Corrigé du Contrôle continu 1 du 26 octobre 2016 de 8h30 à 10h30

Exercice 1. Soit une suite (u_n) de nombres complexes, on dit qu'elle est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ |u_n - u_m| < \varepsilon$$

Choisissant, par exemple, $\varepsilon = 1$ dans cette propriété, on a l'existence d'un entier N tel que $\forall n \geq N,\ |u_n - u_N| < 1$ et donc grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\forall n,\ |u_n| \leq M = \max(|u_0|, \cdots, |u_N|, 1 + |u_N|)$$

la suite de Cauchy (u_n) est donc bornée.

Exercice 2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies par $u_0 = 1, v_0 = 2$ et pour $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \qquad v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}\cdot$$

1) Montrons par récurrence que les deux suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et > 0. C'est le cas pour $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$. Supposons donc $u_n > 0$ et $v_n > 0$ déjà définis, alors $u_n + v_n > 0$ et donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n}$ sont bien définis et > 0. Donc par récurrence les suites sont bien définies et > 0.

2) Comme les suites sont > 0, on peut écrire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n + v_n} < 1$ et $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{v_n}{u_n + v_n} < 1$. Les deux suites sont strictement décroissantes.

3) Ce sont deux suites décroissantes minorée par 0 donc convergentes. Notons $l \geq 0$ la limite de (u_n) et $l' \geq 0$ la limite de (v_n). Si $l > 0$ alors en passant à la limite on a $1 = \lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \dfrac{u_n}{u_n + v_n} = \dfrac{l}{l + l'} \iff l' = 0$ d'où $ll' = 0$.

4) On a $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n^2 - u_n^2}{u_n + v_n} = v_n - u_n$. La suite $(v_n - u_n)$ est donc constante égale à $v_0 - u_0 = 1$. D'où en passant à la limite, $l' - l = 1$ avec $l, l' \geq 0$ et $ll' = 0$, il vient $l' = 1$ et $l = 0$.

Exercice 3. 1) Critère de D'Alembert ou critère du rapport :
Soit (u_n) une suite strictement positive on suppose l'existence de la limite $\ell = \lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, alors :
si $\ell < 1$ la série $\sum u_n$ converge et si $\ell > 1$ la série $\sum u_n$ diverge (si $\ell = 1$, on ne peut rien dire)

2) Soit $p \in \mathbf{N}^*$. On considère la suite $u_n = \dfrac{n^{pn}}{(pn)!}\cdot$ On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{p(n+1)}}{(p(n+1))!}\frac{(pn)!}{n^{pn}} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^p \frac{(n+1)^p}{(pn+1)(pn+2)\cdots(pn+p)}$$

qui tend vers $\ell = \left(\dfrac{e}{p}\right)^p$ et donc en appliquant le critère de D'Alembert :
$\sum u_n$ converge si $p > e \iff p \geq 3$ et $\sum u_n$ diverge si $p < e \iff p = 1$ ou $p = 2$.

Exercice 4. On considère la série de terme général u_n défini pour $n \geq 1$ par:

$$u_n = \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{1}{n} - \ln(1 + \frac{1}{n})\cdot$$

1) On a en $x = 0$ le développement limité : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ d'où $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln(1 + \dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$ et donc $u_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$ qui est le terme général positif d'une série convergente (Riemann) donc $\sum u_n$ converge.

2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} (\ln(k) - \ln(k+1)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ grâce au phénomène de télescopage. Dire que la série $\sum u_n$ converge c'est dire que la limite $\gamma = \lim S_n = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\Big)$ existe. Le nombre γ est la *constante d'Euler* ($\gamma = 0,5772156...$).

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels ≥ 0. On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ku_k$

1) Dans le cas où $u_n = \dfrac{1}{n}$, on a $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{k} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n(n+1)}n = \frac{1}{n+1}$.

2) Pour tout $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=1}^{k} mu_m\Big) = \sum_{m=1}^{n} mu_m \sum_{k=m}^{n}\Big(\frac{1}{k(k+1)}\Big) = \sum_{m=1}^{n} mu_m \sum_{k=m}^{n}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) =$$
$$\sum_{m=1}^{n} mu_m\Big(\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1}\Big) = \sum_{m=1}^{n} u_m - \frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n} mu_m = \sum_{m=1}^{m} u_m - nv_n = \sum_{k=1}^{k} u_k - nv_n.$$

On aurait pu aussi démontrer cette relation par récurrence.

3) Comme $v_n \geq 0$ la suite $S'_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$ est croissante et d'après 2) et le fait que $u_n \geq 0$, on a $S'_n \leq S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ qui est aussi croissante du fait que $u_n \geq 0$. Dire que $\sum u_n$ converge revient à dire que la suite (S_n) converge vers S sa borne supérieure. D'où $S'_n \leq S_n \leq S$ pour tout n et donc la suite croissante (S'_n) est majorée donc convergente ce qui revient à dire que la série $\sum v_n$ converge.

4) Si la suite $(nv_n)_{n\geq 1}$ tendait vers $+\infty$ alors, pour n assez grand on aurait $nv_n \geq 1$ c'est à dire $v_n \geq \dfrac{1}{n}$ terme général positif d'une série divergente et donc par comparaison $\sum v_n$ serait divergente. Donc si la série $\sum v_n$ converge, alors la suite $(nv_n)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers $+\infty$.

5) Supposons que la série $\sum v_n$ converge c'est à dire que la suite (S'_n) de ses sommes partielles converge. Si (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ était divergente, comme suite croissante, elle tendrait vers $+\infty$. On aurait alors d'après 2) que $nv_n = S_n - S'_n$ tendrait vers $+\infty$ ce qui contredit le résultat du 4). Donc si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

6) Donc si la série $\sum v_n$ converge la série $\sum u_n$ converge aussi et alors la suite $nv_n = S_n - S'_n$ converge vers $a = S - S' \geq 0$ où S et S' sont respectivement les sommes des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Dans le cas où $a > 0$ on a $v_n \sim \dfrac{a}{n}$ terme général positif d'une série divergente, ce qui contredit le fait que $\sum v_n$ converge.

Donc nécessairement $a = 0$, autrement dit, nv_n tend vers $0 = S - S'$. On a bien $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

7) D'après 3) et 5) $\sum u_n$ converge $\iff$ $\sum v_n$ converge autrement dit les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. De plus d'après 6), en cas de convergence, les deux séries ont même somme.

Le fin mot de l'histoire : Soit la suite double positive $w_{n,m} = \dfrac{1}{n(n+1)} mu_m$ si $1 \leq m \leq n$ et $w_{n,m} = 0$ sinon.

Le Théorème de Fubini (hors programme) dit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} w_{n,m}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} w_{n,m}\Big)$

(il faut comprendre que si un résultat de somme de série simple est $+\infty$ il en est de même des deux côtés)

Appliquons ce résultat, il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} w_{n,m}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n(n+1)}\sum_{m=1}^{\infty} mu_m\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n =$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} w_{n,m}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} mu_m\Big(\sum_{n=m}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} mu_m\frac{1}{m} = \sum_{m=1}^{\infty} u_m.$$

Donc on a bien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ résultat de la question 7).

Exercice 6. 1) $u_n = \dfrac{n^2}{2+2^n}$, clairement $u_n \sim \dfrac{n^2}{2^n}$ et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \dfrac{(n+1)^2}{n^2}\dfrac{2^n}{2^{n+1}} \sim \dfrac{1}{2}$ donc $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$. D'après D'Alembert, la série $\sum u_n$ converge.

2)$v_n = \dfrac{\sqrt{n}\sin n}{n^2+1}$ on a $|v_n| \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Par comparaison, puis équivalent et Riemann, la série $\sum v_n$ converge absolument donc converge.

3) $w_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(\dfrac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}\Big) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big(1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o(\dfrac{1}{\sqrt{n}})\Big) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + s_n$ où $s_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Donc $\sum w_n$ diverge car $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère des séries alternées et $\sum s_n$ diverge par Riemann.

*****