

Devoir surveillé n° 2 du 11 avril 2022

Durée : 1 h.

Documents autorisés : une page manuscrite recto-verso.

Téléphones portables interdits.

La rédaction et la précision des arguments sont des critères d'évaluation importants

Exercice 1. On définit une forme quadratique sur \mathbb{R}^4 par la formule :

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad q(x, y, z, t) = x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy + 4xz + 16yz + 4yt + 8zt.$$

1. Écrire la matrice de q dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .
2. Appliquer l'algorithme de réduction de Gauss à q pour l'écrire comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. En déduire la signature et le rang de q .
4. Donner une base q -orthogonale de \mathbb{R}^4 pour q . Quelle est la matrice de q dans cette base ?
5. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. À quelle condition sur (α, β) la forme bilinéaire associée à la forme quadratique

$$q'(x, y, z, t) = q(x, y, z, t) + \alpha(y - z + t)^2 + \beta t^2$$

est elle un produit scalaire ?

Exercice 2.

1. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on définit $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-2t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) e^{-2t} dt$ lorsque cette limite existe.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ Montrer que } J_n = 2 \int_0^{+\infty} t^n e^{-2t} dt = \frac{n!}{2^n}.$$

2. Démontrer que la formule

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle P, Q \rangle = 2 \int_0^{+\infty} P(t)Q(t) e^{-2t} dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3. Utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique $(1, X, X^2)$ pour déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Calculer la projection orthogonale du polynôme X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
5. En déduire la valeur de

$$\delta = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 + at^2 + bt + c)^2 e^{-2t} dt$$

et pour quels triplets (a, b, c) cette valeur est atteinte.