L3B Année 2017/2018

JUIN 2018
JUSTIFIER TOUTES VOS REPONSES

Exercice 1

1. (a) i. Montrer que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un corps.
   ii. Détérminer les valeurs de $n \leq 20$ pour lesquelles l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre.

   (b) i. Déterminer l'inverse de $\bar{13}$ dans $\mathbb{Z}/89\mathbb{Z}$
   ii. Montrer que l'anneau $(\mathbb{Z}/89\mathbb{Z})[X]$ est intègre.

   (c) i. Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul est inversible si et seulement si $\deg(P) = 0$.
   ii. En déduire que $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ le polynome $X - \alpha$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.
   iii. Montrer que le polynôme $\bar{2}X + 1$ est inversible dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[X]$.
   iv. Donner une liste de tous les polynômes inversibles de la forme $\bar{a}X + \bar{b}$ dans l'anneau $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Vrai ou faux,

   (a) P est irréductible si et seulement si P est irreductible dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) P est irréductible si et seulement si P n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

   Justifier vos réponses.

3. On rappelle que deux éléments x, y d'un anneau commutatif A sont premiers entre eux ssi les seuls diviseurs communs sont les inversibles de A.

   (a) Montrer que $X, X - 1, X + 1$ sont deux à deux premiers entre eux dans l'anneau $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Montrer que $\mathbb{C}[X]/(X) \simeq \mathbb{C}[X]/(X + 1) \simeq \mathbb{C}[X]/(X - 1)$.
   (c) Montrer que :
      i. $\mathbb{C}[X]/(X) \not\simeq \mathbb{R}[X]/(X + 1)$.
      ii. $\mathbb{C}[X]/(X^2 + 1) \not\simeq \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$.

Exercice 2

1. (a) Donner tous les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
   (b) Pour chaque élément $x \in \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}^*$ calculer son inverse.
   (c) Montrer que si $x \notin \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}^*$ alors x est un diviseur de zero dans l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.
2. (a) Montrer que les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ forment un groupe commutatif $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}^*, \times)$.
   (b) Pour chaque élément de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}^*, \times)$ calculer son ordre.
   (c) Le groupe $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}^*, \times)$ est-il cyclique ?
   (d) Trouver tous les sous groupes de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}^*, \times)$.
   Indication : Ce groupe possède exactement 5 sous groupes.

Exercice 3

1. Décomposer en produit de cycles à supports deux à deux disjoints les permutations de $\mathfrak{S}_{10}$ suivantes.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 8 & 10 & 2 & 9 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 9 & 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 4 & 1 & 9 & 5 & 6 & 7 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

   Donner les ordres de $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.
2. (a) Montrer que si deux permutations sont à supports disjoints, alors elles commutent.
   (b) Montrer qu'il y a une permutation d'ordre 3 qui commute avec σ_x.
3. On rappelle que deux éléments $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ sont conjugués ssi il existe $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma_2 = \tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}$.

   Montrer que deux cycles $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ sont conjugués si et seulement s'ils ont même longueur. Comment obtenir dans ce cas $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma_2 = \tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}$?
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ soient conjuguées, et expliquer comment obtenir dans ce cas $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que
$$\sigma_2 = \tau \circ \sigma_1 \circ \tau^{-1}.$$
5. Trouver $\tau \in \mathfrak{S}_{10}$ tel que $\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1} = \sigma_z$.