

Groupe de Travail

Flot de Ricci, papiers de Perelman

Théorème de non effondrement local I
26 février 2004

1 Non effondrement local I

1.1 Définition - Exemples

Définition 1. Soit $g(t)$ une solution du flot de Ricci sur $[0, T)$. On dit que $g(t)$ a un effondrement local en T s'il existe une suite $t_k \rightarrow T$, une suite de boules $B_k = B(p_k, r_k)$ pour la métrique $g(t_k)$, avec $\frac{r_k^2}{t_k}$ borné, telles que

a) $|Rm(\cdot, t_k)| \leq \frac{1}{r_k^2}$ sur B_k .

b) $\frac{vol(B_k)}{r_k^n} \rightarrow 0$

Pour une variété riemannienne fixée (M, g) , sur une boule $B(p, r)$ la condition a) est vérifiée si le rayon r est assez petit. Par contre $\frac{vol(B(p, r))}{r^n} \rightarrow vol(B_{\mathbb{R}^n}(1))$ quand r tend vers 0. Si la variété est compacte, ce rapport est minoré > 0 sur M pour r majoré. Sur une variété de courbure -1 , complète à cusp, ce rapport tend vers 0 pour tout rayon fixe si le point p part à l'infini dans le cusp. On peut réaliser b) sur une variété compacte en faisant tendre r vers $+\infty$. Cela ne satisfait pas la condition a) borné et a) n'est pas vérifiée si la variété n'est pas plate. Remarquons qu'on ne suppose pas T maximal. Sur une variété compacte, un effondrement local en temps fini $T < \infty$ implique une singularité. Sinon, $g(T)$ est lisse et on ne peut pas avoir b) sur une variété compacte, avec des rayons r bornés. Cependant, le théorème de Perelman empêche l'effondrement local en temps fini. Sur une variété complète, on peut avoir un effondrement local en temps fini sans singularité. Par exemple, pour le flot de la variété hyperbolique à cusp, il existe pour toute $g(t)$ une suite de boules satisfaisant aux conditions. Un effondrement local en $T = \infty$ n'implique pas de singularité.

Exemple 0: le tore euclidien a un effondrement local en $+\infty$

Sur $S^1 \times S^1$, $g(t) = g(0) = d\theta_1^2 + d\theta_2^2$ est un soliton constant. La condition a) est vérifiée pour tout $r > 0$. On prend une suite r_k tendant vers $+\infty$ et $t_k = r_k^2$.

Exemple 1: le flot de la sphère n'a pas d'effondrement local

Evidemment, la sphère a un collapsing global. Le point est que la condition de courbure contraint le rayon de la boule sur laquelle on teste la définition à devenir petit quand le temps évolue. Supposons que $g(0)$ est la métrique de la sphère unité de dimension n . Alors le flot de Ricci est donné par

$$g(t) = (1 - 2(n-1)t)g(0)$$

pour $t \in [0, \frac{1}{1-2(n-1)}[= [0, T[$. La courbure est constante au temps t et vaut

$$m(t) = \frac{1}{1 - 2(n-1)t}$$

Le rayon $r(t)$ maximal satisfaisant a) vérifie

$$r(t) \leq \sqrt{1 - 2(n-1)t} = \frac{\pi \sqrt{1 - 2(n-1)t}}{\pi} = \frac{\text{diam}(g(t))}{\pi}$$

Considérons $r = s \cdot d_g$, où $s \in [0, \frac{1}{\pi}]$ et d_g désigne le diamètre d'une métrique sphérique g . On a

$$\frac{\text{vol}_g(B_g(s d_g))}{(s d_g)^n} = \omega(s) \geq \omega\left(\frac{1}{\pi}\right) > 0$$

où $\omega(s)$ est décroissante et ne dépend pas de g .

Preuve: soit $\lambda > 0$. Notons $B = B_g(s d_g) = B_{\lambda g}(s \sqrt{\lambda} d_g) = B_{\lambda g}(s d_{\lambda g})$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\text{vol}_{\lambda g}(B_{\lambda g}(s d_{\lambda g}))}{(s d_{\lambda g})^n} &= \frac{\text{vol}_{\lambda g}(B)}{(s d_{\lambda g})^n} \\ &= \lambda^{n/2} \frac{\text{vol}_g(B)}{(s \sqrt{\lambda} d_g)^n} \\ &= \frac{\text{vol}_g(B_g(s d_g))}{(s d_g)^n} \square \end{aligned}$$

Exemple 2: le flot de $S^n \times \mathbb{R}$ n'a pas d'effondrement local

On considère sur $S^n \times \mathbb{R}$ le flot de métrique $g(t) + dx^2$ où $g(t)$ est définie comme au dessus. La condition a) implique encore que l'on considère des rayons $r \leq s \cdot d_g$, $s \in [0, 1/\pi]$. On a la même invariance le long du flot:

$$\begin{aligned} \frac{\text{vol}_{\lambda g + dx^2}(B_{\lambda g + dx^2}(s d_{\lambda g}))}{(s d_{\lambda g})^{n+1}} &= \frac{\text{vol}_{\lambda g}(B_{\lambda g}(s d_{\lambda g})) 2s d_{\lambda g}}{(s \sqrt{\lambda} d_g)^{n+1}} \\ &= \lambda^{n/2} \frac{\text{vol}_g(B) 2s \sqrt{\lambda} d_g}{(s \sqrt{\lambda} d_g)^{n+1}} \\ &= \frac{\text{vol}_{g+dx^2}(B_{g+dx^2}(s d_{g+dx^2}))}{(s d_g)^{n+1}} \square \end{aligned}$$

Exemple 3: le cigar soliton a un effondrement local en $+\infty$

On rappelle que $\Sigma^2 = \mathbb{R}^2$ est muni de $g(0) = \frac{dx^2+dy^2}{1+x^2+y^2}$. A distance s de l'origine, la courbure est $\frac{2}{ch^2(s)}$. Le cigar est asymptote à un cylindre de circonférence 2π quand $s \rightarrow \infty$. Le flot est donné par $g(t) = \varphi_t^* g(0)$ avec $\varphi_t(x, y) = e^{-2t}(x, y)$. On considère des boules $B(2s, s)$ pour $g(0)$. Clairement, la condition a) est réalisée pour $\frac{2}{ch^2(s)} \leq \frac{1}{s^2}$, i.e. pour tout s assez grand. Comme $vol(B(2s, s)) \leq 4\pi s$, la condition b) est réalisée avec $s \rightarrow \infty$. On prend une suite $t_k = s_k^2$ tendant vers ∞ et on transporte ces boules par l'isométrie φ_{t_k} dans $(\Sigma^2, g(t_k))$. \square

1.2 Théorème de non effondrement local

Théorème 1.1 (P, 4.1). *Soit M fermée et $g(t)$ une solution du flot de Ricci sur $[0, T)$, $T < \infty$. Alors $g(t)$ n'a pas de local collapsing.*

Preuve: Par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite de temps $t_k \rightarrow T$ et de boules $B_k = B(p_k, r_k)$ ayant un effondrement local. On considère la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(g, f, \tau) &= \int_M [\tau(|\nabla f|^2 + S_g) + f - n] \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}} dV_g \\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}} \int_M 4\tau|\nabla u|^2 + (\tau S_g - \ln(u^2) - n)u^2 dV_g \end{aligned}$$

où $\tau > 0$ et $u^2 = e^{-f}$. On normalise les fonctions f en considérant

$$\mathcal{C}_{g,\tau} = \left\{ f, \int_M \frac{e^{-f}}{(4\pi\tau)^{n/2}} dV_g = 1 \right\}$$

Propriétés utiles

On a vu précédemment que

- \mathcal{W} est minorée sur $\mathcal{C}_{g,\tau}$ et atteint son minimum. Il existe $f^\tau \in \mathcal{C}_{g,\tau}$ tel que

$$\mathcal{W}(g, f^\tau, \tau) = \inf_{\mathcal{C}_{g,\tau}} \mathcal{W}(g, \cdot, \tau) := \lambda(g, \tau)$$

La propriété que nous utiliserons est que $\lambda(g, \cdot)$ est minoré sur tout compact $[\tau_1, \tau_2] \subset]0, \infty[$ (le minimiseur f^τ varie régulièrement avec τ).

- \mathcal{W} et λ sont croissants le long du flot de Ricci. Etant donné un triplet $(g(t), f(t), \tau(t))$ satisfaisant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}g(t) = -2Ric_{g(t)} \\ \frac{d}{dt}f(t) = \Delta_{g(t)}f(t) + |\nabla f(t)|^2 - S_{g(t)} + \frac{n}{2\pi}(\ast) \\ \frac{d}{dt}\tau(t) = -1 \end{cases}$$

la fonction $\mathcal{W}(g(t), f(t), \tau(t))$ est croissante. La fonction $\lambda(g(t), \tau(t))$ est croissante sans la condition (*).

pour prouver le théorème

On a une suite $t_k \rightarrow T$ et une suite $B(p_k, r_k)$. On définit $\tau_k = r_k^2$. On trouve une suite $f_k \in \mathcal{C}_{g(t_k), r_k^2}$ telle que

$$\mathcal{W}(g(t_k), f_k, r_k^2) \rightarrow -\infty$$

On a alors en utilisant la croissance sur $[0, t_k]$,

$$\lambda(g(0), r_k^2 + t_k) \leq \lambda(g(t_k), r_k^2) \leq \mathcal{W}(g(t_k), f_k, r_k^2) \rightarrow \infty$$

Comme $r_k^2 + t_k$ reste dans un compact de $]0, \infty[$, on a une contradiction avec la première propriété.

Construction (Kleiner et Lott)

On construit $u_k \in \overline{\mathcal{C}_{g(t_k), r_k^2}}$ satisfaisant $\mathcal{W}(g(t_k), u_k, r_k^2) \rightarrow -\infty$ avec l'abus de notation évident. On pose

$$u_k(x) = e^{-\frac{c_k}{2}} \Phi\left(\frac{d(x, p_k)}{r_k}\right)$$

où $\Phi : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ est à support dans $[0, 1]$, et sera spécifiée plus bas. Le support de u_k est contenu dans B_k .

Fait $c_k \rightarrow -\infty$.

On écrit

$$\begin{aligned} 1 &= \int_M \frac{u_k^2}{(4\pi r_k^2)^{n/2}} dV_{g(t_k)} \\ &= \frac{e^{-c_k}}{(4\pi r_k^2)^{n/2}} \int_{B_k} \Phi^2\left(\frac{d(x, p_k)}{r_k}\right) dV_{g(t_k)} \\ &\leq \frac{e^{-c_k} \text{vol}(B_k)}{(4\pi)^{n/2} r_k^n} \end{aligned} \tag{1}$$

Comme $\frac{\text{vol}(B_k)}{r_k^n} \rightarrow 0$, $e^{-c_k} \rightarrow \infty$. \square

Lemme 1.2. $\mathcal{W}(g(t_k), u_k, r_k^2) \rightarrow -\infty$.

Preuve: On écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(g(t_k), u_k, r_k^2) &= \frac{1}{(4\pi r_k^2)^{n/2}} \int_M 4r_k^2 |\nabla u|^2 + (r_k^2 S_g - \ln(u_k^2) - n) u_k^2 dV_{g(t_k)} \\ &= \frac{e^{-c_k}}{(4\pi r_k^2)^{n/2}} \int_{B_k} 4\Phi'^2\left(\frac{d}{r_k}\right) + (r_k^2 S_g + c_k - \ln(\Phi^2) - n) \Phi^2 dV_{g(t_k)} \end{aligned}$$

On va calculer l'intégrale radialement. On pose

$$A_k(s) = \int_{S(p_k, sr_k)} d\mathcal{A}_{g(t_k)}$$

et

$$R_k(s) = \frac{r_k^2}{A_k(s)} \int_{S(p_k, sr_k)} S_{g(t_k)} d\mathcal{A}_{g(t_k)}$$

D'après (1), on voit que

$$\frac{e^{-c_k}}{(4\pi r_k^2)^{n/2}} = \left(\int_0^1 \Phi^2(s) A_k(s) r_k ds \right)^{-1}$$

On a

$$\mathcal{W}(g(t_k), u_k, r_k^2) = \frac{\int_0^1 [4\Phi'^2(s) + (R_k(s) + c_k - \ln(\Phi^2) - n)\Phi^2(s)] A_k(s) r_k ds}{\int_0^1 \Phi^2(s) A_k(s) r_k ds} \quad (2)$$

L'hypothèse de courbure sur B_k implique

$$S_{g(t_k)} \leq \frac{n(n-1)}{r_k^2}$$

d'où

$$R_k(s) \leq n(n-1)$$

sur B_k . On obtient

$$\mathcal{W}(g(t_k), u_k, r_k^2) \leq \frac{\int_0^1 [4\Phi'^2(s) - \ln(\Phi^2)\Phi^2(s)] A_k(s) r_k ds}{\int_0^1 \Phi^2(s) A_k(s) r_k ds} + n(n-1) + c_k - n \quad (3)$$

Comme $c_k \rightarrow -\infty$, il suffit de majorer le premier terme. On choisit $\Phi(s)$ une fonction monotone décroissante telle que $\Phi(s) = 1$ sur $[0, 1/2]$, $\Phi(s) = 0$ si $s \geq 1$, et $|\Phi'(s)|^2 \leq 10$ sur $[1/2, 1]$. On a $4\Phi'^2(s) - \ln(\Phi^2)\Phi^2(s) = 0$ en dehors de $[1/2, 1]$ et $4\Phi'^2(s) - \ln(\Phi^2)\Phi^2(s) \leq 400 + \frac{1}{e}$ sur $[1/2, 1]$.
Donc

$$\begin{aligned} \frac{\int_{1/2}^1 [4\Phi'^2(s) - \ln(\Phi^2)\Phi^2(s)] A_k(s) r_k ds}{\int_0^{1/2} \Phi^2(s) A_k(s) r_k ds} &\leq (400 + \frac{1}{e}) \frac{\text{vol}(B(p_k, r_k)) - \text{vol}(B(p_k, r_k/2))}{\text{vol}(B(p_k, r_k/2))} \\ &\leq (400 + \frac{1}{e}) \left(\frac{\int_0^{r_k} (r_k \sinh(r/r_k))^{n-1} dr}{\int_0^{r_k/2} (r_k \sinh(r/r_k))^{n-1} dr} - 1 \right) \\ &\leq (400 + \frac{1}{e}) \left(\frac{\int_0^1 \sinh^{n-1}(s) ds}{\int_0^{1/2} \sinh^{n-1}(s) ds} - 1 \right) \end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité résulte du théorème de comparaison de Bishop-Gromov avec un espace modèle de courbure $\frac{-1}{r_k^2}$.