\mathcal{C}^1$ s'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant A et une application g de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathcal{O}$ telle que

$$g_{|F} = f.$$

Proposition 3. *S'il existe une rétraction de B^n sur S^{n-1} alors il en existe une de classe $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration :

D'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur B^n vers r. Soit l'application :

$$\begin{array}{llll} \varphi_m : & B^n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto (1 - \|x\|^m)P_m(x) + \|x\|^m x. \end{array}$$

On a pour tout $x \in B^n$

$$\|\varphi_m(x) - r(x)\| \leq (1-\|x\|^m) \|P_m(x) - r(x)\| + \|x\|^m \|x - r(x)\| .$$

Notons $\|.\|_\infty$ la norme uniforme sur B^n. Pour tout $\varepsilon \geq 0$ la continuité uniforme de r sur B^n implique l'existence de $\alpha \in [0, 1[$ tel que $\|x - r(x)\| \leq \varepsilon$ si $\|x\| \geq \alpha$ d'où :

$$\|\varphi_m - r\|_\infty \leq \|P_m - r\|_\infty + \varepsilon + 2 \|\alpha\|^m .$$

Par conséquent, φ_m converge uniformément vers r, donc $\|\varphi_m\|$ converge uniformément vers 1. Comme $\varphi_m(x) = x$ pour $x \in S^{n-1}$, pour m fixé assez grand, on pose

$$r(x) = \frac{\varphi_m(x)}{\|\varphi_m(x)\|}$$

qui définit une rétraction différentiable de B^n sur S^{n-1}.

□

À partir de maintenant on peut supposer que r est une rétraction différentiable de B^n sur S^{n-1}. Soit

$$\phi_t(x) = (1-t)x + tr(x) \qquad \forall\, t \in [0,1],\ \forall\, x \in B^n.$$

Propriété 4. *Pour t assez petit, ϕ_t est un difféomorphisme de B^n.*

Démonstration :

Posons $a = \frac{1}{1+\|\mathcal{D}r\|_\infty}$ où $\|\mathcal{D}r\|_\infty$ est la norme uniforme sur B^n de la différentielle de r. Soit $t \in [0, a[$, on a

1. Si $\phi_t(x) = \phi_t(y)$ alors
   $(1-t)\,\|x-y\| = t\,\|r(x) - r(y)\| \leq \|\mathcal{D}r\|_\infty\, t\,\|x-y\|$ (accroissements finis).
   Comme $t < a$ on a forcément $\|x-y\| = 0$. Donc ϕ_t est injective.
2. $\mathcal{D}\phi_t(x) = (1-t)(Id + \frac{t}{1-t}\mathcal{D}r(x))$ et
   $\|\frac{t}{1-t}\mathcal{D}r(x)\| \leq \frac{t}{1-t}\,\|\mathcal{D}r\|_\infty < 1$.
   Donc $\mathcal{D}\phi_t(x)$ est inversible pour tout $x \in B^n$.
3. D'après le théorème d'inversion locale ϕ_t est un difféomorphisme local, c'est donc une application ouverte, donc $\phi_t(B^n)$ est ouvert. De plus B^n est compact donc $\phi_t(B^n)$ est fermé. Il s'ensuit que $\phi_t(B^n) = B^n$ par connexité de B^n.

Il découle alors des trois points précédents que ϕ_t est un difféomorphisme.

□

Fin de la démonstration du théorème 2.2 :
Considérons

$$P(t) = \int_{B^n} det(\mathcal{D}\phi_t(x))dx.$$

- Par définition de ϕ_t, P est un polynôme en t.
- Pour $t \in [0, a[$, par le changement de variable $y = \phi_t(x)$ et en remarquant que $det(\mathcal{D}\phi_t(x)) > 0$, il s'ensuit

$$P(t) = Vol(B^n).$$

De ces deux points, il découle que P est un polynôme constant égal à $Vol(B^n)$. En particulier $P(1) > 0$.
D'autre part, r étant une application de B^n dans S^{n-1}, qui est une variété de dimension $n-1$, $\mathcal{D}r$ est forcément de rang inférieur à $n-1$. Donc $det(\mathcal{D}r(x)) = 0$, donc $P(1) = 0$. C'est absurde.

□

3 D'autres démonstrations.

3.1 Démonstration d'après J. Milnor [2] : corollaire de la sphère coiffée.

On admet le résultat classique suivant :

Théorème 5. *Pour n pair, la sphère unité S^{n-1} ne peut être coiffée : il n'existe pas sur S^{n-1} de champ de vecteurs continue, unitaire et tangent à S^{n-1}.*

Supposons le théorème de Brouwer faux. Il existe donc $f : B^n \to B^n$ continue telle que pour tout x dans B^n, $x \neq f(x)$. Donc on peut définir

$$w(x) = x - f(x)\frac{1 - x.x}{1 - x.f(x)} \quad (1)$$

qui peut s'écrire également :

$$w(x) = \frac{x - f(x)}{1 - x.f(x)} - \frac{x(x.f(x)) - f(x)(x.x)}{1 - x.f(x)} \quad (2)$$

Alors j'affirme que $w(x) \neq 0$.

En effet, si x et $f(x)$ sont indépendants, par (1), il est clair que

$$w(x) \neq 0.$$

Si x et $f(x)$ sont liés, alors

$$x(x.f(x)) - f(x)(x.x) = 0.$$

Donc d'après (2) $w(x) \neq 0$.

Remarque 1. si $x \in S^{n-1}$, $w(x) = x$ donc $w_{|S^{n-1}}$ est un champ de vecteurs unitaire et normal à S^{n-1}, orienté vers l'extérieur.

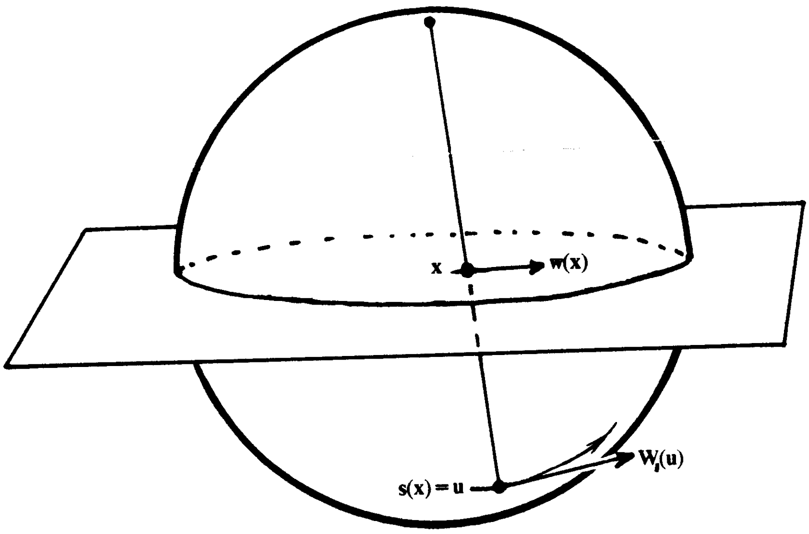
Plongeons à présent B^n dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Grâce à la projection stéréographique, on dispose d'un difféomorphisme s entre B^n et l'hémisphère sud de B^{n+1}. Alors

- $\mathcal{D}s$ transporte le champ de vecteur $w(x)$ en un champ de vecteurs sur l'hémisphère sud non nul, qui une fois divisé par sa norme, donne un champs unitaire, tangent à S^n et continu. On le note $W_1(x)$.
- comme la projection stéréographique conserve les angles, l'orientation, et laisse S^{n-1} identique, d'après la remarque 1, $W_{1|S^{n-1}}$ est un champ normal à S^{n-1}, orienté vers l'extérieur.

Grâce à ces deux points, il s'ensuit que $W_{1|S^{n-1}} = (0, ..., 0, 1)$.

De la même façon, on peut utiliser la projection stéréographique sur l'hémisphère nord, avec le champ de vecteurs $-w(x)$ (qui est donc unitaire normal orienté vers l'intérieur sur S^{n-1}) on obtient ainsi un champ de vecteurs non nul W_2 sur l'hémisphère nord, continu, tangent à la sphère, dont la restriction à S^{n-1} est aussi égale à $(0, ..., 0, 1)$.

En juxtaposant ces deux champs on obtient un champ de vecteur non nul, continu et tangent à la sphère S^n. Or, d'après le théorème 5, si n est pair, c'est impossible. Le théorème de Brouwer est donc démontré pour n pair.



Pour démontrer le théorème de Brouwer pour n impair, il suffit de considérer

$$\begin{array}{rccl} g: & B^{n+1} & \longrightarrow & B^{n+1} \\ & (x_1, ..., x_{n+1}) & \longmapsto & (f(x_1, ..., x_n), 0) \end{array}$$

et appliquer le théorème dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

□

3.2 Démonstration d'après J. Milnor [3] : corollaire du théorème de Sard.

En dimension n montrons par l'absurde qu'il n'y a pas de rétraction lisse de B^n dans S^{n-1}.

D'abord quelques résultats :

Définition 3. On dit qu'une partie $X \in \mathbb{R}^n$ est une *variété lisse* ou *différentiable* de dimension k si X est localement difféomorphe à la boule unité ouverte $\overset{\circ}{B^k}$ de $\mathbb{R}^k$. Un tel difféomorphisme est appelé *paramétrisation de X*.

Définition 4. On dit q'une partie $X \subset \mathbb{R}^n$ est une *variété à bord* de dimension k si X est localement difféomorphe à un ouvert de la demi boule unité ouverte $H^k : \{(x_1, ..., x_k) \in \overset{\circ}{B^k} \mid x_k \geq 0\}$. le *bord* de X noté ∂X est l'ensemble des points de x qui ont des coordonnées locales dans $\{x \in \overset{\circ}{B^n} \ \mid \ x_k = 0\}$.

Théorème 6. *Toute variété compacte, connexe, de dimension 1 à bord est difféomorphe à* $[0, 1]$ *ou au cercle unité* S^1.

Corollaire 7. *Le bord d'une variété compacte de dimension 1 contient un nombre pair de points.*

En effet toute variété compacte contient un nombre fini de composantes connexes.

Définition 5. Soient X une sous variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$, φ une paramétrisation de X et $x \in X$ alors l'ensemble $\mathcal{D}_x\varphi(\mathbb{R}^k)$ ne dépend pas de la paramétrisation choisie, on l'appelle *espace tangent* de X en x, et on le note $T_x(X)$.

Propriété 8. *Soient* $f : X \to Y$ *une application lisse entre deux variétés,* $x \in X$ *et* $y = f(x)$*, d'après la définition 2 il existe* F *une application lisse définit sur un ouvert contenant* X *tel que* $F_{|X} = f$ *alors, l'application* $\mathcal{D}_x F_{|T_x(X)}$ *ne dépend pas du choix de* F. *De plus* $\mathcal{D}_x F(T_x(X)) \subset T_y(Y)$.

On peut donc définir

Définition 6. Avec les notations précédentes, on appelle *différentielle en x de f*, noté $\mathcal{D}f_x$ l'application linéaire

$$\mathcal{D}_x F_{|T_x(X)} : T_x(X) \longrightarrow T_y(Y).$$

Définition 7. On dit que x est un *point régulier* de f si $\mathcal{D}f_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ est surjective. Un point $y \in Y$ vérifiant que pour tout x dans $f^{-1}(y)$ x est un point régulier est appelé *valeur régulière.*

Théorème 9. (théorème de l'image réciproque.) *Soit une application lisse de la variété à bord* X *dans la variété sans bord* Y. *Soit* y *une valeur régulière de* f*, alors* $Z = f^{-1}(\{y\})$ *est une sous variété à bord contenue dans* X*, de bord* $Z \cap \partial X$ *et on a*

$$dimZ = dimX - dimY.$$

Définition 8. Soient X une variété de dimension k et A une partie de X, on dit que A *est de mesure nulle dans* X si pour toute paramétrisation φ d'un ouvert V de X, l'ensemble $\varphi^{-1}(A \cap V)$ est de mesure nulle au sens de Lebesgue.

En fait, grâce au théorème de changement de variable, il suffit de le vérifier pour un système dénombrable de paramétrisations recouvrant X.

Théorème 10. (Sard) *Soient $f : X \to Y$ une application lisse entre deux variétés, $\mathcal{C}$ l'ensemble des points non réguliers, Alors l'ensemble $f(\mathcal{C})$ est de mesure nulle dans Y.*

$\longleftrightarrow$

Revenons au problème initial, supposons donc que l'on dispose d'un rétraction lisse r de B^n dans S^{n-1}. Grâce au théorème de Sard, il existe $z \in S^{n-1}$ tel que z soit une valeur régulière de r. Alors grâce au théorème 9, $r^{-1}(z)$ est une variété compacte de dimension 1. D'autre part, $r_{|S^{n-1}}$ est l'identité donc

$$r^{-1}_{|S^{n-1}}(z) = r^{-1}(z) \cap S^{n-1} = \{z\}.$$

C'est absurde, cela contredit le corollaire 7.

□

Remarque 2. Cette démonstration est en fait beaucoup plus générale, puisque l'on peut remplacer B^n par n'importe qu'elle variété compacte X de $\mathbb{R}^n$ et S^{n-1} par son ∂X.

3.3 Démonstration en dimension 2 d'après A. Gramain [4] à partir du groupe fondamental.

Définition 9. Soit X un espace topologique, on appelle *chemin* dans X une application continue

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow X.$$

On appelle *origine* du chemin, $\gamma(0)$ et *extrémité* du chemin $\gamma(1)$.

Définition 10. Deux chemins γ_0 et γ_1 sont *homotope à extrémités fixées*, s'il existe une application continue $\delta : [0,1]^2 \longrightarrow X$ telle que

$$\begin{aligned} \forall\ t \in [0,1] \qquad & \delta(t,0) = \gamma_0(t)\ ;\ \delta(t,1) = \gamma_1(t) \\ \forall\ s \in [0,1] \qquad & \gamma_0(0) = \gamma_1(0) = \delta(0,s) \\ & \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = \delta(1,s). \end{aligned}$$

On vérifie facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence que l'on note $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

Définition 11. Soient γ_0, γ_1 deux chemins. Si γ_0 et γ_1 sont *composables* (ie $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$), on définit le composé noté $\gamma = \gamma_0.\gamma_1$ par :

$$\gamma_0.\gamma_1 = \begin{cases} \gamma_0(2t) & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_1(2t-1) & si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Propriété 11. *La classe d'équivalence du chemin composé ne dépend que des classes des chemins composants.*

Propriété 12. *La composition est associative pour les classes d'équivalence.*

Définition 12. Soit $x \in X$, on appelle *lacet* de base x un chemin dont l'extrémité et l'origine sont égales à x. L'ensemble des lacets de base x est noté $\mathcal{L}(X, x)$.

Remarque 3. Les lacets de même base sont toujours composables.

On note $\Pi(X, x)$ le quotient de $\mathcal{L}(X, x)$ par la relation d'équivalence $\sim$. alors, $\Pi(X, x)$ est un groupe pour la composition d'élément neutre le chemin constant égal à x (du moins sa classe) et si $\gamma \in \Pi(X, x)$, γ à pour inverse :

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t) \qquad \forall\ t \in [0, 1].$$

Définition 13. $\Pi(X, x)$ est appellé *groupe fondamental* ou *groupe de Poincaré* de X

Théorème 13. *Le Groupe fondamental du disque* $\Pi(D^2, 0)$ *est isomorphe à* $\{0\}$.

Théorème 14. *Le Groupe fondamental du cercle* $\Pi(S^1, 1)$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}$.

Définition 14. Soient (X, x) et (Y, y) des espaces topologiques pointés et f une application continue de X dans Y telle que $y = f(x)$. Alors on définit par passage aux classes

$$\begin{array}{rll} \Pi f: & \Pi(X, x) & \longrightarrow \Pi(Y, y) \\ & \gamma & \longmapsto f \circ \gamma. \end{array}$$

Propriété 15. *Soient* (X, x), (Y, y) *et* (Z, z) *des espaces topologiques pointés,* f *une application continue de* X *dans* Y *telle que* $y = f(x)$ *et* g *une application continue de* Y *dans* Z *telle que* $z = f(y)$. *Alors*

$$\Pi(f \circ g) = \Pi(f) \circ \Pi(g).$$

Il en découle que $\Pi(id) = id$.

$\longleftrightarrow$

Montrons par l'absurde, qu'il n'y a pas de rétraction du disque de $\mathbb{R}^2$ dans le cercle.
Soient donc $r : D^2 \to S^1$ une rétraction et $i : S^1 \hookrightarrow D^2$ l'injection canonique. Alors

$$r \circ i = id_{S1}$$

$$\Rightarrow \Pi(r \circ i) = \Pi(r) \circ \Pi(i) = id_{|\Pi(S^1,1)}$$

Par conséquent, $\Pi(i) : \Pi(S^1, 0) \to \Pi(D^2, 0)$ est une injection. D'après les théorèmes 13 et 14 c'est absurde, il n'y a pas d'injection de $\mathbb{Z}$ dans $\{0\}$.

$\square$

3.4 Démonstration d'après C. Godbillon [5] généralisant celle de A. Gramain mais sur les espaces de Cohomologies.

Je ne vais pas ici introduire le formalisme des espaces de cohomologies, mais me contenter de donner la définition suivante :

Définition 15. On appelle *espace de cohomologie* de degré n, noté $\mathcal{H}^n(X)$, l'espace quotient des formes différentielles fermées de degré n par les formes différentielles exactes de degré n.

On dispose sur cet espace d'une application * qui transforme les applications différentielles de X dans Y en des applications de $\mathcal{H}^n(Y)$ dans $\mathcal{H}^n(X)$. Cette application vérifie la propriété suivante :

Propriété 16. *Soient f une application différentiable de X dans Y et g une application différentiable de Y dans Z, alors*

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

De plus on admet les deux théorèmes suivants :

Théorème 17. *L'espace de cohomologie $\mathcal{H}^n(B^{n+1})$ est isomorphe à $\{0\}$.*

Théorème 18. *L'espace de cohomologie $\mathcal{H}^n(S^n)$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.*

Ainsi s'il y avait une rétraction différentiable r de B^{n+1} sur S^n, et si on note i l'injection canonique de S^n dans B^{n+1}, alors

$$r \circ i = id_{|S^n}$$

$$\Rightarrow (r \circ i)^* = i^* \circ r^* = id_{|\mathcal{H}^n(S^n)}.$$

Donc $r^* : \mathcal{H}^n(S^n) \to \mathcal{H}^n(B^{n+1})$ serait une injection. D'après les théorèmes 17 et 18 c'est absurde, il n'y a pas d'injection de $\mathbb{R}$ dans $\{0\}$.

$\square$

4 Généralisations.

4.1 Cas d'une partie convexe compacte non vide.

Théorème 19. *Toute application continue d'une partie convexe compacte non vide de $\mathbb{R}^n$ dans elle même possède un point fixe.*

Démonstration :

Si on note C une partie convexe, compacte non vide de $\mathbb{R}^n$, C peut être englobée par une boule de rayon R. De plus pour tout $x \in B^n(0, R)$, par convexité de C, il existe un unique point $\pi(x)$ pour lequel la distance de x à C soit atteinte.

Lemme 4.1. *L'application $\pi : x \to \pi(x)$ est 1-lipchitzienne donc continue.*

En effet, soient x_0, $x_1 \in B^n(0, r)$.

x_0, x_1, $\pi(x_0)$, et $\pi(x_1)$ engendrent un espace de dimension au plus trois. On peut donc se placer dans le cas où $n = 3$.

Considérons le segment $[\pi(x_0), \pi(x_1)]$, ainsi que les plans $\mathcal{P}_0$ (resp. $\mathcal{P}_1$) perpendiculaires à $[\pi(x_0), \pi(x_1)]$, et passant par $\pi(x_0)$ (resp. $\pi(x_1)$). $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ partagent l'espace en trois espaces connexes :

- $E^0 = \{x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\pi(x_0)$ soit le point du segment $[\pi(x_0), \pi(x_1)]$ le plus proche de $x\}$.
- $E^1 = \{x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\pi(x_1)$ soit le point du segment $[\pi(x_0), \pi(x_1)]$ le plus proche de $x\}$.
- $E^{01} = (E^0 \cup E^1)^c$.

C étant convexe, $[\pi(x_0), \pi(x_1)] \subset C$ donc par définition de $\pi(x_0)$ (resp. $\pi(x_1)$), $x_0 \in E^0$ (resp. $x_1 \in E^1$).

D'après le théorème de passage à la douane, il existe x_0' et x_1' dans $[x_0, x_1]$ tel que

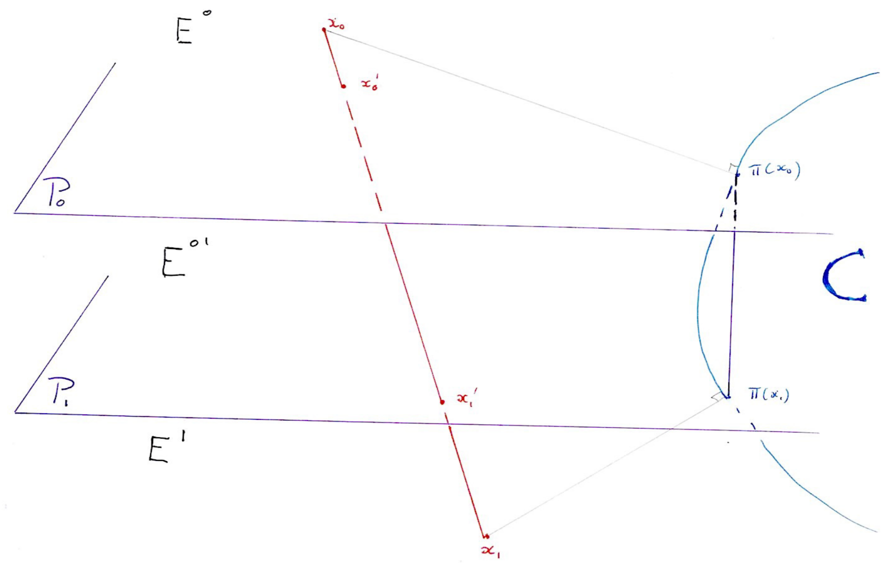
$$x_0' \in Fr(E^0) = \mathcal{P}^0 \quad \text{et} \quad x_1' \in Fr(E^1) = \mathcal{P}^1.$$

Enfin,

$$\|x_0 - x_1\| \geq \|x_0' - x_1'\| \geq d(\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1) = \|\pi(x_0) - \pi(x_1)\|.$$

Donc π est lipchitzienne.

□



Considérons la fonction

$$g: \begin{array}{ccc} B^n & \longrightarrow & B^n \\ x & \longmapsto & \frac{1}{R} f(\pi(Rx)) \end{array}$$

g est continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle même. Donc d'après le théorème du point fixe de Brouwer, il existe $y \in B^n$ tel que

$$g(y) = y$$

$$\Leftrightarrow Ry = f(\pi(Ry)) = f(Ry).$$

Donc f possède Ry comme point fixe.

□

4.2 Cas de la dimension infinie.

Proposition 20. *L'énoncé du théorème du point fixe de Brouwer sur la boule unité ne se généralise pas en dimension infinie.*

Démonstration :

Soit l'espace $l^1 = \{(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\}$ muni de la norme : $\|u_n\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Considérons la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} l^1 & \longrightarrow & l^1 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (1 - \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|, u_0, ..., u_n, ...) \end{array}$$

f est continue et

$$\forall\ x \in B(0,1),\ \ \|f(u)\| = \left|1 - \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right| + \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 1$$

Donc f est une application de la boule unité fermée dans elle même.
Pourtant, si $u \in B(0,1)$ était point fixe de f alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aurait

$$u_{n+1} = u_n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty.$$

Donc $u = 0$. Or $f(0) = (1, 0, ...) \neq 0$.
Donc f n'admet pas de point fixe.

□

Remarque 4. L'espace $l^1 = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty\}$ muni de la norme : $\|u_n\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est un espace de Banach.

Remarque 5. Il est logique que l'énoncé laissé tel quel soit faux en dimension infinie car la boule unité a perdu sa compacité (Théorème de Riez).

Théorème 21. *Soit E un espace de Banach, C une partie convexe fermée non vide de E et $f : C \longrightarrow C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ soit une partie compacte de E. Alors f possède un point fixe.*

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\overline{f(C)}$ est compacte, elle possède la propriété des réverbères. Donc il existe $w_1, ..., w_p \in \overline{f(C)}$ telle que

$$\overline{f(C)} \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(w_k, \varepsilon).$$

Posons

$$C_\varepsilon := \{t_1 w_1 + ... + t_p w_p, t_j \geq 0, \sum_{i=1}^{p} t_j = 1\}.$$

Alors $C_\varepsilon \subset Vect(w_1, ..., w_p)$, est une partie compacte, convexe dans un espace de dimension finie.
Soient $t_i = \frac{sup\{\varepsilon - \|f(x) - w_i\|, 0\}}{\sum_{i=1}^{p} sup\{\varepsilon - \|f(x) - w_i, 0\|\}}$ et

$$f_\varepsilon : x \longrightarrow \sum_{i=1}^{p} t_i w_i$$

par définition $f_\epsilon(x) \in C_\varepsilon$ et f_ε est continue, donc par le théorème de Brouwer f_ε admet un point fixe que l'on note x_ε. De plus

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| &= \|f(x) - \sum_{i=1}^{p} t_i w_i\| \\
&= \|\sum_{i=1}^{p} t_i(w_i - f(x))\| \qquad (\text{car } \sum_{i=1}^{p} t_i = 1) \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} t_i \|w_i - f(x)\|.
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in [1, ..., p]$, le i^{me} terme de cette somme est soit nul si $\|w_i - f(x)\| \geq \varepsilon$, soit inférieur à $t_i\varepsilon$ si $\|w_i - f(x)\| \leq \varepsilon$.
On a donc la majoration

$$\leq \sum_{i=1}^{p} t_i\varepsilon = \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on note $f_\varepsilon = f_n$ et x_n son point fixe associé, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in B(0,1)$

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \|x_n - f(x_n)\| = \|f_n(x_n) - f(x_n)\| \leq \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Comme la suite$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{f(C)}$ qui est compacte, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{f(C)}$. alors pour p et $q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|x_{\varphi(p)} - x_{\varphi(q)}\| &\leq \|x_{\varphi(p)} - f(x_{\varphi(p)})\| + \|f(x_{\varphi(p)}) - f(x_{\varphi(q)})\| + \|f(x_{\varphi(q)}) - x_{\varphi(q)}\| \\
&\leq \tfrac{1}{\varphi(p)} + \|f(x_{\varphi(p)}) - f(x_{\varphi(q)})\| + \tfrac{1}{\varphi(q)} \underset{p,q\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Donc la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E qui est un Banach. Donc elle converge dans C (car C est fermé) vers une limite y.
En passant à la limite dans (1) on obtient

$$y = f(y).$$

Donc f admet un point fixe.

□

4.3 Un autre type de point fixe.

Théorème 22. *Soit E un espace métrique, X une partie compacte et $f : X \to X$ une application continue alors il existe un compact K inclus dans X tel que $f(K) = K$.*

Démonstration :

Posons
$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(X)$$

Pour tout n, $f^n(X)$ est compacte et comme $f(X) \subset X$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f^{i+1}(X) = f^i(f(X)) \subset f^i(X)$.
Comme K est l'intersection d'une suite décroissante de compacts non vide, K est un compact non vide.
Soit $y \in K$, alors, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ tel que pour tout n, $f^n(y_n) = y$. posons $x_n = f^{n-1}(y_n)$ pour $n \geq 1$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tel que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans X vers une limite x.
De plus,

$$\forall\ k,\ n \in \mathbb{N} \qquad x_{\varphi(n+k)} \in f^{\varphi(n+k)}(X) \subset f^{n+k}(X) \subset f^k(X).$$

Donc en faisant tendre n vers l'infini, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \in f^k(X)$ donc $x \in K$.
Enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{\varphi(n)}) = y$, donc en passant à la limite, $f(x) = y$.
Donc $y \in f(K)$, donc
$$K \subset f(K)$$

Réciproquement soit $x \in f(K)$ alors il existe $y \in K$ tel que $x = f(y)$.
$y \in K$ donc il existe $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(y_n) = y$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x = f^{n+1}(y_n)$. Donc $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(X) = K$. Donc

$$f(K) \subset K.$$

Au total $f(K) = K$.

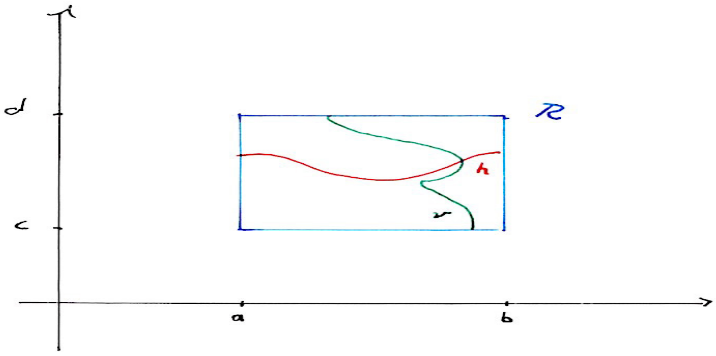
□

5 Application.

Soit h, v deux applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathcal{R}$ le rectangle défini par

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y \in [c,d]\}.$$

On demande de plus à h et v de vérifier :
- $h(-1)$ a pour abscisse a ; $h(1)$ a pour abscisse b.
- $v(-1)$ a pour ordonné c ; $v(1)$ a pour ordonné d.



Montrons alors par l'absurde que ces deux chemins se coupent. On suppose donc que pour tout s, t dans $[-1,1]$, $h(t) \neq v(s)$.
Considérons l'application :

$$F(t,s) = \left(\frac{v_1(s) - h_1(t)}{N(t,s)}, \frac{h_2(t) - v_2(s)}{N(t,s)}\right)$$

$$\text{avec } N(t,s) = sup\{|v_1(s) - h_1(t)|, |h_2(t) - v_2(s)|\}.$$

Alors $F : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ est continue et pour tout s et t dans $[-1,1]$

$$F(t,s) \in \partial[-1,1]^2 \qquad (\text{car } F_1 = \pm 1 \text{ ou } F_2 = \pm 1).$$

Comme $[-1,1]^2$ est convexe, compacte et non vide, F admet un point fixe.
Donc il existe $(t_0, s_0) \in \mathcal{R}$ tel que $F(t_0,s_0) = (t_0,s_0)$.
$(t_0,s_0) \in \partial[-1,1]^2$ donc soit $|t_0| = 1$, soit $|s_0| = 1$.
- Si $t_0 = 1$ alors $0 < N(t_0,s_0) = v_1(s_0) - h_1(t_0) = v_1(s_0) - b \leq 0$.
- Si $t_0 = -1$ alors $0 < N(t_0,s_0) = h_1(t_0) - v_1(s_0) = a - v_1(s_0) \leq 0$.
- Si $s_0 = 1$ alors $0 < N(t_0,s_0) = h_2(t_0) - v_2(s_0) = h_2(t_0) - d \leq 0$.
- Si $s_0 = -1$ alors $0 < N(t_0,s_0) = v_2(s_0) - h_2(t_0) = c - h_2(t_0) \leq 0$.

Dans chacun de ces cas, on obtient une contradiction. Donc h et v se coupent.

Remarque 6. Cette application peut être un point de départ à la démonstration du théorème en dimension 2 de séparation de Jordan dont l'énoncé est le suivant

Théorème 23. (Théorème de séparation de Jordan). *Soit X une hypersurface compacte et connexe dans $\mathbb{R}^n$. Alors le complémentaire de X est composé de deux ouverts connexes disjoints.*

Références

[1] Yves Carrière : *Cours de Maîtrise*, Institut Joseph Fourier, 1994

[2] John W. Milnor : *Amer*, Math. Monthly, 85 (1978),pp. 521-524.

[3] John W. Milnor : *Topology from the differentiable viewpoint*, The university Press of Virginia, 1965.

[4] André Gramain : *Topologie des surfaces*, Presses universitaires de France, Sup 1971

[5] Claude Godbillon : *Element de topologie algébrique*, Hermann, 1985

[6] C.Antonini JF.Quint P.Borgnat J.Bérard E.Lebeau E.Souche A.Chateau O.Teytaud : *Cour de mathématiques Universitaires*, Les-Mathématiques.net

[7] Alexis Monier : *Le journal des élèves*, ENS Lyon, volume 1, 1998,No.4 p202-206

[8] Alain Rey et jasotteRey-Debove : *Le Robert, dictionnaire universel des noms propres*, Société du nouveau littré, volume 1, 1976, p443