CHAPITRE 2 : Formes différentielles, Intégrales curvilignes

Soit Ω un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un ensemble qui ne contient aucun point de sa frontière, par exemple $\mathbb{R}^2$ entier, un disque ouvert $D = \{(x,y)|(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2\}$, un demi-plan sans sa frontière etc ...

Définitions : a) On appelle **forme différentielle** sur Ω l'expression $\boxed{\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad (1)}$ où $M, N : \Omega \to \mathbb{R}^2$ sont deux fonctions *continues* (souvent supposées différentiables).

b) Soit $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On appelle **différentielle totale de** V la forme différentielle $\boxed{dV = \frac{\partial V}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}(x,y)\,dy}$ (c'est-à-dire qu'alors $M = \frac{\partial V}{\partial x}$ et $N = \frac{\partial V}{\partial y}$ dans (1))

c) La forme ω est **fermée** si $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \quad (2)}$

d) La forme ω est **exacte** s'il existe $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\boxed{\omega = dV}$. On dit aussi que ω est la **différentielle totale** de V ou que V est un **potentiel** pour (ou dont dérive) ω.

Exemple thermodynamique : Un gaz parfait est compressé d'une certaine façon, son état est caractérisé par v le volume, t la température et p la pression. Pour de petits accroissements dt et dp de la température et de la pression, l'accroissement d'échange de chaleur est $\boxed{\delta Q = M(t,p)dt + N(t,p)dp = cdt - vdt}$ où c est la capacité calorifique et $pv = nRt$ (équation des gaz parfaits) qui est une forme différentielle.

Exemple : $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $\omega = (y - 3x^2)dx + (x - 4y)dy$

- ω est *fermée* car $\frac{\partial(y-3x^2)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(x-4y)}{\partial x}\cdot$
- ω est *exacte* car $\exists V : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial V}{\partial x} = y - 3x^2 \ \ (1)$ et $\frac{\partial V}{\partial y} = x - 4y \ \ (2)$

$V = xy - x^3 + f(y)$ vérifie (1) pour toute f de classe C^1. En reportant dans (2), la fonction f doit satisfaire : $\frac{\partial V}{\partial y} = x + f'(y) = x - 4y \iff f'(y) = -4y \iff f(y) = -2y^2 + \text{Cte}.$

Finalement, avec $V(x,y) = xy - x^3 - 2y^2 + \text{Cte}$ on a $dV = \omega$.

Remarque : Le potentiel V, quand il existe, est défini à constante près.

Proposition : *Si ω est C^1 et exacte, elle est fermée.*

$\omega = dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy$ avec $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ C^1. D'après le théorème de Schwartz, on a :

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ soit $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ avec $M = \frac{\partial V}{\partial x}$ et $N = \frac{\partial V}{\partial y}\cdot$

Définition : L'application $X : \Omega \to \mathbb{R}^2$ définie par $\boxed{X(x,y) = (M(x,y), N(x,y))}$ est un **champ de vecteurs**.

Définition : Une courbe paramétrée $\gamma : t \in I \mapsto (x(t), y(t))$ de classe C^1 est une **courbe intégrale** de $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ si $\boxed{M(x(t),y(t))x'(t) + N(x(t),y(t))y'(t) = 0 \quad \forall t \in I}$. Cette condition revient à orthogonalité des vecteurs $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ et $X(x(t),y(t)) = (M(x(t),y(t)), N(x(t),y(t)))$, $\forall t \in I$.

Proposition : *Si $\omega = dV$, une courbe intégrale de ω est une courbe de niveau de V.*

Dérivons la fonction d'une variable $h(t) = V(x(t), y(t))$ par rapport à t. On a

$$h'(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x(t),y(t))\,x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t),y(t))\,y'(t) = 0.$$

Définition : On appelle **chemin** allant de A à $B \in \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1 par morceaux $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(a) = A$ (origine du chemin) et $\gamma(b) = B$ (extrémité du chemin).

Définition : L'**intégrale curviligne** de la forme $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ le long du chemin γ est

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_a^b \frac{Mdx + Ndy}{dt}dt = \int_a^b (M(x(t),y(t))x'(t) + N(x(t),y(t))y'(t))dt = \int_a^b < X(x(t),y(t)), \gamma'(t) > dt}$$

On dit aussi que le nombre trouvé est la **circulation** du champs de vecteurs $X(x,y)$ le long γ.

L'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ ne dépend pas de la paramétrisation du chemin γ car changer de paramètre revient à faire un changement de variable pour calculer la même intégrale : vérifiez le !

Proposition : *Si ω est exacte c'est-à-dire si $\omega = dV$ où V est de classe C^2, on a $\int_\gamma \omega = V(B) - V(A)$.*

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma dV = \int_a^b \Big(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Big)dt = \int_a^b \frac{dV(x(t),y(t))}{dt}dt = \Big[V(x(t),y(t))\Big]_a^b = V(B) - V(A).$$

En particulier, si le chemin γ est **fermé** , c'est-à-dire si $A = B$, on a $\int_\gamma dV = 0$.

Proposition (admise) : *ω est exacte $\iff \int_\gamma \omega = 0 \quad \forall \gamma$ chemin fermé et si ω est définie sur $\mathbb{R}^2$, un disque ou un rectangle, on a : ω est fermée $\iff$ ω est exacte.*

Exemple : $\omega = (1+y)dx + (2-x)dy$ on veut calculer l'intégrale de ω du point $A = (0,0)$ au point $B = (2,4)$ le long des chemins suivants :

i) γ_1 : La droite $y = 2x$.

ii) γ_2 : La parabole $y = x^2$.

iii) γ_3 : La ligne brisée constituée des droites $y = 0$ et $x = 2$.

i) $t = x$, $y = 2x$ on a $\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^2 (1+2x)dx + (2-x)2dx = \int_0^2 5dx = 10$.

ii) $t = x$, $y = x^2$ on a $\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^2 (1+x^2)dx + (2-x)2xdx = \int_0^2 (1+4x-x^2)dx = \big[x + 2x^2 - x^3/3\big]_0^2 = 22/3$.

iii) Paramétrons le premier segment par $x \to (x,0)$ et le second par $y \to (0,y)$ on a $\int_{\gamma_3} \omega = \int_0^2 dx + \int_0^4 0.dy = 2$.

Conclusion : L'intégrale curviligne d'une forme non exacte ω dépend vraiment du chemin allant de A à B.

Exemple de forme fermée non exacte : Sur l'anneau $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | R_1^2 < x^2+y^2 < R_2^2\}$ où $0 < R_1 < R_2$, la forme $\omega = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ est bien définie et de classe C^∞.

a) La forme ω est **fermée** car $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

b) La forme ω **n'est pas exacte** car si on pose $\gamma(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$ où R est fixé avec $R_1 < R < R_2$, on a :

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{x(\theta)y'(\theta) - x'(\theta)y(\theta)}{x^2(\theta)+y^2(\theta)}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta}{R^2}d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0$$

Définition : On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ de classe C^1 est un **facteur intégrant** de la forme différentielle ω si la forme $f\omega$ est exacte.

Une condition nécessaire est que $f\omega$ soit fermée soit : $\frac{\partial}{\partial y}(fM) = \frac{\partial}{\partial x}(fN) \iff M\frac{\partial f}{\partial y} - N\frac{\partial f}{\partial x} = f\Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big)$.

Remarque : Les courbes intégrales de ω sont alors les mêmes que celles de $f\omega = dV$ qui sont les courbes de niveau de V.

Exemple thermodynamique : Le second principe énonce que l'inverse de la température $1/t$ est un facteur intégrant de $\omega = \delta Q$ et $\frac{\delta Q}{t} = dS$ où S est la fonction entropie.

Théorème de Stokes : Soit $\omega = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ une forme différentielle de classe C^1 et γ un chemin directement orienté encadrant un domaine A. On a l'égalité : $\int_\gamma \omega = \iint_A d\omega$ où $d\omega = (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})dxdy$.

On peut ramener la démonstration au cas particulier où γ est le bord du rectangle $A = [a,b] \times [\alpha,\beta]$.

Dans ce cas particulier, on vérifie le résultat par le calcul :

$\iint_A d\omega = \iint_A (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})dxdy = \iint_A \frac{\partial N}{\partial x}dxdy - \iint_A \frac{\partial M}{\partial y}dxdy = \int_\alpha^\beta (\int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}dx)dy - \int_a^b (\int_\alpha^\beta \frac{\partial M}{\partial y}dy)dx = \int_\alpha^\beta N(b,y)dy + \int_b^a M(x,\beta)dx + \int_\beta^\alpha N(a,y)dy + \int_a^b M(x,\alpha)dx = \int_\gamma \omega$

Dans le cas général, pour chaque n entier, on recouvre au mieux le domaine A par des carrés de côté $1/n$ et on passe à la limite en faisant $n \to \infty$.

Exercice : Soit $\omega = (y^2 - x^2)dx - 2xydy$ définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2$.

1) ω est elle fermée ? exacte ?

2) Soit les points $O = (0,0)$, $A = (0,\pi)$.

a) Calculer $I_1 = \int_{\gamma_1} \omega$ où γ_1 est le segment OA paramétré par $x \to (x,0)$ avec $0 \leq x \leq \pi$.

b) Calculer $I_2 = \int_{\gamma_2} \omega$ où γ_2 est le chemin allant de O à A d'équation $y = \sin x$ avec $0 \leq x \leq \pi$.

c) Comparer I_1 et I_2. Retrouver que ω n'est pas exacte.

3) Vérifier que $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ est un facteur intégrant de ω sur $\Omega' = (\mathbb{R}^2)^*$ (le plan privé de l'origine O) c'est-à-dire trouver une fonction $V(x,y)$ telle que $f\omega = dV$ sur Ω'.

4) Décrire les courbes intégrales de ω.