Université Grenoble Alpes
Licence de mathématiques, 3e année

Année 2019-2020
Algèbre, parcours B

Contrôle continu du lundi 7 décembre 2020

Durée : 1 h 30

Les exercices sont indépendants.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (4 points)

Soit G un groupe agissant sur un ensemble E.

1. On suppose que $\mathrm{card}(E) = 13$ et $|G| = 169$. Que peut-on dire de l'action de G si elle n'est pas transitive ?
2. On suppose que $|G| = 2020$, et qu'il existe un $x \in E$ avec un stabilisateur d'ordre 1010. Quel est le cardinal de l'orbite de x ?
3. On suppose que $\mathrm{card}(E) = 19$ et $|G| = 35$ et que l'action est sans point fixe. Combien y a-t-il d'orbites pour cette opération ?

Exercice 2. (6 points)

1. Dans cette question, A est un anneau intègre. Soit a un élément de A. On suppose que l'idéal (a^2) est premier. Montrer que a est dans (a^2) et en déduire que a est inversible.
2. Montrer que tous les idéaux stricts d'un corps sont premiers.
3. Montrer qu'un anneau dont tous les idéaux stricts sont premiers est intègre, puis que c'est un corps.

Exercice 3. (10 points)

Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $\mathbb{G}_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ le groupe des inversibles de $\mathbb{F}_p$.

1. On suppose que p est un nombre premier impair.
   (a) Préciser le cardinal de $\mathbb{G}_p$, l'élément neutre, et l'inverse de la classe de 2.
   (b) Montrer que l'application $\psi : x \mapsto x^2$ définit un endomorphisme (de groupe multiplicatif) de $\mathbb{G}_p$.
   (c) Montrer que $\ker \psi = \{\overline{1}, \overline{p-1}\}$, et en déduire le cardinal de l'image de ψ.
   (d) On appelle carrés dans $\mathbb{G}_p$ les éléments de l'image de ψ. Montrer que x est un carré dans $\mathbb{G}_p$ si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$. En déduire que -1 est un carré dans $\mathbb{G}_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \pmod 4$.
2. Déterminer l'ensemble des nombres premiers p tels que le polynôme $X^2 + 1$ soit irréductible dans $\mathbb{F}_p[\mathrm{X}]$ (on dira : irréductible modulo p).
3. Soit $P = X^4 + 1$.
   (a) Dans $\mathbb{C}[X]$, montrer les formules :
$$\begin{aligned} P &= (X^2 + i)(X^2 - i) \\ &= (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1) \\ &= (X^2 + i\sqrt{2}X - 1)(X^2 - i\sqrt{2}X - 1). \end{aligned}$$
   (b) Déterminer si P est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$.

Les questions suivantes sont hors-barèmes.
(Bonus jusqu'à 6 points)

(c) Soit p un nombre premier. En utilisant les décompositions ci-dessus, montrer que P est réductible modulo p si l'une des propriétés suivantes est vraie :

i. -1 est un carré modulo p ;
ii. 2 est un carré modulo p ;
iii. -2 est un carré modulo p.

(d) Montrer que, si -1 et 2 ne sont pas des carrés dans $\mathbb{F}_p$, alors -2 est un carré dans $\mathbb{F}_p$.

(e) En déduire que pour tout nombre premier p, P est réductible modulo p (*i.e.* P n'est pas irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$).