

# DS 1 MAT404

Université de Grenoble-Alpes,

14/02/2022

Thème : algèbre linéaire, formes bilinéaires

## Exercice 1

Soit l'espace vectoriel  $V = \mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

- (a) Rappelez la base canonique de  $\mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .
- (b) Montrez que la famille  $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  est bien une base de  $V$ .
- (c) Écrire la matrice de l'application  $\gamma : \mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  définie comme  $\gamma(M) = {}^t M$  dans la base canonique et dans la base  $F$ .

## Exercice 2

- (a) Soit l'application  $\phi : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  définie par  $\phi(P) = 4P - XP' - X^2P''$ 
  - 1) Montrez que cette application est linéaire.
  - 2) Donnez le noyau et l'image de cette application et vérifiez le théorème du rang.
- (b) Soit l'application  $\psi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  définie par  $\psi(f) = f'' - k^2 f$ ,  $k \in \mathbb{R}^*$ 
  - 1) Montrez que cette application est linéaire.
  - 2) Montrez que  $\text{Ker}(\psi)$  est bien un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et donnez en une base ainsi que sa dimension.
  - 3) Donnez l'image de  $\psi$  (On pourra appliquer Cauchy-Lipshitz sur un système bien choisi).

## Exercice 3

Soit l'application  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\Phi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = x_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$

- (a) Montrez que cette application est bilinéaire. Est-elle symétrique?
- (b) Calculez la matrice  $M_2$  de  $\Phi$  dans la base  $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ .