Table des matières

Introduction : Représentation paramétrique d'une courbe

Dans de nombreuses situations, Mécanique, Physique, et bien sûr en Mathématiques, on est conduit à étudier le déplacement d'un point de $\mathbb{R}^n$ dépendant d'un paramètre, le paramètre étant en général assimilé au temps. Le point mobile décrit une trajectoire, ou une "courbe", la dimension n de l'espace est le nombre de paramètres du"point". On étudie dans ce chapitre les premiers aspects des courbes planes, celles tracées dans le plan ($n = 2$). Ci-dessous l'exemple bien connu de la *Cardioïde*.

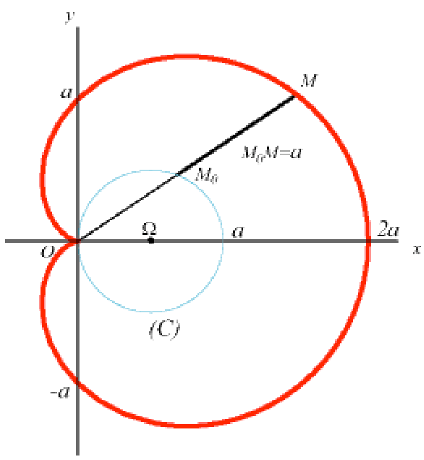


FIGURE 1.1 – Cardioïde

Dans le plan de coordonnées x, y, on sait écrire l'équation *cartésienne* d'une droite : $ax + by + c = 0$. On sait classiquement représenter paramétriquement la même droite : $t \mapsto t(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta)$. Le vecteur (α, β) est un vecteur *directeur* de la droite. On peut prendre $(\alpha, \beta) = (b, -a)$. Le vecteur (a, b) donne la direction normale de la droite.

Un cercle de centre (a, b) de rayon $r > 0$ est visuellement assimilé à l'ensemble des points $M = (x, y)$ à la distance r de $O = (a, b)$. D'où l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Le cercle admet une représentation paramétrique simple

$$x = a + r\cos t,\ y = b + r\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Noter que plus que l'image, le cercle lui-même, cette représentation donne la position du point de paramètre t. De la même manière on peut *étudier* de nombreuses courbes planes données, soit par une équation paramétrique, soit une équation cartésienne (plus compliqué). L'ellipse de centre $(0,0)$ et de longueurs d'axes $a > b > 0$ a par exemple pour représentation paramétrique

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t$$

et pour équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 1$. Un exemple que nous étudierons en détail dans la suite est la fameuse *cycloïde* qui sous forme paramétrique est la courbe plane

$$\boxed{x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t)}$$

Cette courbe décrit la trajectoire d'un point fixe d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite, par exemple la valve d'une roue de vélo. Si le cercle roule à l'intérieur (resp. extérieur) d'un autre cercle, le point décrit une courbe appelée (hypo)cycloïde, resp. (epi)cycloïde. Ces courbes connues depuis longtemps (Galilée, Roberval, Bernoulli, Pascal, ...), sont liées à de nombreux problèmes.

Par exemple saisir "cycloïde" sur Google, permet de se convaincre de l'universalité de cette famille de courbes. On pourra aussi pour les plus curieux utiliser le lien vers l'encyclopedie Wikipedia, ou le site http ://www.mathcurve.com/ pour des figures dynamiques, ainsi que des notices historiques très intéressantes.

Comme dans le cas classique, graphe d'une fonction $y = f(x)$, étudier une courbe donnée paramétriquement revient à traiter dans l'ordre les points suivants :

1. étudier les variations des fonctions coordonnées (tableau des variations),
2. étudier les branches infinies (asymptotes)
3. procéder à une étude locale autour de certains points "singuliers",
4. effectuer éventuellement une étude globale-locale, longueur, courbure, etc..

On va d'abord s'occuper des points 1) à 3). Le point 4) sera abordé en fin de chapitre.

1.1 Propriétés locales des courbes paramétrées

On se place dans $\mathbb{R}^n$ avec un système de coordonnées

$$x = (x_1, \cdots, x_n)$$

et muni de la structure euclidienne usuelle. On pourra être amené à effectuer des changements de repères, et (ou) de coordonnées. Dans le présent cours on se concentrera pour l'essentiel sur le plan $\mathbb{R}^2$.

Définition 1.1.1. 1) Soit I une partie de $\mathbb{R}$ (réunion d'un nombre fini d'intervalles disjoints). Une *courbe paramétrée* tracée dans $\mathbb{R}^n$ et définie sur I, est la donnée d'une fonction (vectorielle)

$$f : t \mapsto f(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

On dit que t est le *paramètre* (communément le temps), et que l'image $f(I) \subset \mathbb{R}^n$ le *graphe* ou *trajectoire*. Si $n = 2$, on parle de courbe plane, et si $n = 3$ de courbe dans l'espace ; au-dela on ne dit plus rien ! Pour une courbe plane, on écrira le plus souvent $f : t \mapsto (x(t)), y(t))$, et pour courbe de l'espace $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, ceci pour éviter les indices.
2) La courbe $t \mapsto f(t)$ est *continue* (resp. *dérivable*, k-fois dérivable), si les fonctions coordonnées $x_i(t)$ sont continues (resp. dérivables, k-fois dérivables).

$$\boxed{\text{A partir de maintenant } n = 2.}$$

Les coordonnées sont notées (x, y), et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est le repère orthonormé canonique du plan $\mathbb{R}^2$. La longueur du vecteur (x, y) est

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et le produit scalaire des vecteurs (x, y) et (x', y') est $xx' + yy'$. La nullité du produit scalaire signifie l'orthogonalité des vecteurs. On identifiera librement le plan avec le plan complexe, le vecteur (x, y) étant identifié à $z = x + iy$.

Exemple 1.1.2. La courbe paramétrée $t \mapsto (t, y(t))$ est le graphe de la fonction scalaire $x \to y(x)$. La question classique de l'étude du graphe d'une fonction scalaire d'une variable $x \mapsto y = f(x)$ rentre dans le cadre présent. On notera qu'une courbe plane n'est pas en général le graphe d'une fonction scalaire. Par exemple la courbe

$$x(t) = x_0 + at,\ y(t) = y_0 + bt$$

représente la droite passant par le point (x_0, y_0) et de vecteur directeur (a, b). Ce n'est le graphe d'une fonction scalaire que si $a \neq 0$.

Exemple 1.1.3 (La cycloïde). Revenons à la cycloïde, exemple "banal" mais riche de courbe paramétrée. Donnons en une définition précise :

Définition 1.1.4. Une **cycloïde**, on dit aussi *roulette*, est en toute généralité la courbe décrite par un point fixe d'un *cercle qui roule sans glisser sur ou dans un autre cercle*, ce cercle fixe pouvant être une droite.

Le lecteur appréciera de lui-même le sens de cette phrase. Traitons d'abord le dernier cas, le cercle qui roule sur une droite. Penser à une valve de roue de vélo.

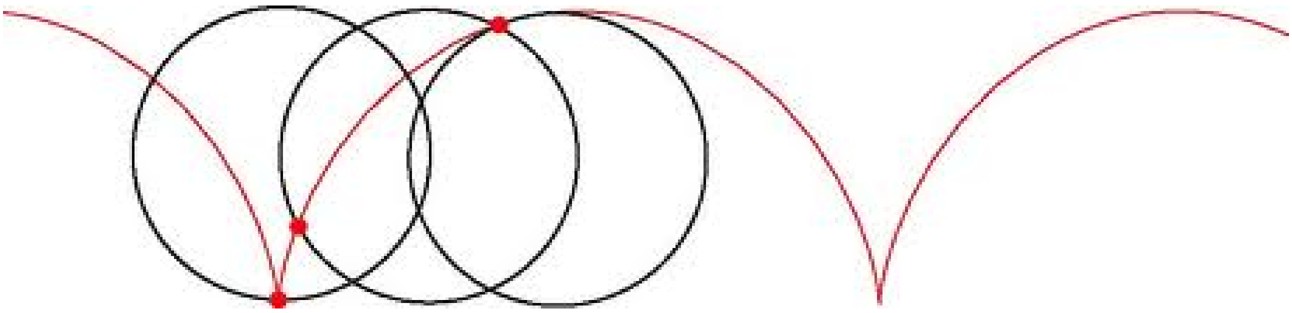


FIGURE 1.2 – Cycloïde ou roulette

Soit un cercle C de rayon r qui roule sans glisser (dans le sens positif) sur l'axe des x. On fixe un point M de C, et on étudie la trajectoire de ce point lors du roulement. On peut supposer que pour $t = 0$, $M = M(0) = (0, 0)$ est à l'origine. Il faut choisir un paramètre. Soit I le centre du cercle qui roule, noter qu'il reste sur la droite $y = r$, et soit H le point de contact de ce cercle avec l'axe des x. La position de M est fixée par l'angle $t = (\widehat{IM, IH})$ qui est "l'angle de roulement", donc tel que

$$rt = \overline{OH}$$

abscisse de H. Il est facile de trouver les coordonnées de $M(t)$ en fonction de t (le faire), on trouve :

$$x(t) = r(t - \sin t),\ y(t) = r(1 - \cos t)$$

Exemple 1.1.5 (L'hypocycloïde H_q). On considère maintenant le roulement (sans glissement) d'un cercle γ de rayon $r \in [0, 1]$ à l'intérieur du cercle unité. La courbe décrite par un point fixé de γ est une *hypocycloïde*.

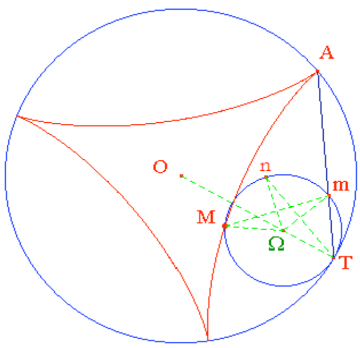


FIGURE 1.3 – Hypocycloïde H_3 ou deltoïde

On pose $q = \frac{1}{r} > 1$. On fixe un point M de γ, il décrit dans le mouvement une hypocycloïde dont on cherche une représentation paramétrique. On prend comme paramètre l'angle polaire $\theta \in \mathbb{R}$ du point de contact $T(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ du cercle γ avec le cercle fixe. On suppose que $M(0) = T(0) = (1, 0)$.

i) Les coordonnées du centre $\Omega(\theta)$ de γ au paramètre θ sont $((1-r)\cos\theta, (1-r)\sin\theta)$.

ii) Si $\varphi = \widehat{M(\theta), T}(\theta)$, la longueur de l'arc $M(\theta)T(\theta)$ de γ qui est $r\varphi$ doit être égale à la longueur de l'arc $\theta = T(0)T(\theta)$ du cercle unité, d'où la relation $\theta = r\varphi$.

iii) On peut trouver les coordonnées de $M(\theta)$ comme suit.

Posons $\overrightarrow{u} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$ où $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est le repère canonique de $\mathbb{R}^2$.

On a $\overrightarrow{\Omega(\theta)M(\theta)} = r(\cos\varphi\,\overrightarrow{u} - \sin\varphi\,\overrightarrow{v})$. D'autre part $\overrightarrow{O\Omega(\theta)} = (1-r)(\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j})$. De la relation de Chasles $\overrightarrow{OM(\theta)} = \overrightarrow{O\Omega(\theta)} + \overrightarrow{\Omega(\theta)M(\theta)}$ on tire par substitution

$$M(\theta) = ((1-r)\cos\theta + r\cos(\varphi-\theta)\,,\,(1-r)\sin\theta - r\sin(\varphi-\theta))$$

En conclusion, si on fait le choix de θ comme paramètre

$$M(\theta) = \Big((1-r)\cos\theta + r\cos(\frac{\theta}{r}-\theta)\,,\,(1-r)\sin\theta - r\sin(\frac{\theta}{r}-\theta)\Big)$$

Pour $r = \frac{1}{3}$, la représentation paramétrique est $x = \frac{2}{3}\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 2\theta$, $y = \frac{2}{3}\sin\theta - \frac{1}{3}\sin 2\theta$. On montrera à titre d'exercice que si $r = \frac{1}{4}$, la fonction $M(\theta)$ admet la forme simple $M(\theta) = (\cos^3\theta\,,\,\sin^3\theta)$.

La courbe H_4 est une *astroïde.*

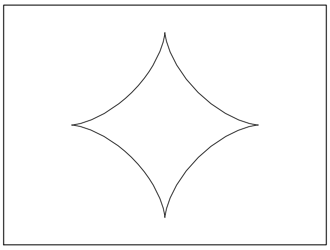


FIGURE 1.4 – L'hypocycloïde H_4 ou astroïde

Explicitons le vecteur tangent au point de paramètre θ. Un calcul élémentaire conduit à

$$M'(\theta) = (1-r)\Big(-\sin\theta - \sin(\frac{1-r}{r}\theta)\,,\,\cos\theta - \cos(\frac{1-r}{r}\theta)\Big)$$

Sous forme complexe, et pour utilisation ultérieure, on trouve

$$M'(\theta) = i(1-r)(e^{ir\theta} - e^{-i\frac{1-r}{r}\theta})$$

Exemple 1.1.6 (**L'épicycloïde** E_q)**.** Si on considérait le roulement à l'extérieur du cercle unité, la courbe décrite serait une *épicycloïde.* Des calculs similaires conduiraient à la représentation paramétrique. Voir les exercices pour les détails. Comme pour les hypocycloïdes, l'allure d'une épicycloïde est très dépendante du paramètre q, par exemple selon que q est rationnel ou pas. Le cas $q = 1$ définit la cardioïde. Ci-dessous $q = \frac{1}{4}$.

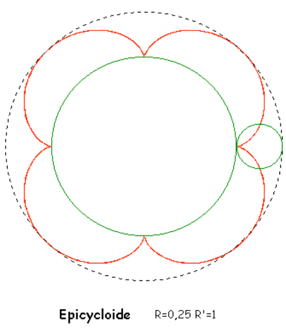


FIGURE 1.5 – Epicycloïde E_q, $q = \frac{1}{4}$

On évitera de confondre une courbe paramétrée $t \mapsto f(t)$ avec sa *représentation graphique* ou *image* ou *support* ou *trajectoire* $f(I) \subset \mathbb{R}^n$. Une courbe paramétrée est une *fonction* $t \mapsto f(t)$, relativement à laquelle on va s'autoriser une certaine flexibilité, à savoir la possibilité de *changer le paramètre* (voir section de dessous pour une définition précise). On fixe le principe selon lequel changer le paramètre ne *change pas le support de la courbe.*

Avant d'étudier les propriétés de base des courbes, notons que de nombreuses situations intuitivement évidentes peuvent intervenir. Par exemple, il est possible que la courbe passe plusieurs fois par un même point (points doubles), on verra l'exemple de la Lemniscate, ou que la courbe soit *fermée*, par exemple le cercle ou l'ellipse, c'est le cas si la fonction f est périodique.

Soit une application $\varphi(s) : J \to I$, J étant toujours un intervalle, ou une réunion d'un nombre fini d'intervalles. On dit que l'on a un *changement de paramètre* si φ est une *bijection* de J sur I, et si φ et la fonction réciproque φ^{-1} (qui est définie) sont dérivables. On sait que cela sera le cas si $\varphi'(s) \neq 0 \ \forall s \in J$ (souvent cette dérivée aura un signe constant sur J, par exemple si J est un intervalle). La fonction composée $s \to g(s) = f(\varphi(s))$ est une nouvelle courbe paramétrée dite déduite de $t \mapsto f(t)$ par *changement de paramètre* $t = t(s)$. On verra qu'il n'y a pas lieu de distinguer les deux courbes $t \to f(t)$ et $s \to g(s) = f(t(s))$. Dans la section suivante on verra qu'il y a sous certaines conditions un paramètre "plus beau" que les autres : *la longueur d'arc.*

Exemple 1.1.7. Soit la courbe paramétrée (plane) $x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, avec $I = \mathbb{R}$. Posons $t = \mathrm{tg}\frac{s}{2}$, avec $J =]-\pi, \pi[$. Du fait des relations

$$\sin s = \frac{2\mathrm{tg}\frac{s}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{s}{2}}, \ \cos s = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{s}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{s}{2}}$$

on voit que la courbe $(x(t), y(t))$ n'est autre que le cercle unité privé du point $(-1, 0)$. On peut observer que le point de paramètre s, est le second point d'intersection de la droite passant par $(-1, 0)$, d'angle polaire $\frac{s}{2}$ avec cercle. Faire le dessin !

Exercices : § 1.1

1. Décrire paramétriquement de deux manières différentes la branche $x > 0$ de l'hyperbole équilatère $xy = 1$. Indication : l'une des représentations peut être $x(t) = \mathrm{ch}\, t - \mathrm{sh}\, t$, $y(t) = \mathrm{ch}\, t + \mathrm{sh}\, t$.
2. Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ de l'Epicycloïde E_q $(r = \frac{1}{q})$ sont

$$x = r(q+1)\cos t - r\cos(q+1)t, y = r(q+1)\sin t - r\sin(q+1)t$$

1.2 Vecteur tangent, tangente

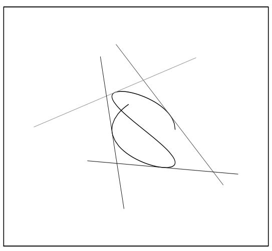


FIGURE 1.6 – 4 tangentes à une courbe

On fixe une courbe paramétrée $t \to f(t) \in \mathbb{R}^n$ définie sur I. Rappelons que la dérivée de $f(t)$ (ou $x(t)$) au point de paramètre t, est $f'(t) = (x_1'(t), \cdots, x_n'(t)) \in \mathbb{R}^n$.
La dérivée k-ième, si elle est définie, est $f^{(k)}(t_0) = (x_1^{(k)}(t_0), \ldots, x_n^{(k)})(t_0)$.

Définition 1.2.1. 1- Le point $f(t_0)$ de paramètre t_0 de courbe $t \mapsto f(t)$ est dit *régulier* si $f'(t_0) \neq 0$ et *stationnaire* ou *singulier* si $f'(t_0) = 0$.
2 - La *tangente* en un point régulier de paramètre t_0 est la droite passant par $f(t_0)$ de vecteur directeur $f'(t_0)$. Le vecteur $f'(t_0)$ est le vecteur tangent au point de paramètre t_0, souvent appelé le *vecteur vitesse* en t_0. Le vecteur tangent est donc un vecteur directeur de la tangente.

On prendra garde au fait que le vecteur tangent au point de paramètre t_0 dépend réellement du paramétrage, mais pas sa direction (voir dessous).

Remarque. 1- L'équation paramétrique de la tangente est $t \mapsto (x_1(t_0) + tx_1'(t_0), \ldots, x_n(t_0) + tx_n'(t_0))$ Noter que si $n \geq 3$, une droite ne peut être définie par une seule équation, donc sera plus commodément décrite par une équation paramétrique.
2- Si on effectue un changement de paramètre $t = t(s)$, alors on a

$$\boxed{\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \times \frac{dt}{ds}}$$

qui exprime un changement du vecteur vitesse mais pas de la direction, donc la tangente est insensible à un changement de paramètre, comme il se doit.
3- Le vecteur vitesse (= vecteur tangent) admet l'interprétation (= définition) usuelle

$$\boxed{f'(t_0) = \lim_{t \to t_0, t \neq t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}}$$

On peut donc écrire pour $|t - t_0|$ petit $f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \circ(|t - t_0|)$.

Exemple 1.2.2. Soit l'hyperbole équilatère $x(t) = t$, $y(t) = \frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$. La tangente au point de paramètre t_0 a pour vecteur directeur $(1, -\frac{1}{t_0^2})$, son équation cartésienne est $x - \frac{y}{t_0^2} = t_0 - \frac{1}{t_0^3}$.

Si on considère le vecteur vitesse (= vecteur tangent) à l'Astroïde H_4 dans la représentation paramétrique donnée au-dessus, on trouve pour ses coordonnées

$$x'(\theta) = -3\cos^2\theta \sin\theta\, ,\ y'(\theta) = 3\sin^2\theta\cos\theta$$

C'est un vecteur proportionnel à $(-\cos\theta\, , \sin\theta)$. Noter que les points singuliers sont les quatre points sur les axes.

Remarque. Il est fréquent que la courbe paramétrée $f : x = x(t), y = y(t)$ soit donnée par une *équation cartésienne* donnée par une fonction de deux variables $F(x, y)$

$$\boxed{F(x(t), y(t)) = 0\ (\forall t \in I)}$$

La fonction F est supposée de classe C^1 au moins. C'est à dire que la courbe est vue comme courbe de niveau de la fonction de deux variables F (voir l'UE Mat234).

Proposition 1.2.3. *Supposons qu'au point (x_0, y_0) de paramètre t_0, le gradient de F est non nul, alors un vecteur normal (orthogonal au vecteur tangent) est proportionnel au vecteur*

$$\boxed{\mathrm{grad}F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\, , \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)}$$

Démonstration : On a identiquement en t, $F(x(t), y(t)) = 0$, donc $\frac{d}{dt}(F(x(t), y(t))) = 0$. Par l'expression de cette dérivée de fonctions composées, on trouve $x'(t_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(t_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Or cette relation exprime bien l'orthogonalité des deux vecteurs invoquée. □

Exemple 1.2.4. Soit l'hypocycloïde (exemple 1.3) avec le choix de $r = \frac{1}{n}(n \geq 3)$. Les points singuliers sont donnés par l'équation d'annulation du vecteur tangent

$$e^{\frac{i\theta}{n}} = e^{\frac{-i(n-1)\theta}{n}} \Longleftrightarrow e^{in\theta} = 1$$

Il y a n points stationnaires sur le cercle fixe, sommets du polygone régulier à n sommets .

Dorénavant $\boxed{\mathrm{n} = 2}$. On fait l'hypothèse que la fonction $f(t) = (x(t), y(t))$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre $k \geq 1$ au point t_0, c'est à dire que x et y ont de telles dérivées . Alors la formule de Taylor bien connue pour les fonctions d'une variable est encore valable (sous une certaine forme) pour les fonction vectorielles d'une variable. Rappelons que pour une fonction *scalaire* $t \mapsto f(t)$, définie sur $[t_0, t_0 + h]$, et k fois dérivable sur $]t_0, t_0 + h[$, et pour un certain $\theta = \theta(h) \in]0, 1[$:

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + hf'(t_0) + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}h^{k-1}f^{(k-1)}(t_0) + \frac{1}{k!}h^k f^{(k)}(t_0 + \theta h)$$

en particulier cela donne pour $|h|$ petit

$$\boxed{f(t_0+h) = f(t_0) + hf'(t_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(t_0) + \ldots + \frac{1}{k!}h^k f^{(k)}(t_0) + \circ(h^k)}$$

La notation $\circ(h^k)$ signifie une fonction vectorielle qui est négligeable devant h^k lorsque $h \to 0$. Cette version de la formule de Taylor équivaut à l'application de la formule de Taylor à chaque composante de $\mathbf{f}(t)$, soit

$$x(t_0+h) = x(t_0) + hx'(t_0) + \frac{1}{2}h^2 x''(t_0) + \ldots + \frac{1}{k!}h^k x^{(k)}(t_0) + \circ(h^k)$$

et

$$y(t_0+h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_0) + \ldots + \frac{1}{k!}h^k y^{(k)}(t_0) + \circ(h^k)$$

1.3 Forme au voisinage d'un point

Soit $f(t) = (x(t), y(t))$ la courbe de paramètre t. On suppose dans la suite que les dérivées existent à tous les ordres. Soit $t_0 \in I$. On suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que : $\boxed{f'(t_0) = \cdots f^{(p-1)}(t_0) = 0, \;\; \overrightarrow{u} = f^{(p)}(t_0) \neq 0}$
Supposons ensuite que $q > p$ est le *plus petit entier* tel que le vecteur $\overrightarrow{v} = f^{(q)}(t_0)$ soit non proportionnel à $\overrightarrow{u} = f^{(p)}(t_0)$. On suppose que q existe. La formule de Taylor donne lorsque $h \to 0$:

$$f(t_0+h) = f(t_0) + \Big(\frac{h^p}{p!} + a_{p+1}\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} + \cdots + a_{q-1}\frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\Big)\overrightarrow{u} + \frac{h^q}{q!}\overrightarrow{v} + \circ(h^q)$$

avec pour $p \leq k \leq q-1$, $f^{(k)}(t_0) = a_k\overrightarrow{u}$.

On en déduit facilement que la courbe lorsque $t \to t_0$ est asymptote, donc a une forme qui ressemble à la courbe paramétrée qui dans les coordonnées (X, Y) du repère $(f(t_0), \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (pas forcément orthonormé) est paramétrée par : $h \to (X(h), Y(h))$ avec $(X(h), Y(h)) = (h^p, h^q)$. D'où la

Proposition :

1) La tangente en $f(t_0)$ est la droite passant par $f(t_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = f^{(p)}(t_0)$.

2) La courbe dans le voisinage du point singulier a l'une des formes suivantes :

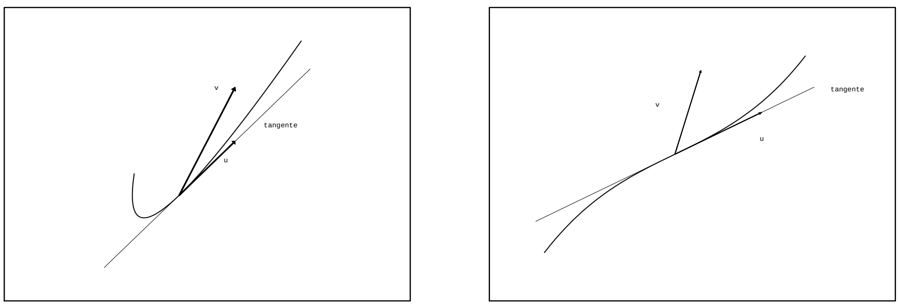


FIGURE 1.7 – p **impair** : point singulier ordinaire (q **pair**) ou d'inflexion (q **impair**)

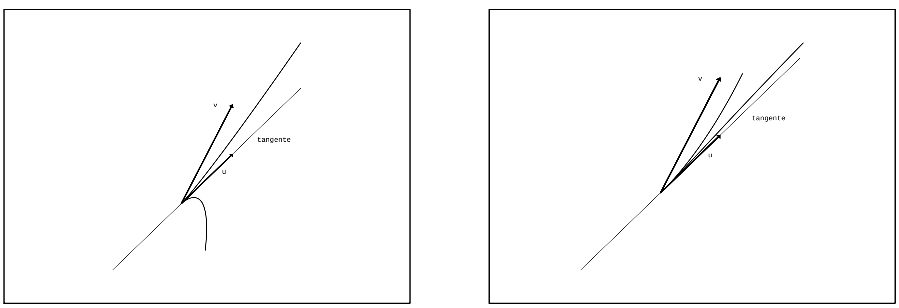


FIGURE 1.8 – p **pair** : point de rebroussement de 1ère espèce (q **impair**) ou de 2ème espèce (q **pair**)

Le dessin typique d'un point de rebroussement de 1ère espèce est fourni par la cycloïde.

Soit la cycloïde $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$. On note que $f(t+2\pi) = f(t) + (2\pi, 0)$, fait qui dit que le point de paramètre $t + 2\pi$ est le translaté de 2π dans la direction Ox du point $f(t)$. On peut donc se limiter à étudier f sur $[-\pi, \pi]$. Comme $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$, l'axe Oy est un axe de symétrie. On trouve

$$x'(t) = 1 - \cos t\,,\ y'(t) = \sin t$$

donc il y a un point stationnaire en $t = 2k\pi$. Examinons le point $t = 0$. On a $x''(t) = \sin t, y''(t) = \cos t$, donc $p = 1$, et $\overrightarrow{u} = (0, 1)$. En dérivant une fois de plus, on trouve $x'''(t) = \cos t$, $y'''(t) = -\sin t$. Donc $q = 3$, et $\overrightarrow{v} = (1, 0)$. Il y a donc en ce point un rebroussement de première espèce.

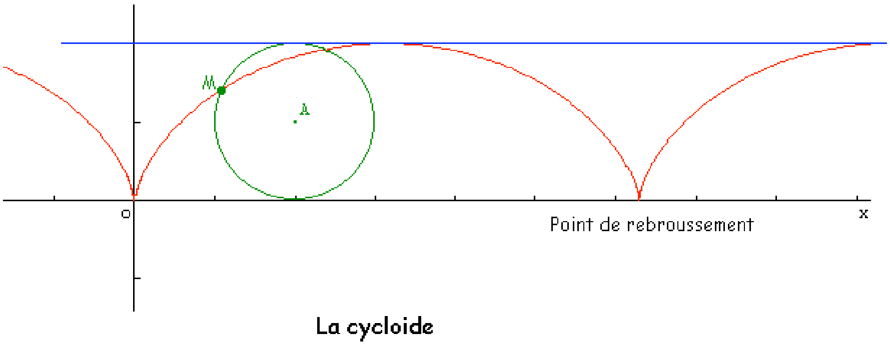


FIGURE 1.9 – La cycloïde

Exercice

Soit pour un quelconque $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, la courbe notée $\mathcal{C}_n$ décrite par

$$x(t) = \cos nt + n\cos t, \quad y(t) = \sin nt + n \sin t$$

i) Que dire de $\mathcal{C}_1$?

ii) Donner en fonction de n le nombre de points stationnaires, et en préciser la nature.

Solution : Il est commode de représenter le point de coordonnées (x, y) par son image complexe $z = x + iy$. De la sorte la représentation paramétrique de $\mathcal{C}_n$ est $z(t) = e^{int} + ne^{it}$. Si $n = 1$, c'est le cercle de rayon 2. On suppose $n \geq 2$. On a $z'(t) = n(e^{int} + e^{it})$, il s'ensuit que $z'(t) = 0 \iff e^{int} + e^{it} = 0$. Les solutions de cette équation sont $nt = \pi + t + 2k\pi$, soit $t = \frac{\pi}{n-1} + \frac{2k}{n-1}\pi$, $k = 0, 1, \cdots, n-2$. Le nombre de points stationnaires est ainsi $n - 1$. Il est visible que la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n-1}$ permute ces points. On peut donc limiter l'étude au seul point de paramètre $\frac{\pi}{n-1}$. On pose $t = \frac{\pi}{n-1} + \alpha$, alors $z(t) = e^{\frac{i\pi}{n-1}}(-e^{in\alpha} + ne^{i\alpha})$. Un développement limité conduit facilement à la conclusion que ce point (et donc tous les points stationnaires) est un rebroussement de première espèce.

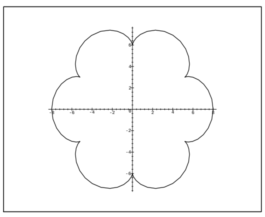


FIGURE 1.10 – Cas $n = 7$

1.4 Branches infinies

Définition 1.4.1. On dit qu'une courbe paramétrée $t \to f(t) \in \mathbb{R}^n$ présente une branche infinie en $t = t_0$, si d'une part $f(t)$ est définie sur un intervalle $(a, t_0[$, ou $]t_0, b)$, ou les deux, et si pour $t \to t_0$, $t \neq t_0$, $\|f(t)\| \to \infty$.

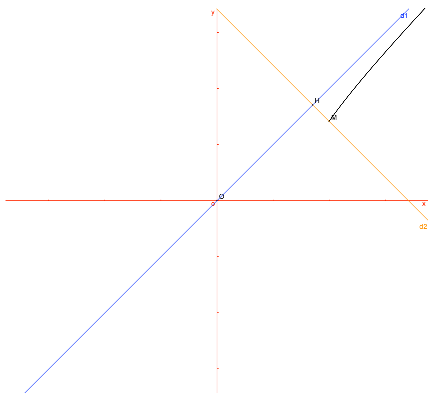
Si $f(t) = x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ cela veut donc dire que pour une coordonnées au moins, on a $x_i(t) \to \infty$ quand $t \to t_0$, $t \neq t_0$.

$$\boxed{\text{Dans la suite on fixe } n = 2 \text{ (Courbes planes)}}$$

Définition 1.4.2. On dit que la courbe $(x(t), y(t))$ a une *direction asymptotique* en t_0, si soit $\lim_{t \to t_0, t \neq t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \ell \in \mathbb{R}$ existe, ou bien $|\frac{y(t)}{x(t)}| \to \infty$. Dans le premier cas on dit que la droite $y = \ell x$ est la direction asymptotique, et dans le second cas c'est la droite $x = 0$, axe des y.

S'il y a une direction asymptotique (droite δ passant par l'origine), on dit qu'une droite Δ parallèle à δ est une *asymptote*, si en notant $h(t)$ la projection orthogonale de $f(t)$ sur Δ :

$$\boxed{\lim_{t \to t_0, t \neq t_0} \|f(t) - h(t)\| = 0}$$



D'une autre manière, soit Δ_t la droite parallèle à δ passant par $f(t)$. Si cette droite *tend* vers une position limite pour $t \to t_0$, cette position limite est Δ. Sinon si Δ_t s'éloigne à l'infini, on dit qu'on a une *branche parabolique* dans la direction de δ. Les exemples permettront de bien comprendre la manière d'étudier une branche infinie.

Dans la pratique on procède ainsi. Si $x(t)$ tend vers une valeur finie a et $y(t)$ tend vers l'infini, on dit que la droite $x = a$ est asymptote, et vice-versa si $y(t) \to b \in \mathbb{R}$. On suppose maintenant que *simultanément* $|x(t)|$ et $|y(t)|$ tendent vers ∞. Si $\ell = 0$, on a une branche parabolique dans la direction de l'axe des x, et une branche parabolique dans la direction de Oy si $\ell = \infty$.

Exemple typique la parabole $x = t^2$, $y = t$. De même si $\ell = \infty$, il y a une branche parabolique dans la direction de l'axe des y, exemple tout aussi typique, la parabole $x = t$, $y = t^2$.

Supposons maintenant ℓ fini. La projection orthogonale $h(t)$ de $f(t) = (x(t), y(t))$ sur la droite $y = \ell x + d$ est (calcul classique laissé en exercice)

$$h(t) = (\alpha \ell + x(t), -\alpha + y(t)), \ \alpha = \frac{-y + \ell x + d}{1 + \ell^2}$$

En particulier $\|f(t) - h(t)\|^2 = \frac{(y - \ell x - d)^2}{1 + \ell^2}$. En conséquence la droite $y = \ell x + d$ est asymptote $\iff$

$$\boxed{\lim_{t \to t_o, t \neq 0} y - \ell x - d = 0.}$$

En résumé :

Proposition 1.4.3. *S'il y a une direction asymptotique finie ℓ en $t \to t_0$, et si $\lim_{t \to t_0, t \neq t_0} y - \ell x = d$, la droite $y = \ell x + d$ est asymptote.*

Pour trouver l'équation de l'asymptote, on peut prendre un développement dit '*asymptotique* "de $x(t)$ et de $y(t)$ lorsque $t \to t_0$. Cela revient à prendre (par exemple) un développement en puissance de t, pour faire apparaître les termes qui tendent vers l'infini (en $\frac{1}{t}$), et à les comparer.

Exemple 1.4.4. $x(t) = t + \dfrac{1}{t}$, $y = \sqrt{t^2 + \dfrac{1}{t^2}}$ définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Notons qu'il y a une branche infinie en $t \to \pm\infty$ (il y a branche infinie si $t \to 0$ aussi, mais comme la courbe est invariante par $t \mapsto \frac{1}{t}$, et est symétrique par rapport à l'axe des x, on peut se limiter à $t \geq 1$). On peut écrire pour $t \to \infty$: $y(t) = t\sqrt{1 + \frac{1}{t^4}}$, et par un développement limité de $\sqrt{1 + \frac{1}{t^4}}$ par rapport à $u = \frac{1}{t} \to 0$, on peut écrire

$$y(t) = t(1 + \frac{1}{2t^4} + \circ(\frac{1}{t})\frac{1}{t^4}) = t + \frac{1}{2t^3} + \frac{1}{t^3} \circ (1)$$

Donc $y(t) = x(t) + O(\frac{1}{t})$, et l'asymptote est en conséquence $y = x$.

1.5 Convexité d'une courbe régulière

Etudier la convexité d'une courbe plane paramétrée régulière $f(t) = (x(t), y(t))$ supposée deux fois dérivable, c'est étudier dans quel sens varie le vecteur vitesse $f'(t) = (x'(t), y'(t))$ (et dans le dernier chapitre étudier la courbure consistera à préciser la rapidité de cette variation). On considère pour ceci la pente $g(t) = y'(t)/x'(t)$ (au moins aux points où $x'(t) \neq 0$ sinon on change le rôle de x et de y).

La dérivée $g'(t) = (x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))/x'^2(t)$ est du signe de $\delta(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$. D'où la définition naturelle suivante :

Définition 1.5.1. En un point de paramètre t le vecteur vitesse et donc la courbe *tourne vers la gauche* si et seulement si $\delta(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) \geq 0$. On dit aussi dans ce cas que la *convexité de la courbe est située à gauche*. Dans le cas contraire, la courbe *tourne vers la droite* et *la convexité de la courbe est située à droite*. Un point où la convexité change de côté est appelé *point d'inflexion*.

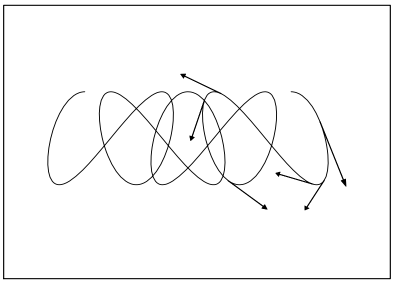


FIGURE 1.11 – Comment tourne le vecteur tangent

On remarquera que dans le cas du paramétrage $f(t) = (t, h(t))$ du graphe d'une fonction deux fois dérivable $h(t)$, on a $\delta(t) = h''(t)$ et donc la courbe tourne vers la gauche si et seulement si le graphe est convexe.

Proposition : Si $\delta > 0$ en un point, la courbe est localement entièrement située à gauche de la tangente (orientée par le vecteur tangent).

Preuve : Taylor.

1.6 Construction des courbes paramétrées planes

Soit la courbe $f(t) = (x(t), y(t))$. La démarche à suivre pour construire cette courbe est la suivante ; noter qu'elle prolonge celle classique pour étudier le graphe $x \to (x, y(x)))$ de la fonction scalaire $x \to y(x)$:

1. Trouver le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f (le domaine de définition commun à $x(t)$ et $y(t)$) et les axes de symétrie éventuels ;
2. Etudier le sens de variation de $x(t)$ et $y(t)$, en général par le signe de $x'(t)$ et de $y'(t)$.
3. Déterminer les branches infinies et les asymptotes éventuelles.
4. Détermine les points singuliers et leurs nature : inflexions, rebroussements ...
5. Si on le peut, étudier la convexité c'est-à-dire le signe de $\delta(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$.

Exemple 1.6.1. Soit la courbe $x(t) = t + \dfrac{1}{t}$, $y = t^2 + \dfrac{2}{t}$.

$\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{0\}$ et $x'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$, $y'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^2}$. L'unique point stationnaire est pour $t = 1$ et on a $x''(t) = \dfrac{2}{t^3}$, $y''(t) = 2 + \dfrac{4}{t^3}$ et $x'''(t) = -\dfrac{6}{t^4}$, $y'''(t) = -\dfrac{12}{t^3}$ et donc $(x''(1), y''(1)) = (2, 6)$ est linéairement indépendant de $(x'''(1), y'''(1)) = (-6, -12)$. Le point singulier $S = (2, 3)$ est un rebroussement de 1-ère espèce.

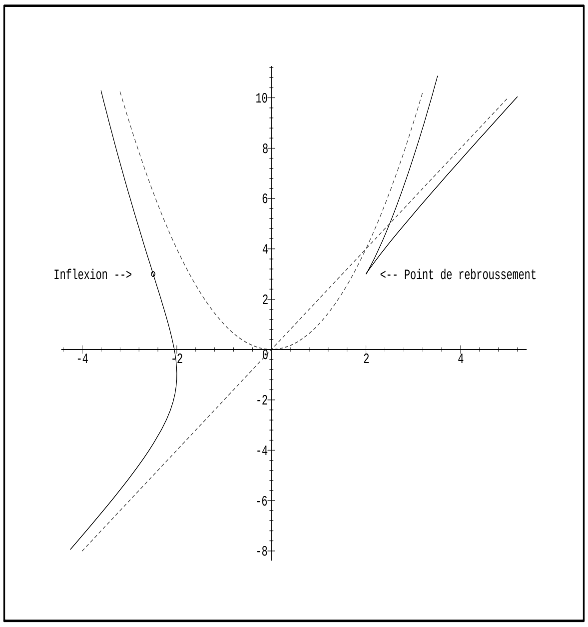
Au passage, un calcul facile donne $\delta(t) = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 2\dfrac{t^3 - 3t + 2}{t^3} = \dfrac{2(t-1)^2(t+2)}{t^3}$, donc la convexité change de côté, au point singulier S et au point d'inflexion $I = (x(-2), y(-2)) = (-5/2, 3)$.

Les branches infinies sont lorsque $t \to \pm\infty$ et $t \to 0$. Si $t \to 0$, la courbe est clairement asymptote à la courbe $t \mapsto (1/t, 2/t)$ c'est-à-dire à la droite d'équation $y = 2x$. Si $t \to \pm\infty$, la courbe est clairement asymptote à la courbe $t \mapsto (t, t^2)$ c'est-à-dire à la parabole d'équation $y = x^2$.

Tableau de variation :

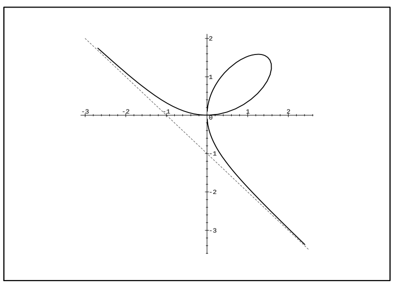
t	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
x'		$+$	$3/4$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	$-5/2$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$	$-9/2$	$-$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\searrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe :



Exercices :

1. Etudier et construire la courbe (Folium de Descartes) d'équation cartésienne $x^3 + y^3 = 3xy$ et paramétrée par $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$
   Solution : Le graphe est indiqué ci-dessous. L'asymptote en la branche infinie $t = -1$ s'obtient facilement : on a
   $$y + x = \frac{3t(1+t)}{1+t^3} = \frac{3t}{1-t+t^2}$$
   D'où $\lim_{t\to-1} t + x = -1$. L'asymptote est la droite $y + x = -1$.

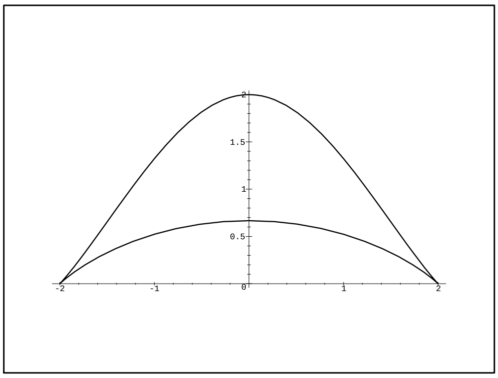


2. Equations des asymptotes à la courbe $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$.
   Solution : $x = \frac{-1}{2}$, $2x - 4y - 3 = 0$.

3. Tableau des variations et graphe de la courbe $x = 2\sin t$, $y = \dfrac{2\cos^2 t}{2+\cos t}$.
   Solution : Le domaine de définition est $\mathbb{R}$. Il n'y a pas de branches infinies. Par périodicité, on peut limiter l'étude à $[-\pi, \pi]$. Comme par $t \to -t$, x change de signe, mais pas y, Oy est un axe de symétrie. On trace la courbe sur $t \in [0, \pi]$. On a $x' = 2\cos t$ et de $y' = -\dfrac{2\sin t\cos t(4+\cos t)}{(2+\cos t)^2}$ et donc $t = \pi/2$ est un point singulier.

t	0		$\pi/2$		π
x'	2	$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0
y'	0	$-$	0	$+$	0
y	$2/3$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Pour étudier le point singulier $t = \pi/2$, le mieux est de prendre un développement limité de x et y en h, avec $t = \pi/2 + h$. On trouve alors un point de rebroussement de 1-ère espèce.



1.7 Courbes planes en coordonnées polaires

Représentation paramétrique en coordonnées polaires

L'utilisation des coordonnées polaires permet une approche simplifiée pour certaines courbes paramétrées. Cette section est une suite de remarques et d'exemples en complément à l'étude générale. On se place toujours dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé canonique (O, i, j), avec x, y les coordonnées correspondantes, qui sera éventuellement identifié au plan complexe. En effet on va passer des coordonnées (x, y) aux coordonnées **polaires** (r, θ) liées par

$$x = r\cos\theta\,,\ y = r\sin\theta$$

Définition 1.7.1. Une courbe est dite définie paramétriquement en coordonnées polaires, si on a deux fonctions (supposée dérivables autant de fois que nécessaire) $r(t)$ et $\theta(t)$ telles que

$$\overrightarrow{OM(t)} = r(t)(\cos\theta(t)\,,\ \sin\theta(t))$$

soit

$$\boxed{x(t) = r(t)\cos\theta(t)\,,\ y(t) = \sin\theta(t)}$$

C'est en fait simplement un *exemple de représentation paramétrique*. On notera qu'on impose pas $r(t) \geq 0$!. Cela permet comme on va le voir un traitement spécifique le la courbe.

Exemple 1.7.2 (Droite ne passant pas par l'origine)**.** Soit l'équation cartesienne de la droite

$$ax + by = c \neq 0, \quad a^2 + b^2 = 1$$

Posons $a = \cos\alpha\,, b = \sin\alpha$, alors si $x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta$, on obtient

$$r\cos(\theta - \alpha) = c \Longleftrightarrow \frac{c}{r} = \cos(\theta - \alpha)$$

La représentation paramétrique en coordonnées polaires est

$$\boxed{\theta = t \quad , \quad r(t) = \frac{c}{\cos(t-\alpha)}}$$

il est souvent préférable de garder l'équation sous la forme $\frac{1}{r} = \frac{\cos(\theta-\alpha)}{c}$, le paramètre étant l'angle polaire θ.

Exemple 1.7.3 (Cercle de centre l'origine)**.** Si le rayon est $\rho > 0$, le cercle a pour équation paramétrique en polaires

$$\boxed{r(\theta) = \rho = cte}$$

Exemple 1.7.4 (Le Limaçon de Pascal)**.** Soit le cercle de centre $I = (a, 0)$ de rayon a. Une droite d'angle polaire θ passant par l'origine coupe le cercle en O et un autre point N ($N = O$ si la droite est verticale), avec

$$\overrightarrow{ON} = (2a\cos\theta)(\cos\theta\,,\,\sin\theta)$$

Soit le point M situé sur la demi-droite OM tel que

$$\overrightarrow{OM} = (2a\cos\theta + b)(\cos\theta\,,\,\sin\theta), \quad b > 0$$

Lorsque θ varie entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, le point $M(\theta)$ décrit une courbe dite le "Limaçon de Pascal". Son équation paramétrique en coordonnées polaires est donc

$$\boxed{t = \theta, \quad r(\theta) = 2a\cos\theta + b}$$

Dans le cas général, étudions le vecteur tangent à la courbe représentée par

$$\boxed{x(t) = r(t)\cos\theta(t)\,,\; y(t) = r(t)\sin\theta(t)}$$

Définissons un repère orthonormé (qui dépend de t) par :

$$\overrightarrow{u}(t) = (\cos\theta(t)\,, \sin\theta(t))\ ,\ \overrightarrow{v}(t) = (-\sin\theta(t)\,,\,\cos\theta(t))$$

Alors en dérivant par rapport à t, on trouve

Proposition 1.7.5. *Le vecteur tangent au point de paramètre t est :*

$$\boxed{\mathbf{t}(t) = r'(t)\overrightarrow{u}(t) + r(t)\theta'(t)\overrightarrow{v}(t)}$$

Supposons $\boxed{\theta(t) = t}$*. On a alors :*

1. *on a un point stationnaire ssi $r(\theta) = r'(\theta) = 0$. Le point est donc l'origine $O = (0, 0)$.*

2. *Les directions tangentielles à l'origine (éventuelles) sont les droites d'angles polaires θ, solution de $r(\theta) = 0$.*

Démonstration : Pour le dernier point, on note que si $r(\theta) = 0$ (et $r'(\theta) \neq 0$)), alors le vecteur tangent est proportionnel à $u(\theta)$. □

Remarque. • Supposons $\theta = t$. Si la courbe définie paramétriquement par $r = r(\theta)$ a un point d'inflexion en $M(\theta)$(point régulier) alors

$$\boxed{r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0}$$

au point θ. On doit en effet écrire que les vecteurs vitesse et accélération sont colinéaires, le résultat découle du calcul qui précède, joint à l'exercice de dessus. L'inflexion ordinaire, la seule considérée dans ce cours, correspond au cas $p = 1, q = 3$ de la section 2.4. Pour avoir une inflexion ordinaire il faut donc en plus s'assurer en plus de la relation de dessus que $q = 3$.

• Si la courbe passe par l'origine, donc $r(\theta) = 0$ a une solution au moins, la tangente en O, correspondante à θ_0, tel que $r(\theta_0) = 0$, est la droite de pente θ_0. En effet,

$$\frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \text{tg}\theta \to \text{tg}\theta_0$$

si $\theta \to \theta_0$ (∞ si $\cos\theta_0 = 0$). La tangente a donc pour pente θ_0 ou ∞.

Représentation graphique

Dorénavant on suppose $\boxed{\theta = t}$. La représentation graphique d'une courbe d'équation polaire $r = r(\theta)$, utilise quelques aménagements par rapport à la méthode générale. On évite en général de repasser aux coordonnées cartésiennes!. L'exception est l'étude des points singuliers. On doit donc en général
i) Examiner les symétries éventuelles de le courbe, pour réduire le domaine d'étude.
ii) Etudier les branches infinies éventuelles $|r(\theta)| \to \infty$ si $\theta \to \theta_0$.
iii) S'appuyer sur le signe et les variations de $r(\theta)$ avec parfois l'étude de quelques tangentes particulières (parallèles aux axes en général) pour conclure le tracé de la courbe.

Précisons la manière de développer ces trois points.

Pour i) cela sera clair sur un exemple, les propriétés de périodicité de $r(\theta)$, fournissent une invariance par rotation.

Pour ii) on notera que $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\theta$, donc la direction asymptotique est donnée par le vecteur $\overrightarrow{u}(\theta_0)$, i.e la direction d'angle polaire θ_0. Pour vérifier s'il y a une asymptote correspondant à cette direction, on doit projeter orthogonalement $M(\theta)$ en $H(\theta)$ sur la droite direction asymptotique (qui passe par l'origine) et montrer que $\|M(\theta)H(\theta)\|$ a une limite si $\theta \to \theta_0$.
Pour évaluer cette distance, il est commode d'exprimer $\overrightarrow{OM}(\theta)$ sur la base orthonormée directe

$$\overrightarrow{u}_0 = \cos\theta_0 \overrightarrow{i} + \sin\theta_0 \overrightarrow{j}, \overrightarrow{v}_0 = -\sin\theta_0 \overrightarrow{i} + \cos\theta_0 \overrightarrow{j}$$

On a par inversion de ces relations

$$\overrightarrow{i} = \cos\theta_0 \overrightarrow{u}_0 - \sin\theta_0 \overrightarrow{v}_0\,,\ \overrightarrow{j} = \sin\theta_0 \overrightarrow{u}_0 + \cos\theta_0 \overrightarrow{v}_0$$

Donc $\overrightarrow{OM}(\theta) =$

$$r(\theta)\left(\cos\theta(\cos\theta_0 \overrightarrow{u} - \sin\theta_0 \overrightarrow{v}) + \sin\theta(\sin\theta_0 \overrightarrow{u} + \cos\theta_0 \overrightarrow{v})\right)$$

$$= r(\theta)\left((\cos(\theta-\theta_0)u_0 + \sin(\theta-\theta_0)v_0\right)$$

On obtient la distance cherchée en prenant la valeur absolue de la composante sur v_0 :

$$\|MH\| = |r(\theta)\sin(\theta-\theta_0)|$$

expression qui doit donc avoir une limite pour qu'il ait une asymptote de direction d'angle polaire θ_0. Dans ce cas, si

$$\boxed{\lim_{\theta\to\theta_0} r(\theta_0)\sin(\theta-\theta_0) = h}$$

la droite asymptote est celle d'équation ($<.,.>$) = produit scalaire)

$$\boxed{< \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v}_0 >= h}$$

Par exemple si $\theta_0 \equiv 0 \pmod{\pi}$, la direction asymptotique est Ox, et il y a asymptote si

$$\lim_{\theta\to\theta_0} y(\theta) = r(\theta)\sin\theta = d$$

existe. Si $\theta_0 \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$, on notera que d'une autre manière, et plus directement (section précédente), il y a asymptote ssi

$$y - x\mathrm{tg}\theta_0 = \frac{r(\theta)\sin(\theta-\theta_0)}{\cos\theta_0} \to d$$

l'asymptote est la droite $\boxed{y = \mathrm{tg}\theta_0\ x + d}$.

Symétries

Il est fréquent qu'une courbe définie en coordonnées polaires $r = r(\theta)$ présente des symétries, invariance par une rotation, et (ou) symétrie relativement à une droite passant par l'origine.

Proposition 1.7.6. *Si $r(\theta+\alpha) = r(\theta)\ \forall\theta$), ce qui implique pour le domaine de définition $I+\alpha = I$, alors la courbe est invariante par rotation d'angle α.*

Démonstration : Ecrivons $f(\theta) = r(\theta)e^{i\theta}$. la rotation d'angle α a pour expression $z \mapsto e^{i\alpha}z$. Donc $e^{i\alpha}f(\theta) = r(\theta)e^{i(\alpha+\theta)}$ et par l'hypothèse $= r(\theta+\alpha)e^{i(\alpha+\theta)} = f(\theta+\alpha)$. □

La symétrie relativement à la droite d'angle polaire α est $z \mapsto e^{2i\alpha}\overline{z}$ (le vérifier).

Proposition 1.7.7. *Si $r(2\alpha - \theta) = r(\theta)$, la courbe admet la droite d'angle polaire α pour axe de symétrie.*

Démonstration : On a $e^{2i\alpha}\overline{r(\theta)e^{i\theta)}} = r(\theta)e^{i(2\alpha-\theta)}$, qui donne par l'hypothèse

$$= r(2\alpha - \theta)e^{i(2\alpha-\theta)} = f(2\alpha - \theta)$$

□

Exemple 1.7.8 (La fleur à trois pétales, ou rosace à trois boucles, ou trifolium régulier)**.** est la courbe donnée par en coordonnées polaires par

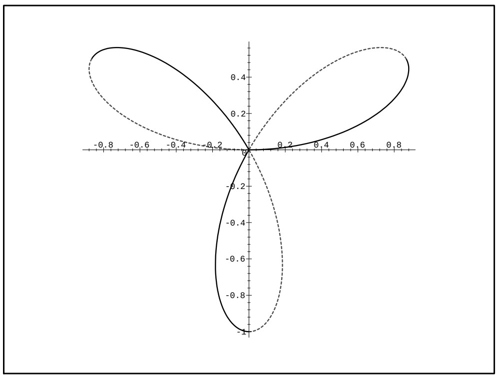
$$r(\theta) = \sin 3\theta$$

On observe d'abord que r est périodique de période 2π, et que $r(-\theta) = -r(\theta)$, donc $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe des y. On a aussi $r(\theta + \frac{2\pi}{3}) = r(\theta)$, donc $M(\theta + \frac{2\pi}{3})$ se déduit de $M(\theta)$ par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, en fait la périodicité de r est de $\frac{2\pi}{3}$. On peut ainsi limiter l'étude à un intervalle d'amplitude $\frac{\pi}{3}$, par exemple $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

Sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ la fonction $r(\theta)$ est positive, croissante sur $[0, \frac{\pi}{6}]$, décroissante sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, avec un maximum en $\frac{\pi}{6}$. Noter que si $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$

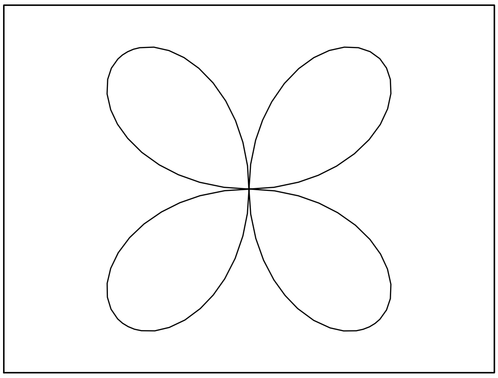
$$r(\frac{\pi}{3} - \theta) = \sin(\pi - 3\theta) = r(\theta)$$

Donc la droite d'angle polaire $\theta = \frac{\pi}{6}$ est un axe de symétrie pour la partie du graphe limitée à $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$, en fait pour toute la courbe. Il se déduit de Oy par rotation, et pour cette raison la droite d'angle polaire $\theta = \frac{5\pi}{6}$ est aussi un axe de symétrie. Enfin en $\theta = 0$, la tangente est l'axe des x. On peut imaginer le graphe d'abord sur $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$, puis par les symétries et la rotation, le prolonger. Noter que les tangentes au point $O = (0, 0)$ sont données par les solutions de l'équation $\sin 3\theta = 0$, donc sont d'angle polaire $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ modulo π.



Trifolium

Sauriez vous donner une équation polaire du trèfle à quatre feuille ci-dessous ?



Trèfle à 4 feuilles

Exemple 1.7.9. *La spirale logarithmique :* elle est donnée par $r = e^{m\theta}$, $m > 0$. Cette courbe est liée au mathématicien Suisse Jacques Bernoulli. Dans la cathédrale de Bële, on trouve la pierre tombale, qui suggère semble t'il, une spirale d'Archimède !

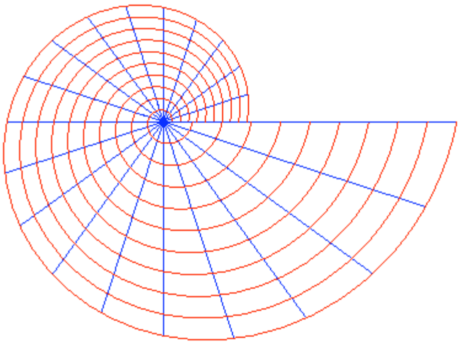
Pour $m = 0$, c'est le cercle unité. On voit que $r(\theta) \to \infty$ si $\theta \to \infty$, et $r(\theta) \to 0$ si $\theta \to -\infty$. De plus r est croissante. L'observation importante qui permet d'avoir une vision plus précise du tracé de la courbe est que le vecteur tangent au point de paramètre θ est

$$\mathbf{t}(\theta) = e^{m\theta}(m\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$$

Il fait donc avec $\overrightarrow{u}$ un angle constant V, tel que

$$\cos V = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

Au point de paramètre $\theta = 0$, le vecteur tangent est $(m, 1)$. Par ailleurs la courbe coupe l'axe des x si $\cos\theta = 0$, donc pour $\theta = k\pi$. Le point correspondant tend vers l'infini si $k \to \infty$, et vers zéro si $k \to -\infty$. La courbe *spirale* autour de l'origine en s'éloignant lorsque $\theta \to \infty$.



Courbes fermées

Dans un certain nombre d'exemples la fonction $f(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ était périodique, par exemple : le cercle, le trèfle à trois feuilles, certaines courbes de Lissajous (**??**). La définition est la suivante :

Définition 1.7.10. Une courbe paramétrée $t \mapsto f(t) = (x(t), y(t))$ est dite fermée si elle est définie sur $\mathbb{R}$, et s'il existe $T > 0$ tel que $f(t+T) = f(t)\, \forall t \in \mathbb{R}$.

La courbe est donc entièrement déterminée par la restriction de f à l'intervalle *période* $[0, T]$. Noter que $f'(t)$ est alors T-périodique, c'est à dire que $x'(t)$ et $y'(t)$ le sont. Notons en passant un fait général sur les fonctions continues périodiques (non constantes)

Le tracé de la courbe $f(t)$ de période T sur $[0, nT]$ revient à parcourir n fois la boucle fondamentale $f([0, T])$. Le changement du paramètre t en at $(a \neq 0)$ change la période fondamentale T en $\frac{T}{|a|}$.

Si la courbe est donnée en coordonnées polaires, elle est fermée si $r(\theta)$ est périodique de période $T = r\pi$ où $r \in \mathbb{Q}$.

Naturellement une courbe fermée peut se recouper en plusieurs points comme on peut le voir sur des exemples : trèfle, lemniscate,....

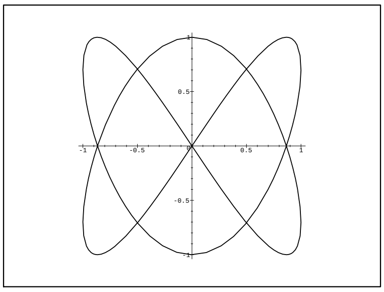
Exemple 1.7.11. Courbes de Lissajous :
Les courbes de Lissajous, classiquement visibles sur l'écran d'un oscilloscope, sont comme indiqué dans l'introduction les courbes $\mathcal{L}_{a,b}$ données paramétriquement par

$$\boxed{x = \sin t\,,\ y = \sin(at+b), \quad t \in \mathbb{R}}$$

pour deux paramètres $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Le design de ces courbes est sensible à la valeur des constantes a, b. Ce qui est commun à toutes ces courbes, est le fait qu'elles sont contenues dans la "boite" $[-1,1]\times[-1,1]$ (écran de l'oscilloscope). Si $a = 1, b = \pi/2$, on a le cercle unité. Si a n'est pas rationnel ($a \notin \mathbb{Q}$), la courbe devient compliquée, elle est "dense" dans le carré $[-1,1]\times[-1,1]$. On va se concentrer sur la courbe $\mathcal{L}_a$ ($b = 0$), d'abord le cas typique $a = 3/2$. Dans cet exemple, on note tout d'abord que $f(t)$ est 4π-périodique, on peut donc se limiter à l'étudier sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. Comme par $t \mapsto -t$, x et y changent de signe, manifeste d'une symétrie par rapport à l'origine, on se limite à $[0, 2\pi]$. Enfin, par $t \mapsto 2\pi - t$, x change de signe, et y ne change pas, montrant que l'axe Oy est un axe de symétrie. On se limite finalement à $[0,\pi]$. On a $x'(t) = \cos t\,,\ y'(t) = \frac{3}{2}\cos\frac{3}{2}t$. Il est visible qu'il n'y a pas de point singulier. Pour $t \in [0,\pi]$, les points à tangente horizontale sont $t = \frac{\pi}{3}$, et à tangente verticale $t = \frac{\pi}{2}$. D'où le tableau de variation de x et y.

t	0	$\pi/2$	π
x'	$+$		$-$
x	$\nearrow$		$\searrow$
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

Les informations obtenues et une étude précise de la convexité justifieraient le graphe suivant pour $\mathcal{L}_{3,2}$:



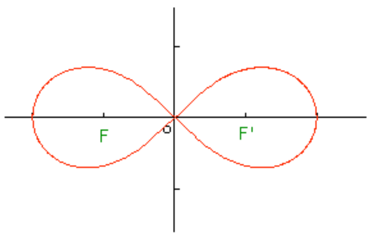
Courbe de Lissajous $x(t) = \sin 2t, y(t) = \cos 3t$

On peut montrer que si $a \notin \mathbb{Q}$, alors lorsque t parcours $\mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{L}_a$ "recouvre" le carré $[-1,1]^2$. De manière plus précise, tout point du carré peut être approché d'aussi près que l'on veut par un point de la courbe de Lissajous $\mathcal{L}_a$, cette courbe est *dense* dans le carré.

Exemple 1.7.12. La lemniscate [1] : C'est l'ensemble des points $M = (x,y)$ du plan qui satisfont à la relation

$$MF.MF' = a^2$$

où $F = (a,0)$ et $F' = (-a,0)$ sont deux points fixés appelés *pôles*. Un calcul immédiat montre qu'un point de cette lemniscate satisfait à l'équation cartésienne $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$. On en déduit l'équation polaire de la lemniscate $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ et on peut vérifier que $t \mapsto \left(a\sqrt{2}\dfrac{t(1+t^2)}{1+t^4}\,,\ a\sqrt{2}\dfrac{t-t^3}{1+t^4}\right)$ en est une représentation paramétrique.

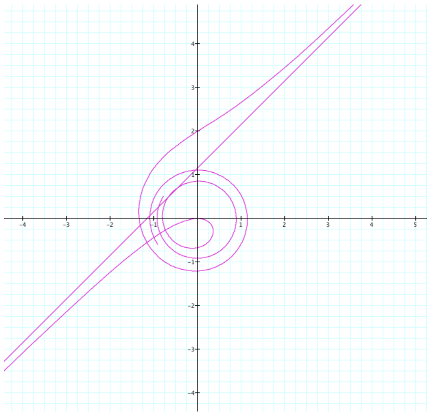


Lemniscate de paramètre a=2

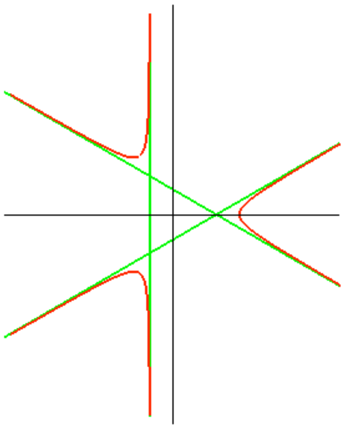
1. La forme de la lemniscate serait à l'origine du symbole ∞

Exercices : § 1.6

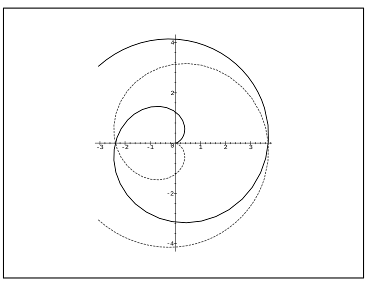
1. Etudier et représenter la courbe $r = \sin \frac{3\theta}{2}$.
2. Montrer que si $r(-\theta) = -r(\theta)$, l'axe Oy est un axe de symétrie.
3. Représenter graphiquement le limaçon de Pascal $r(\theta) = \cos\theta + 1$.
4. (Examen juin 2006) Etudier les branches infinies de la courbe $r = \frac{\theta}{\theta - \pi/4}$. Tracer la courbe.
   Solution



5. (Le trèfle équilatère) Etudier (branches infinies, et graphe) la courbe donnée en coordonnées polaires par $r = \frac{1}{\cos 3\theta}$. Expliciter l'équation cartésienne.
   Solution



6. Montrer que $\mathcal{L}_a$ est une courbe fermée (pour un certain α on a $f(t+\alpha) = f(t)\, \forall t$) si et seulement si $a \in \mathbb{Q}$.
7. Montrer que le vecteur accélération est $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (r'' - r\theta'^2)\overrightarrow{u} + (r\theta'' + 2r'\theta')\overrightarrow{v}$ Cas particulier $\theta = t$.
   Solution : On dérive une fois de plus l'expression donnant $f'(t)$, cela donne
   $$f''(t) = r''(t)u + (-r'\theta' \sin\theta - r\theta'^2 \cos\theta)i + (r\theta' \cos\theta' - r\theta'^2 \sin\theta)j + (r'\theta' + r\theta'')v$$
   en notant (i, j) le repère standard. On exprime les relation donnant i et j en fonction de u, v, et on a le résultat
8. (*CC 2006*) Soit la courbe définie en coordonnées polaires par
   $$r = \ln(1 + \theta^2)$$
   i) Montrer que la courbe a un point stationnaire dont on discutera la nature.
   ii) Montrer que l'axe Ox est un axe de symétrie. Tracer la courbe relativement à l'intervalle $\theta \in [-\frac{11\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}]$.
   Solution :



9. Montrer que la courbe de Lissajous $\mathcal{L}_a$ est une courbe fermée si et seulement si $a \in \mathbb{Q}$.

1.8 Longueur d'arc

Revenons brièvement à un cadre général. Soit une courbe paramétrée $t \to f(t) \in \mathbb{R}^n$ définie sur I. On supposera sans le redire que $f(t)$ est dérivable à dérivée continue, eventuellement dérivable à un ordre assez grand en fonction des besoins. En toute valeur du paramètre t, le **vecteur tangent** $\frac{df}{dt}$ est défini, sa **longueur** est

$$\boxed{\|\frac{df}{dt}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'(t)^2}}$$

Définition 1.8.1. Soit un arc de courbe paramétrée $t \to f(t)$, et soit $a, b \in I$ (on ne suppose pas $a < b$). L'intégrale

$$\int_a^b \|f'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i'(t)^2 dt}$$

est appelée la **longueur de l'arc** (noté $L_{(a,b)}(f)$). Si $t_0 \in I$, la fonction

$$t \mapsto L_{[t_0,t]}(f) = \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|du$$

est dite fonction longueur d'arc. Les propriétés de la fonction longueur d'arc, découlent de la formule de changement de variable dans une intégrale définie. On l'utilise sous la forme suivante :

Formule de changement de variable : Soit une fonction définie continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \cong [a, b],\ \alpha < \beta,\ a < b$ un changement de variable. Attention, on ne suppose pas $\varphi'(s) > 0$, donc les bornes peuvent être échangées par $s \mapsto t(s)$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(s))|\varphi'(s)|ds$$

On remarquera que si on effectue un changement de variable $s \mapsto t = t(s) : (\alpha, \beta) \to (a, b)$, avec $\alpha < \beta$, $a < b$, alors soit $t'(s) > 0$ $(\forall s)$ et t est une fonction croissante, soit $t'(s) < 0$ $(\forall s)$ et t est décroissante.

Proposition 1.8.2. *1) (Additivité par rapport à l'arc) On suppose que $a, b, c \in I$. Alors*

$$L_{(a,b)}(f) = L_{(a,c)}(f) + L_{(c,b)}(f)$$

2) (invariance par changement de paramètre) Soit $s \to t(s)$, $[\alpha, \beta] \overset{\varphi}{\to} [a, b]$ $(\alpha < \beta,\ a < b)$ un changement de paramètre (on impose $t'(s) \neq 0 :, \forall s$), alors

$$\int_\alpha^\beta \|\frac{df(t(s))}{ds}\|ds = \int_a^b \|f'(t)\|dt$$

Démonstration : Le point 1) est clair car il ne fait que traduire la propriété d'additivité de l'intégrale définie ordinaire par rapport aux bornes d'intégration.
2) C'est le point le plus important. Notons la propriété de dérivation des fonctions composées

$$\frac{d}{ds}(f(t(s)) = \frac{d}{dt}f(t) \times t'(s)$$

donc en prennant la longueur des deux membres, on obtient

$$\|\frac{df}{ds}\| = \|\frac{df}{dt}\||t'(s)|$$

On reporte dans l'intégrale et on trouve en invoquant la formule de changement de variable

$$\int_{(\alpha,\beta)} \|\frac{df(t(s))}{ds}\|ds = \int_\alpha^\beta \|\frac{df}{dt}\||t'(s)|ds = \int_a^b \|\frac{df}{dt}\|dt$$

□

On traduit cette proposition en disant que la longueur d'un arc de courbe paramétrée ne dépend réellement que de la **courbe**, et non du choix du paramétrage. Cela justifie qu'on appelle γ une courbe, et $t \mapsto f(t)$ une représentation. Changer le paramétrage, ne change pas la courbe. On parlera de longueur d'arc de γ.

Exemple 1.8.3. Soit à calculer la longueur de l'arc de cercle de rayon un, d'angle au centre θ. On choisit une représentation paramétrique de l'arc de cercle, par exemple $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. C'est donc l'intégrale

$$\int_0^\theta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_0^\theta dt = \theta$$

Exemple 1.8.4. Calculons la longueur d'arc d'une arche de cycloïde, c'est à dire sur $[0, 2\pi]$. La fonction longueur d'arc est

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2(1 - \cos u)}\, du = \int_0^t \sqrt{4\sin^2 u/2}\, du$$

et le sinus étant ≥ 0, $s(t) = 2\int_0^t \sin u/2\, du = 4(-\cos t/2 + 1)$. La longueur de l'arche est 8.

Définition 1.8.5. Soit une courbe $t \mapsto f(t)$ définie sur un intervalle $J = [a, b]$. On dit que la courbe est **paramétrée par la longueur d'arc** si pour tout $t \in J$, $\|\frac{df}{dt}\| = 1$. On notera que cela entraîne qu'il n'y a pas de point stationnaire.

Exemple 1.8.6. Le cercle unité dans son paramétrage $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ est paramétré par la longueur d'arc. En effet $x'^2 + y'^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Pour expliquer la terminologie, notons que si la courbe $t \mapsto f(t)$ est paramétrée par la longueur d'arc, disons sur $J = (a, b)$, alors si $t_0 \in J$, l'intégrale qui donne la longueur de d'arc de t_0 à $t \geq t_0$ est

$$\int_{t_0}^t \|\frac{df}{dt}\| dt = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

et $-t + t_0$ si $t \leq t_0$. Donc le paramètre $\pm t$ mesure bien la longueur d'arc, à une constante de normalisation près, qui dépend de l'origine t_0.

Proposition 1.8.7. *On suppose la courbe régulière (sans point stationnaire) définie sur $J = [a, b]$. Alors la courbe peut être paramétrée par la longueur d'arc. D'une autre manière, on peut prendre pour paramètre la longueur d'arc $s(t) = \int_a^t \|f'(t)\| dt$.*
Si s et τ sont deux paramétrages par la longueur d'arc, alors on a $s = \pm\tau + c$ pour une certaine constante c.

Démonstration : Soit la fonction *longueur d'arc* $t \to s(t) = \int_a^t \|\frac{df}{dt}\| dt$ (on pourrait changer la borne d'intégration a en un point $t_0 \in J$ arbitaire). Du fait que le vecteur tangent est non nul en tout point, on a

$$\frac{ds}{dt} = \|f'(t)\| \neq 0$$

La fonction $t \to s(t)$ est alors une bijection croissante de $J = [a, b]$ sur son image, qui est un intervalle $[0 = \alpha, \beta]$. De plus cette fonction est dérivable ainsi que sa fonction réciproque, qu'on peut noter sans risque de confusion $s \to t(s)$ (penser au théorème sur les fonctions réciproques). Il s'agit de voir que si on prend comme paramètre s (la longueur d'arc), à la place de t, alors $\|\frac{df}{ds}\| = 1$. Mais

$$\|\frac{df}{ds}\| = \|\frac{df}{dt} \times t'(s)\| = \|\frac{df}{dt}\| \times \|\frac{df}{dt}\|^{-1} = 1$$

Montrons le second point. Soient deux paramètres s, τ tels que $\|\dfrac{df}{ds}\| = \|\dfrac{df}{d\tau}\| = 1$ On regarde s comme une fonction de τ. Comme $\frac{df}{d\tau} = \frac{df}{ds} \times s'(\tau)$, on voit en passant aux normes que $|s'(\tau)| = 1$. Comme la fonction $s'(\tau) = \pm 1$ est supposée continue sur un certain intervalle, on a soit $s'(\tau) = 1$ soit $s'(\tau) = -1\, (\forall\tau)$. Donc $s(\tau) = \pm\tau + cte$. □

Dans la suite la lettre s est réservée (c'est une habitude !) à un paramètrage par la longueur d'arc, donc tel que $\|\frac{df}{ds}\| = 1$.

Exemple 1.8.8. Soit le cas particulier du graphe $t \mapsto f(t) = (t, y(t))$ de la fonction $t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$. Alors $\|f(t)\| = \sqrt{1 + y'(t)^2}$. Donc la longueur d'arc de t_0 à t_1 est

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$$

Exercices : § 1.8

1. Calculer la longueur de l'arc de la spirale logarithmique $r = e^{-\theta}$ entre les points de paramètre 0 et ∞, cette longueur est comme le calcul le montre finie !
2. Soit la parabole $x = t$, $y = t^2$. Calculer la longueur de l'arc entre $t = 0$ et $t = 1$.
   Solution : On a $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt$. Pour calculer cette intégrale, poser $2t = \operatorname{sh}\alpha$.

1.9 Courbure des courbes planes

La courbure est une information locale qui mesure si la courbe tourne peu ou beaucoup en un point. Cela explique, ce qui est clair par ailleurs, qu'un cercle est de courbure constante et une droite de courbure nulle.

Soit une courbe plane (ou arc de courbe) $s \to f(s)$ paramétrée par longueur d'arc, c'est-à-dire (vu précédemment) que $||f'(s)|| = 1$ (la courbe est donc sans point stationnaire) et définie sur un intervalle I et dérivable autant de fois que nécessaire.

Proposition 1.9.1. *La courbe étant paramétrée par la longueur d'arc, le vecteur accélération $f''(s)$ est perpendiculaire au vecteur vitesse $\mathbf{t}(s) = f'(s)$:*

$$\boxed{<\mathbf{t}(s), f''(s)>= 0}$$

Démonstration : En dérivant $\|f'(s)\|^2 = x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ par rapport à s, on obtient :

$$2x'(s)x''(s) + 2y'(s)y''(s) = 0$$

d'où le résultat. □

Pour donner une première définition de la courbure, on part de l'idée qu'un cercle Γ de rayon $R > 0$ centré en 0 paramétré par longueur d'arc $s \in [0, 2\pi R] \mapsto f(s) = (R\cos(s/R), R\sin(s/R))$ a un rayon de courbure R et sa courbure est $K = 1/R$. On observe que $||f''(s)|| = 1/R$ d'où la

Première définition : *Soit une courbe $s \in I \mapsto f(s)$ paramétrée par longueur d'arc. La courbure en le point $f(s)$ de la courbe est le nombre $K(s) = ||f''(s)||$. Le rayon de courbure est $R(s) = 1/K(s)$.*

Cette définition est équivalente à la

Deuxième définition : Soit $\varphi(s)$ l'angle que fait le vecteur tangent $\mathbf{t}(s) = f'(s)$ avec la direction horizontale. On a $K(s) = |\varphi'(s)|$, autrement dit, *la courbure mesure la vitesse à laquelle tourne le vecteur tangent.*

Démonstration : On a $\varphi(s) = \arctan \dfrac{y'(s)}{x'(s)}$ et donc

$$\left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{(\frac{y'(s)}{x'(s)})'}{1+(\frac{y'(s)}{x'(s)})^2}\right| = \frac{|x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)|}{x'^2(s) + y'^2(s)} = \frac{||f' \wedge f''||}{||f'||^2} = \frac{||f'||.||f''||}{||f'||^2} = ||f''|| = K(s)$$

car $f' \perp f''$ et $||f'|| = 1$.

Cette deuxième définition permet de calculer la courbure $K(t)$ au point $f(t)$ d'une courbe régulière paramétrée par t d'une manière (régulière) quelconque. En effet, on a $t = t(s)$ en fonction de l'abscisse curviligne s et $\varphi(s) = \arctan \dfrac{y'(t(s))}{x'(t(s))}$ et donc

$$K = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{(\frac{y'(t)}{x'(t)})'}{1+(\frac{y'(t)}{x'(t)})^2}\right|\left|\frac{dt}{ds}\right| = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{x'^2(t) + y'^2(t)}\frac{1}{||f'||} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{||f'||^3} = \frac{||f' \wedge f''||}{||f'||^3}$$

D'où la formule à retenir

$$\boxed{K(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{||f' \wedge f''||}{||f'||^3} = \frac{|\det(f'(t), f''(t))|}{\|f'(t)\|^3}}$$

Cercle osculateur et développée d'une courbe

Soit C une courbe paramétrée par longueur d'arc $s \mapsto f(s)$.

En un point où la courbure $K(s) \neq 0$, on appelle *cercle osculateur* ou *cercle de courbure* en $f(s)$ à C l'unique cercle $\Gamma(s)$ vérifiant les 3 propriétés :

i) $\Gamma(s)$ est tangent à la courbe en $f(s)$.

ii) $\Gamma(s)$ a pour rayon le rayon de courbure $R(s) = 1/K(s)$.

iii) Le centre $O(s)$ (centre de courbure) se trouve du côté où la courbe tourne.

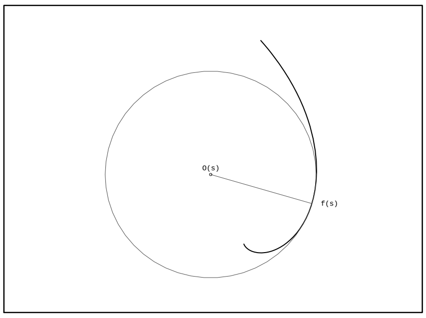


FIGURE 1.12 – Cercle de courbure ou osculateur

Construction : Le vecteur $N(s) = \frac{f''}{||f''||}$ est le vecteur normal unitaire dirigé vers le côté où tourne la courbe. On a donc $O(s) = f(s) + R(s)N(s) = f(s) + \frac{f''}{||f''||}$.

Donc, quand t est un paramètre quelconque, le centre de courbure $O(t)$ au point $f(t)$ est donné par :

$$O(t) = \left(x(t) - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}\right)$$

La nouvelle courbe D paramétrée $t \mapsto O(t)$ ainsi définie est appelée la *développée* de la courbe C. Dans le cas de la parabole paramétrée par $f(t) = (t, t^2/2)$ le calcul donne $O(t) = (-t^3, 1 + 3t^2/2)$ dont le graphe est :

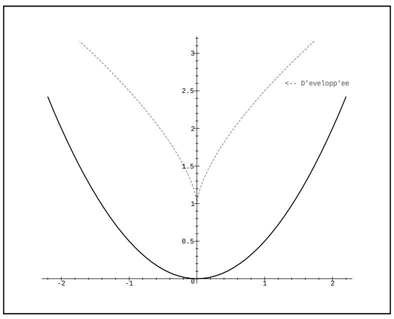


FIGURE 1.13 – Développée d'une parabole

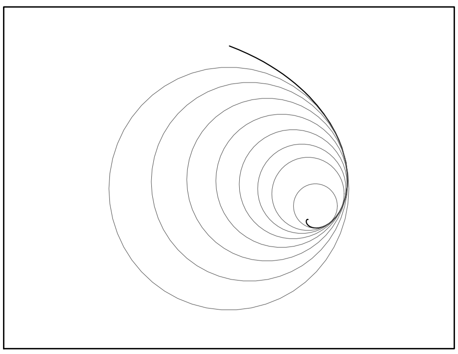


FIGURE 1.14 – Cercles de courbure

1.10 Repère de Frenet et courbure signée

Par **repère (ou base) orthonormé** de $\mathbb{R}^2$ on veut dire un couple $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ de deux vecteurs tels que

$$\|u\| = \|v\| = 1,\ < u, v >= 0$$

Les vecteurs u, v forment alors une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit $(u,\ v)$ un repère orthonormé avec $u=(a,b)$ il est facile de voir qu'alors $v=\epsilon(-b,a)$ où $\epsilon=\pm1$. Selon que $\det(u,v)=\epsilon$ est égal à $+1$ ou -1, on dit que le repère est *direct* ou *rétrograde*.

Une façon commode (bien qu'abusive) que nous aurons souvent (déjà utilisée pour les coordonnées polaires) sera d'assimiler un vecteur du plan $u=(a,b)$ à son affixe complexe $a+ib$. La norme de u est alors le module $|a+ib|$. Dire que (u,v) est orthonormé direct s'exprime simplement par $|a+ib|=1$ et l'affixe de v est $i(a+ib)=-b+ia$ (v s'obtient par rotation de $+\pi/2$ ce qui revient à la multiplication par i de l'affixe).

Soit une courbe plane γ (ou arc de courbe) paramétrée $s\mapsto f(s)$ par longueur d'arc sur un intervalle I. On a déjà introduit $\mathbf{t}(s)=f'(s)$ qui est unitaire et montré que l'accélération $f''(s)$ est orthogonale à $\mathbf{t}(s)$. Soit $\mathbf{n}(s)$ le vecteur unitaire directement orthogonal (ou normal) à $\mathbf{t}(s)$. Le repère $(\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s))$ est donc orthonormé direct. Le repère dépend de s, il est dit *mobile.*

Définition 1.10.1. Le repère orthonormé direct $(\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s))$ est appelé le **repère de Frenet** de la courbe paramétrée γ en s et $\mathbf{n}(s)$ la normale orientée (ou principale).

Remarques : 1) Noter que si la courbe est parcourue dans le sens opposé, le vecteur tangent unitaire $\mathbf{t}$ change de sens, ainsi que la normale $\mathbf{n}$.

2) Si la courbe est paramétrée par un paramètre quelconque t, au point de paramètre t, $\mathbf{t}=f'(t)/||f'(t)||$ et $\mathbf{n}$ est le vecteur directement normal à $\mathbf{t}$.

Exemple 1.10.2. 1) Pour le cercle unité $f(s)=(\cos s,\sin s)$, paramétré par la longueur d'arc, on a

$$\mathbf{t}(s)=(-\sin s,\cos s)\,,\ \mathbf{n}(s)=(-\cos s,-\sin s)=-f(s)$$

2) Soit la courbe *graphe du sinus* $t\mapsto f(t)=(t,\sin t)$. Elle est régulière en tout point. On a $f'(t)=(1,\cos t)$. Donc $\|f'(t)\|=\sqrt{1+\cos^2 t}$. On a $\mathbf{t}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}(1,\cos t)$, et $\mathbf{n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}(-\cos t,1)$.

L'accélération $f''(s)$ étant orthogonale à $\mathbf{t}(s)$, la fonction κ est bien définie par la $\mathbf{1}^{\text{ere}}$ **formule de Frénet**

$$\boxed{f''(s)=\mathbf{t}'(s)=\kappa(s)\mathbf{n}(s)}$$

Définition 1.10.3. *On appelle $\kappa(s)$ la* **courbure signée** *de la courbe au point de paramètre s et κ la* **fonction courbure signée**.
Si $\kappa(s)\neq 0$, on dit que $\rho(s)=\dfrac{1}{\kappa(s)}$ est le **rayon de courbure signé** *au point de paramètre s.*
La valeur absolue $K(s)=|\kappa(s)|$ est la **courbure** *(sans signe) déjà définie.*
Si $K(s)\neq 0$, on dit que $R(s)=\dfrac{1}{K(s)}$ est le **rayon de courbure** *au point de paramètre s ($R(s)=\infty$ si $K(s)=0$).*

En dérivant l'égalité $<\mathbf{t}(s),\mathbf{n}(s)>=0$, on trouve $<\mathbf{t}'(s),\mathbf{n}(s)>+<\mathbf{t}(s),\mathbf{n}'(s)>=0$.
Comme $\mathbf{t}'(s)=\kappa(s)\mathbf{n}(s)$, par substitution, cela donne $<\mathbf{t}(s),\mathbf{n}'(s)>=-\kappa(s)<\mathbf{n}(s),\mathbf{n}(s)>=-\kappa(s)$. En dérivant maintenant l'égalité $(\mathbf{n}(s),\mathbf{n}(s))=1$, on trouve que $\mathbf{n}'(s)\perp\mathbf{n}(s)$ donc $\mathbf{n}'(s)$ est proportionnel à $\mathbf{t}(s)$. L'égalité $<\mathbf{t}(s),\mathbf{n}'(s)>=-\kappa(s)$ indique le coefficient de proportionnalité.

On a ainsi la $\mathbf{2}^{\text{eme}}$ **formule de Frénet** :

$$\boxed{\mathbf{n}'(s)=-\kappa(s)\mathbf{t}(s)}$$

Remarque : Il faut noter que la courbure signée est sensible à l'orientation choisie. Si on change l'orientation, la fonction courbure change de signe. En effet si on prend comme paramètre $-s$, soit $g(s)=f(-s)$, alors $g'(s)=-\mathbf{t}(-s)$ donc le repère de Frenet devient

$$(-\mathbf{t}(-s)\,,\ -\mathbf{n}(-s))$$

Alors $\dfrac{d}{ds}(-\mathbf{t}(-s))=\kappa(-s)\mathbf{n}(-s)$ montre que la courbure est maintenant $-\kappa(-s)$, elle change de signe.

Exemple 1.10.4. Soit le cercle de rayon $r = 1$, centre $(0, 0)$, dans son paramétrage angulaire (par la longueur d'arc) usuel $x(\theta) = \cos\theta$, $y = \sin\theta$. On trouve

$$\mathbf{t}(\theta) = (-\sin\theta\,,\,\cos\theta)\,,\,\mathbf{n}(\theta) = -(\cos\theta, \sin\theta)$$

Donc $f''(\theta) = \mathbf{n}(\theta)$, de sorte que la courbure est constante égale à un.

Plus généralement, soit le cas du cercle de rayon $r > 0$. On prend encore le paramétrage $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Alors $\|f'(\theta)\| = r$ donc θ n'est pas (si $r \neq 1$) le paramètre longueur d'arc. Un paramétrage par la longueur d'arc est obtenu (fait général) par la fonction réciproque de $\theta \mapsto s = r\theta$, donc $\theta = \frac{s}{r}$. Donc

$$\mathbf{t}(s) = (-\sin\frac{s}{r}\,,\,\cos\frac{s}{r})\,,\,\mathbf{n}(s) = -(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r})$$

Soit finalement

$$f''(s) = \frac{1}{r}\mathbf{n}(s)$$

La courbure est donc constante égale à $\frac{1}{r}$, et le rayon de courbure constant en tout point égal à r. On traitera la réciproque dessous.

Dans la pratique une courbe est en général donnée relativement à un paramètre qui n'est pas la longueur d'arc. D'autre part la fonction longueur d'arc impose le calcul d'une intégrale, donc peut être un calcul difficile, sinon infaisable. Pour calculer la courbure, il n'est pas nécessaire de passer à un paramétrage par la longueur d'arc. Le prix à payer est une formule plus compliquée.

Soit $\mathbf{g}(s) = f(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s)))$ la même courbe, mais avec le paramètre $s =$ la longueur d'arc. Se souvenir qu'on a

$$t'(s) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

On a au point de paramètre $t = t(s)$, en notant que toute dérivation de x ou y est prise par rapport à t (est-ce suffisant pour éviter les confusions !) :

$$\mathbf{g}'(s) = \mathbf{t}(s) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}(x'(t), y'(t))$$

et en dérivant une seconde fois par rapport à s ($\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}\frac{d}{dt}$)

$$\mathbf{g}''(s) = \frac{-(x'(t)x''(t) + y'(t)y''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^2}(x'(t), y'(t)) + \frac{1}{x'(t)^2 + y'(t)^2}(x''(t), y''(t)) = \kappa(t(s))\mathbf{n}(t(s))$$

En effectuant le produit scalaire avec le vecteur normal

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}(-y'(t), x'(t))$$

on trouve finalement

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

En résumé :

Proposition 1.10.5. *La courbure signée de la courbe plane régulière $t \mapsto (x(t), y(t))$ est*

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{\det(f'(t), f''(t))}{\|f'(t)\|^3}}$$

On voit sur le numérateur de cette formule que $\kappa = 0$ implique que $f''(t)$ est proportionnel à $f'(t)$. C'est le cas en un point d'inflexion, et cela caractérise (essentiellement) les points d'inflexion. En fait en un point d'inflexion (ordinaire), il est facile de voir en se reportant à la définition que $\kappa(t) = ct + \circ(t)$, $c = cte$. Donc la courbure change de signe !

Exemple 1.10.6. Soit le graphe $t \mapsto (t, y(t)$ de la fonction scalaire $t \mapsto y(t)$. La courbure est

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{y''(t)}{(1 + y'(t)^2)^{3/2}}}$$

Par exemple pour $y(t) = \sin t$, on trouve $\kappa(t) = \dfrac{-\sin t}{(1+\cos^2 t)^{3/2}}$. La courbure change de signe, en particulier est nulle en les points $t = 0 \pmod{\pi}$, qui sont des points d'inflexion comme on le voit immédiatement.

Le résultat amusant suivant justifie l'introduction de la courbure.

Proposition 1.10.7. *Les seules courbes paramétrées régulières, de courbure nulle sont les droites (ou segments de droites). Les seules courbes paramétrées régulières de courbure constante non nulle sont les (arcs de) cercles.*

Démonstration : Il est commode de choisir comme paramètre la longueur d'arc.

Dans le premier cas, courbure nulle, on doit avoir $f''(s) = 0$ $(\forall s)$, donc $x'(s) = a$ et $y'(s) = c$ sont constantes avec $a^2 + c^2 = 1$, et $x(s), y(s)$ sont des fonction linéaires $x(s) = as + b$, $y(s) = cs + d$. Donc la courbe est une droite.

Dans le deuxième cas, quitte à changer l'orientation, on peut supposer que la courbure est constante $\kappa = \frac{1}{R} > 0$. On considère alors la fonction $g(s) = f(s) + R\mathbf{n}(s)$. En dérivant, on obtient $g'(s) = f'(s) + R\mathbf{n}'(s) = f'(s) - R\kappa f'(s) = 0$. Donc $f(s)+R\mathbf{n}(s) = (a, b)$ vecteur constant et comme $\|\mathbf{n}(s)\| = 1$, en écrivant $f(s) = (a, b)-R\mathbf{n}(s)$, on trouve que $f(s)$ est sur le cercle de centre (a, b) et de rayon R. □

Exemple 1.10.8. La courbure de la courbe $x = a\cos t, y = b\sin t$ (ellipse) est obtenue par :

1) on calcule les dérivées à l'ordre un et deux $f'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$, $f''(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$.
2) On applique la formule donnant la courbure ; on trouve

$$\kappa(t) = \frac{2ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

On voit sur cette expression que $\kappa(t)$ a un extremum (maximum ou minimum), si et seulement si la fonction $a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$ a un extremum. En dérivant on trouve $(a^2 - b^2)\sin 2t$. Un extremum est donc obtenu pour $2t = 0 \pmod{\pi}$. Ce sont les extrémités des axes, qui correspondent aux *sommets* de l'ellipse. Pour la parabole $x = t$, $y = t^2$, on trouve $\kappa(t) = \dfrac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$

Définition 1.10.9. *i) On appelle* **sommet** *d'une courbe, un point qui correspond à un extremum de la fonction* κ *(la condition* $\kappa'(t) = 0$ *est nécessaire).*

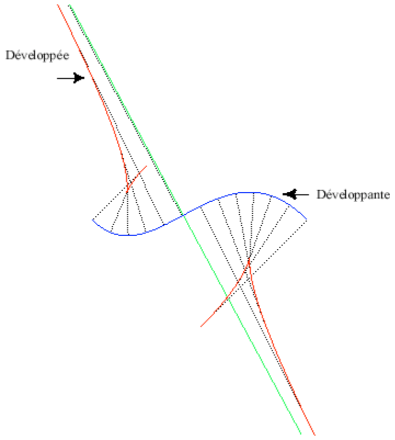
ii) En un point de courbure non nulle (donc pas point d'inflexion) retrouve le cercle **osculateur**, *qui est le cercle de rayon le rayon de courbure* $R(t) = \dfrac{1}{|\kappa(t)|}$ *et de centre le point* $\boxed{O(t) = f(t) + \dfrac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t)}$.

iii) Le centre est appelé centre de courbure au point de paramètre t. *Lorsque* t *varie, le point* $O(t)$ *décrit une courbe appelée la* **développée** *de la courbe initiale.*

On observera que le cercle osculateur ne dépend pas de l'orientation (sens de parcours) de la courbe. Les paramètres t et $-t$ conduisent au même cercle, cela du fait que la courbure change de signe, mais aussi le vecteur normal !

On retrouve ainsi la représentation paramétrique de la developpée de la courbe $x = x(t)$, $y = y(t)$.

$$\boxed{O(t) = \left(x(t) - y'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}, y + x'\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}\right)}$$



Proposition 1.10.10. Propriétés de la développée *Soit D la développée d'une courbe régulière C paramétrée par longueur d'arc par $s \in I \to f(s)$. On suppose de plus que la fonction courbure $K(s)$ et sa dérivée ne s'annule pas sur I. On note $s \in I \to O(s)$ le paramétrage obtenu pour D ($O(s)$ est le centre de courbure de C en $f(s)$. Alors, on a les propriétés suivantes :*

(1) La courbe D est régulière.

(2) En tout point de C, la normale à C est tangente à D.

(3) Le rayon de courbure $R(s) = 1/K(s)$ vérifie pour tout $s_1, s_2 \in I$:

$$|R(s_2) - R(s_1)| = L_D(O(s_1)O(s_2))$$

la longueur de l'arc de D entre $O(s_1)$ et $O(s_2)$.

Démonstration : On peut utiliser le repère $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$ et les formules de Frenet. Par définition en notant $\rho(s) = 1/\kappa(s)$ le rayon de courbure signé, on a $O(s) = f(s) + \rho(s)\mathbf{n}$.

(1) et (2) : En dérivant, on obtient le vecteur vitesse

$$O'(s) = \mathbf{t} + \rho'(s)\mathbf{n} - \rho(s)/\kappa(s)\mathbf{t} = \rho'(s)\mathbf{n}$$

qui est bien non nul car $\rho'(s) = \kappa'(s)/\kappa^2(s) \neq 0$ et normal à $\mathbf{t}$.

(3) Par définition

$L_D(O(s_1)O(s_2)) = \displaystyle\int_{s_1}^{s_2} ||O'(s)||\, ds = \int_{s_1}^{s_2} |\rho'(s)|\, ds = |\int_{s_1}^{s_2} \rho'(s)\, ds| = |\rho(s_2) - \rho(s_1)| = |R(s_2) - R(s_1)|$

car ρ et ρ' restent de signe fixe. □

Cette dernière propriété signifie que si on enroule un fil sur la développée D et que ce fil est tendu et que son extrémité coïncide, avant de commencer à le dérouler, avec un point de la courbe C alors dans la suite du dérouler, l'extrémité parcoura la courbe C. On dit que C est une **développante** de D.

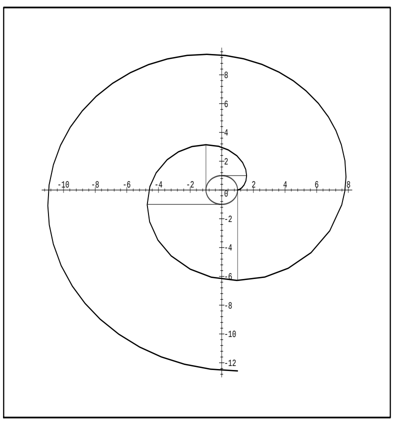


FIGURE 1.15 – Développante du cercle

Une autre conséquence de cette propriété est la suivante (déjà perçue sur certaines figures)

Proposition 1.10.11. Position de la courbe et du cercle osculateur *Soit un arc de courbe régulière* C *paramétré par longueur d'arc par* $s \in I \to f(s)$*. On suppose que la fonction courbure signée* κ *a une dérivée* > 0*. Alors, en un point* $f(a)$ *de paramètre* a*, la courbe pénètre pour ne plus sortir du cercle osculateur* $\Gamma(a)$

Démonstration : Cela revient à montrer que sous ces hypothèses $O(a)f(s) \leq R(a)$ lorsque $s \leq a$ et en effet, $O(a)f(s) \leq O(a)O(s) + O(s)f(s) \leq L_D(O(a)O(s)) + R(s) = R(a) - R(s) + R(s)$ d'après le (3) de la proposition précédente. □

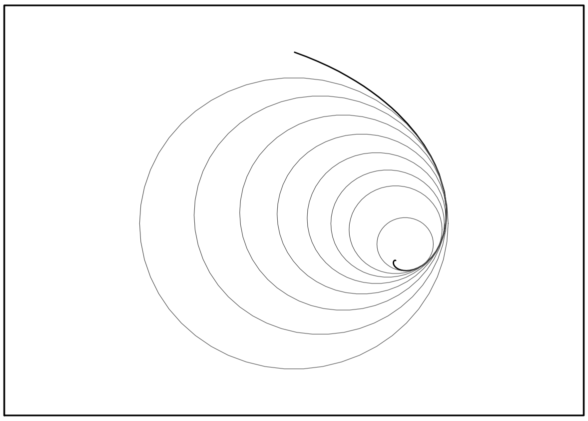


FIGURE 1.16 – Cercles de courbure

Application : La spirale de Fresnel d'équations $f(s) = (\int_0^s \cos t^2\,dt, \int_0^s \sin t^2\,dt)$ est paramétrée par longueur d'arc, en effet, on a $f'(s) = (\cos s^2, \sin s^2) = \mathbf{t}(s)$ de norme 1 et $f''(s) = 2s(-\sin s^2, \cos s^2) = 2s\mathbf{n}(s)$ donc $\kappa(s) = 2s$ a pour dérivée $\kappa'(s) = 2$. Ceci assure que les points $f(s)$ pour $s \geq a$ restent confinés dans le cercle osculateur au point $f(a)$. En particulier, les fonctions $x(s) = \int_0^s \cos t^2\,dt$ et $y(s) = \int_0^s \sin t^2\,dt$ restent bornées lorsque $s \to +\infty$ (on peut même montrer que ces fonctions ont pour limite $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ lorsque $s \to +\infty$).

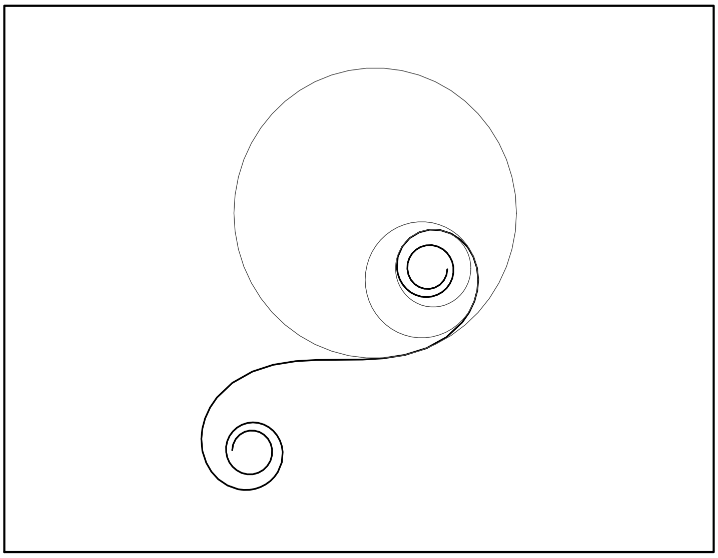


FIGURE 1.17 – Une spirale de Fresnel pénétrant dans ses cercles osculateurs

Si la courbe est donnée en coordonnées polaires, il y a une formule spécifique pour obtenir la courbure. La formule est la suivante :

Proposition 1.10.12. *On a*

$$\boxed{\kappa = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}}$$

Démonstration : Pour la valider, notons qu'on a d'une part $x'^2 + y'^2 = r^2 + r'^2$. On calcule ensuite l'expression $x'y'' - y'x''$. On a $f'' = (r'u + rv)' = (r'' - r)u + 2r'v$ d'où

$$\det(f'(\theta), f''(\theta)) = \det(r'u + rv, (r'' - r)u + 2r'v) = 2r'^2 - r(r'' - r)) = 2r'^2 + r^2 - rr''$$

D'où la formule annoncée, par substitution dans la formule de la proposition 1.9.7. □

Remarque. Le vecteur tangent (en un point régulier) donne la direction de la tangente, qui est la droite qui a un "contact" d'ordre un au moins avec la courbe. L'interprétation de la courbure, et du cercle osculateur, est que ce dernier est le cercle qui a avec la courbe un contact d'ordre au moins 2, au point considéré. Ceci a une explication. Soit le courbe $t \mapsto f(t)$, le point étant celui de paramètre $t = 0$. On suppose que le paramètre est la longueur d'arc, donc $\|f'(t)\| = 1$; soit pour simplifier $\kappa = \kappa(0)$. Choisissons une représentation paramétrique du cercle osculateur, sous la forme

$$g(t) = O(0) + \frac{1}{\kappa}\left(-\cos(\kappa t)\mathbf{n}(0) + \sin(\kappa t)\mathbf{t}(0)\right)$$

Pour le cercle, le paramètre t est aussi la longueur d'arc. On a $g'(0) = f'(0) = \mathbf{t}(0)$. On a aussi $g''(0) = \kappa\mathbf{n}(0)$, c'est à dire

$$g''(0) = f''(0)$$

Ce qui montre que les développements de Taylor pour les fonctions f et g, relativement au paramètre convenablement choisi t, sont égaux jusqu'à l'ordre deux. C'est ce qui justifie la dénomination de cercle osculateur, pour la courbe $g(t)$.

Proposition 1.10.13. **Point singulier de la développée** *Soit D la développée d'une courbe régulière C paramétrée par longueur d'arc par $s \in I \to M(s)$. On suppose de plus que la fonction courbure $\kappa(s)$ ne s'annule pas. On suppose qu'au point de paramètre s_0, la fonction courbure $\kappa(s)$ a un extremum non dégénéré ($\kappa'(s_0) = 0$, $\kappa''(s_0) \neq 0$). ALors la développée a au point de paramètre s_0 un point de rebroussement de première espèce.*

Démonstration : On utilise pour commencer les mêmes notations et calculs que dans la proposition précédente. On avait $O'(s) = \rho'(s)\mathbf{n}$ et donc toujours avec les formules de Frenet $O''(s) = \rho''(s)\mathbf{n} - \rho'(s)\kappa(s)\mathbf{t}$ puis

$$O'''(s) = a(s)\mathbf{n} - ((\rho'(s)\kappa(s))' + \rho''(s)\kappa(s))\mathbf{t} = a(s)\mathbf{n} - ((\rho'(s)\kappa'(s)) + 2\rho''(s)\kappa(s))\mathbf{t}$$

En s_0, on a $O'(s_0) = 0$ mais $O''(s_0) = \rho'(s_0)\mathbf{n} \neq 0$ et $O'''(s_0) = a(s_0)\mathbf{n} - 2\rho''(s_0)\kappa(s_0))\mathbf{t}$ est linéairement indépendant de $O''(s_0)$. Donc au point singulier de D de paramètre s_0, on a $p = 2$ et $q = 3$. Ce point singulier est bien un point de rebroussement de première espèce.

□

Exercice : Montrer que la courbe développée de l'ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(a > b > 0)$, est la courbe

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,\ Y = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t$$

Justifier le fait que cette courbe possède 4 points de rebroussement (astroïde)

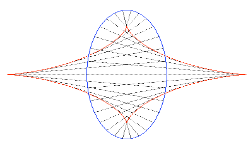


FIGURE 1.18 – Développée de l'ellipse $(0 < a < b)$

Exercices :

1. On suppose que le repère orthonormé $u_1 = (a, c)$ $u_2 = (b, d)$ est direct. Montrer qu'il existe θ unique modulo 2π tel que
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
Cela prouve que le repère se déduit du repère canonique par la rotation vectorielle d'angle θ.
2. Trouver le repère de Frenet en tout point de la droite $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$. Expliciter le paramétrage par la longueur d'arc.
Solution : $s = \int_0^t \sqrt{5}dt = \sqrt{5}t,\ x = 1 + \frac{s}{\sqrt{5}},\ y = 1 + \frac{2s}{\sqrt{5}}.\ \to t = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2),\ \to n = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$.
3. Soit la branche d'hyperbole décrite paramétriquement par $x = \operatorname{sh} t, y = \operatorname{ch} t$ (noter que $y^2 - x^2 = 1$). Expliciter le repère de Frenet.
Solution : Le vecteur tangent est $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$, sa longueur est $\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch} 2t$. On a ainsi
$$\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2t}}(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)\,,\ \mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch} 2t}}(-\operatorname{sh} t, r \operatorname{ch} t)$$
.
4. Soit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ supposée de classe C^∞. Soit la courbe paramétrée définie par
$$x(t) = \int_0^t \varphi(u) \cos u du, \quad y(t) = \int_0^t \varphi(u) \sin u du$$
i) Expliciter le vecteur tangent au point de paramètre t, et caractériser les points stationnaires.
ii) En supposant que $\varphi(t) \neq$ pour tout t, exprimer la courbure $\kappa(t)$ en fonction de φ.
5. Soit la "spirale" : $x(t) = e^{-t} \cos t$, $y(t) = e^{-t} \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Calculer la longueur de l'arc de la totalité de la spirale, donc de $t = 0$ à $t = \infty$. Calculer la courbure en tout point.
Solution : On a $|f(t)\| = \sqrt{2}e^{-t}$. On doit donc calculer
$$\int_0^\infty \sqrt{2}e^{-t}dt = -\sqrt{2}e^{-t}|_0^\infty = \sqrt{2}$$
La courbure est $\kappa(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}$. Noter qu'elle tend vers l'infini lorsque la courbe s'enroule autour de l'origine.
6. Montrer que les normales (la normale au point $f(t)$ est la droite perpendiculaire à la tangente en ce point) à la courbe $t \mapsto f(t)$ sont tangentes à sa développée.
7. Calculer la courbure pour la branche d'hyperbole $y = \frac{1}{x}$, $(x > 0)$. En quel point (s) est-elle maximale ?
Solution : La calcul de la courbure donne (application directe de la formule) $\kappa(x) = \frac{2x^3}{(1+x^4)^{3/2}}$. En dérivant cette fonction de x, on trouve $\frac{6x^2\kappa^{1/2}(1-x^4)}{\kappa^3}$. Le maximum de la courbure est atteint pour $x = 1$, ce qui correspond au point $(1, 1)$.