

Cas des courbes non convexes: Grayson 1987

1 Introduction

Nous exposons brièvement la généralisation aux cas des courbes non convexes du théorème de Gage-Hamilton. Ce résultat est dû à Matthew Grayson ([Gr] 1987). Comme dans les notes sur [GH], N désignera le vecteur normal pointant vers l'intérieur de la courbe, et la courbure est définie par $kN = \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}$. On notera $C(t)$ la famille de courbes évoluant par le flot. On rappelle que $A(t)$ est l'aire du domaine bordé par la courbe $C(t)$ et que $A'(t) = -2\pi$.

Théorème 1.1. *Soit $C(0)$ une courbe plongée dans \mathbb{R}^2 , C^∞ . Alors il existe une famille de courbes $C(t)$, pour $t \in [0, A(0)/2\pi)$, plongées satisfaisant l'équation*

$$\frac{\partial C}{\partial t} = kN \tag{1}$$

De plus $C(t)$ est convexe pour t assez proche de $A(0)/2\pi$ et donc sa forme converge vers celle du cercle.

Nous supposons la courbe initiale non convexe. Plusieurs résultats établis dans [GH] restent vrais. L'existence d'une solution $C(t)$ en temps petit est démontrée pour une courbe initiale $C(0)$ plongée. De plus la solution est analytique, ce qui a comme conséquence importante ici qu'il n'y a qu'un nombre fini de points d'inflexion. On a vu que $C(t)$ reste plongée tant que la courbure reste bornée. Il est également facile de borner les dérivées de la courbure à partir d'une borne sur la courbure. La difficulté nouvelle essentielle est qu'on ne dispose plus comme dans [GH] d'un contrôle de la courbure par l'aire du domaine bordé, via la fonction entropie.

2 Outils supplémentaires

Nous donnons sans démonstration une série de résultats avant d'attaquer la preuve du théorème.

2.1 Equations d'évolution locale

On étudie des morceaux de la courbe $C(t)$, qu'on peut représenter comme des graphes $y(x, t)$ sur un axe x . La fonction $y(x, \cdot)$ représente l'évolution de y à x fixé. On utilisera l'angle θ entre le vecteur

tangent $(1, y'(x, t))$ et l'axe des x , où ' et '' désigneront $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. On a les formules suivantes

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y''}{1 + y'^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\theta''}{1 + y'^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{k''}{1 + y'^2} + k^3 \quad (4)$$

où, dans la formule (4), la courbure k du graphe est donnée par $k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$. Le signe n'est pas forcément le même que sur la courbe $C(t)$. Il dépend du choix d'orientation de l'axe des x . Ces équations sont de la forme $(L + h)f =$, où $L(f) = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}$. Elles sont strictement paraboliques lorsque y' est borné. De plus, $h = 0$ ou k^2 est positive. Le principe du maximum avec conditions de bord implique pour l'évolution de y , θ et k par rapport à t ce qui suit:

Lemme 2.1. *Si y' est borné sur un intervalle $[a, b] \times [t_1, t_2]$, alors lorsque t croit:*

1. *Un maximum local de y , θ décroît strictement. Un maximum local négatif de k décroît strictement. Un minimum local de y , θ croît strictement. Un minimum local positif de k croît strictement. Les points réalisant les extrêmes varient continuellement.*
2. *Il n'apparaît jamais de points critiques pour y , ni de points d'inflexion. Quand un nombre pair de points d'inflexion se rencontrent, le point plat résultant disparaît immédiatement.*
3. *La courbure totale d'un arc joignant deux points d'inflexion décroît strictement. Les intervalles $[\theta_-(t), \theta_+(t)]$ des directions tangentées de l'arc sont strictement emboîtés.*

où on rappelle que la **courbure totale** d'un arc α est $\int_{C(t)} |k| ds$. Entre deux points d'inflexion, k est de signe constant donc la courbure totale est, au signe près, $\theta_+ - \theta_-$. Contrairement à ce qui se passe dans [GH], le principe du maximum ne permet plus de minorer la courbure.

2.2 Contrôle par la courbure médiane

Le contrôle de la courbure par la courbure médiane reste valable, en adaptant la définition

Définition 1. *Soit $\bar{k}(t) = \sup\{b : |k| > b \text{ sur un arc de } C(t) \text{ de courbure totale } \pi\}$.*

Théorème 2.2 (Hamilton). *Si $\bar{k}(t)$ est borné pour $t \in [0, \epsilon]$, alors k est uniformément borné sur le même intervalle.*

Ce résultat sera utilisé sous sa forme contraposée: si la courbure diverge en une suite points $C(u_i, t_i)$, il existe une suite d'arcs $\alpha_i \subset C(t_i)$, de courbure totale $\geq \pi$, sur lequel la courbure diverge. Il n'est pas clair qu' α_i contienne $C(u_i, t_i)$. Le lemme suivant donne une réponse partielle.

Définition 2. *On appellera un arc **positif** (resp. **négatif**) un arc maximal $\alpha(t) \subset C(t)$ sur lequel $k > 0$ (resp. $k < 0$).*

Notons qu'on peut suivre continuellement un arc positif (resp. négatif) pendant un temps petit si ses extrémités sont des points d'inflexion.

Lemme 2.3. *Il existe une constante K dépendant de $C(0)$, telle que si $k \geq K$ (resp. $k < -K$) en un point $p(t) \in C(t)$, alors l'arc positif (resp. négatif) contenant $p(t)$ est de courbure totale $\geq \pi$.*

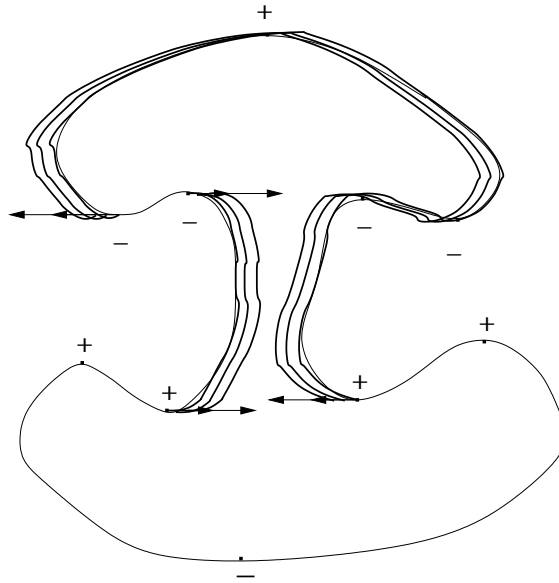
2.3 Le δ -whisker lemma

Ce lemme empêche certains sous-arcs de $C(t)$, dits jolis, de trop se rapprocher.

Définition 3. *Pour une direction x , on munit chaque point critique sur $C(t)$ de la fonction hauteur (i.e. la direction orthogonale de x), d'un label $+$ s'il est au dessus du domaine bordé par la courbe $C(t)$, d'un label $-$ sinon. Un arc $\alpha(t) \subset C(t)$ est dit **joli relativement à la direction x** , s'il joint deux points critiques de labels opposés. Un arc est **joli** s'il est joli relativement à une direction.*

Faisons quelques remarques

- par analyticité de la courbe, il n'y a qu'un nombre fini d'arcs jolis relatifs à une direction donnée.
- Le complémentaire $C(t) \setminus \alpha(t)$ d'un arc joli $\alpha(t)$ est un arc joli.
- Un arc $\alpha(t)$ est joli si et seulement si les vecteurs unitaires tangents aux extrémités de l'arc, dirigés vers l'intérieur de l'arc sont égaux. On notera $T_\alpha(t)$ ce vecteur et on l'appellera **vecteur tangent rentrant** de l'arc.



Lemme 2.4. *Il existe une constante δ dépendant de $C(0)$ telle que si deux arcs jolis $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont disjoints, sauf peut-être en leurs extrémités, alors pour tous $0 \leq s, s' \leq \delta$, les translatés $\alpha(t) + sT_\alpha(t)$ et $\beta(t) + s'T_\beta(t)$ ne s'intersectent pas, sauf peut-être en leurs extrémités.*

Remarque 1. *On ne suppose pas les arcs jolis relativement à la même direction.*

3 Preuve (morceaux) du théorème

Comme première application de ces résultats, on montre que si la courbe $C(t)$ s'écrase sur un point, il existe un minorant pour la courbure. On en déduit que la courbure totale converge vers 2π .

Remarque 2. *Pour que le diamètre tende vers 0, cela suppose que $C(t)$ existe pour $t \in [0, A(0)/2\pi)$, i.e. jusqu'à l'annulation de l'aire. Notons $T_0 := A(0)/2\pi$.*

Lemme 3.1. *Si le diamètre de $C(t)$ tend vers 0 quand t tend vers T_0 , alors*

1. *il existe une constante $M > -\infty$ telle que $k \geq M$ sur $[0, T_0)$.*
2. *$\int_{C(t)} |k| ds$ tend vers 2π quand t tend vers T_0 .*

Preuve: Supposons qu'il existe une suite de points $x_i \in C(t_i)$ telle que $k(x_i)$ tende vers $-\infty$ quand t_i tend vers T_0 . D'après le lemme 2.3, pour tout t_i assez proche de T_0 , il existe un arc $\alpha(t_i) \subset C(t_i)$, de courbure totale $\geq \pi$, sur lequel $k < 0$. Donc $\alpha(t_i)$ contient un arc joli, de courbure négative, et le vecteur tangent rentrant pointe vers l'intérieur du domaine bordé par $C(t_i)$. D'après le δ -whisker lemma, le δ translaté de $\alpha(t_i)$ dans la direction du vecteur tangent rentrant, donc vers l'intérieur du domaine, ne rencontre pas $C(t_i) \setminus \alpha(t_i)$. C'est impossible lorsque le diamètre de $C(t_i)$ est inférieur à δ et établit le point 1.

La courbure totale se décompose en

$$\begin{aligned} \int_{C(t)} |k| ds &= \int_{C(t)} k_+ ds - \int_{C(t)} k_- ds \\ &\geq \int_{C(t)} k_+ ds + \int_{C(t)} k_- ds \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

où $k_+ = \max(k, 0)$ et $k_- = \min(k, 0)$. Il suffit donc de voir que $\int_{C(t)} k_- ds$ tend vers 0. Or $\int_{C(t)} k_- ds$ est la somme, sur tous les arcs négatifs de $C(t)$, des écarts angulaires entre les vecteurs tangents aux extrémités de chaque arc. Supposons que pour une suite d'arcs négatifs $\alpha(t_i)$, cet écart soit uniformément majoré par une constante $-\epsilon < 0$. On a donc une suite d'arcs $\alpha(t_i)$, de diamètre tendant vers 0, dont l'angle entre les vecteurs tangents aux extrémités est majoré par $-\epsilon < 0$. Nécessairement, l'infimum de la courbure - ici $k = \frac{\partial \theta}{\partial s}$ - sur chaque arc $\alpha(t_i)$ tend vers $-\infty$ quand t_i tend vers T_0 \square .

En résumé, si la courbe s'écrase sur un point, la courbure tend à être positive, sauf sur des arcs (en nombre fini) de courbure totale tendant vers 0.

3.1 Structure de la preuve du théorème

On divise la preuve en plusieurs cas:

- cas A: $C(t)$ s'écrase sur un point. On normalise $C(t)$ en une courbe $\tilde{C}(\tau)$, d'aire constante pour $\tau \in [0, +\infty)$ et on considère la longueur de la courbe normalisée lorsque τ tend vers $+\infty$.

- cas A_1 : si $L(\tilde{C}(\tau))$ tend vers $+\infty$, on aboutit à une contradiction.
- cas A_2 : si $L(\tilde{C}(\tau_i))$ reste bornée pour une sous-suite τ_i tendant vers $+\infty$, la courbe $\tilde{C}(\tau)$ devient convexe pour τ assez grand, et donc $C(t)$ aussi.
- cas B : la courbure diverge avant que le diamètre s'annule. On pourrait imaginer par exemple à une spirale qui dégénère avant d'être dépliée. Cela peut-être pour $t = T_0$, i.e. l'aire s'annule mais pas le diamètre. On considère de petits arcs positifs ou négatifs sur lesquels la courbure n'est pas bornée par la constante K du lemme 2.3. D'après le théorème 2.2, il existe même des arcs de courbure totale $\geq \pi$, sur lequel la courbure diverge, et donc leur diamètre tend vers 0. Cela donne un sens non trivial à la définition suivante

Définition 4. Soit $\bar{\omega} = \sup \omega$ tel que : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un arc $\alpha(t)$ satisfaisant

- le diamètre de $\alpha(t)$ est $\leq \epsilon$.
- $\int_{\alpha(t)} |k| ds = \omega$.
- $k > K$ ou $k < -K$ sur $\alpha(t)$.

La définition est non triviale au sens que $\bar{\omega} > 0$ et même $\bar{\omega} \geq \pi$ d'après le théorème 2.2. on divise en deux sous-cas, le premier étant nettement plus facile.

- cas B_1 : $\bar{\omega} > \pi$, on aboutit à une contradiction.
- cas B_2 : $\bar{\omega} = \pi$, on aboutit à une contradiction.

On va faire les preuves des cas A_2 et B_1 , ce qui donnera un échantillon des arguments utilisés, dans les cas les plus faciles.

3.2 cas A_2 : la courbe devient convexe

Pour simplifier les notations, on peut supposer que $A(0) = 2\pi$ et donc $A(t) = 2\pi(1 - t)$. Par hypothèse, $C(t)$ est définie sur $[0, 1)$, et on suppose qu'elle n'est jamais convexe. On va raisonner par l'absurde. Lorsqu'on dilate une courbe $C(0)$ en $\tilde{C}(0) = \lambda C(0)$, les solutions du flot de la courbure pour ces deux courbes initiales sont liées par la relation

$$\tilde{C}(\tau) = \tilde{C}(\lambda^2 t) = \lambda C(t) \quad (5)$$

c'est à dire que la dilatation commute avec le flot si la variable temps est aussi dilatée en $\tau = \lambda^2 t$. Dans le cas d'une dilatation dépendant du temps $\lambda(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{A(t)}}$, on va considérer la transformation

$$\tilde{C}(\tau) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^{1/2} C(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{A(t)}} C(t) \quad (6)$$

ce qui conduit à $\tau(t) = -\ln(1 - t)$. La courbe \tilde{C} est définie sur $[0, +\infty)$, d'aire constante 2π , et n'est jamais convexe. Cependant, elle n'est pas, en général, solution du flot normalisé (voir les notes sur Gage-Hamilton) associé à $\tilde{C}(0)$. C'est vrai pour un cercle centré en $(0, 0)$ et dans ce cas le flot normalisé est constant. Dans le cas A_2 , on suppose que pour une suite (τ_i) tendant vers $+\infty$, les longueurs $L(\tilde{C}(\tau_i))$ restent bornées. Par ailleurs, la courbure totale est invariante

par dilation donc elle converge vers 2π d'après 3.1. Par compacité de l'ensemble des courbes de diamètre fixe, de longueur bornée et de courbure totale bornée, on extrait une suite, toujours notée $\tilde{C}(\tau_i)$, convergeant pour la topologie de Gromov-Hausdorff vers une courbe $\tilde{C}(\infty)$, de classe C^1 , convexe (mais pas strictement). Comme par hypothèse $\tilde{C}(\tau_i)$ est non convexe, on peut supposer qu'il existe un nombre fixe d'arcs négatifs $\alpha_1(\tau_i), \dots, \alpha_n(\tau_i)$ dans chaque courbe (rappelons que les points d'inflexions, donc les arcs négatifs, ne peuvent pas apparaître dans $C(t)$).

Lemme 3.2. *Quitte à extraire, il existe un unique direction v , tangente pour tout i à tous les arcs négatifs de $\tilde{C}(\tau_i)$. De plus, les directions tangentes aux arcs négatifs convergent vers v .*

Preuve: Rappelons que pour chaque arc négatif $\alpha_k(\tau_i)$, les angles $[\theta_-(\tau_i), \theta_+(\tau_i)]$ décrits par les vecteurs tangents à l'arcs sont strictement emboîtés (lemme 2.1 3)) et décroissent vers un singleton (lemme 3.1). Il suffit donc de voir qu'entre deux arcs négatifs consécutifs, l'écart angulaire (i.e. la courbure totale), soit tend vers 0, soit tend à être $\geq \pi$. Comme la somme de ces écarts doit être proche de 2π , chaque écart sera proche de 0, π ou 2π . En revenant aux courbes $C(t_i)$, on peut supposer, quitte à extraire, que sur chaque arc positif, soit la courbure reste bornée, soit elle diverge. Dans le premier cas, la courbure sur l'arc correspondant dans la dilatation $\tilde{C}(\tau_i)$ tend vers 0. Dans le deuxième cas, d'après le lemme 2.3, l'arc positif a courbure scalaire totale $\geq \pi$ \square .

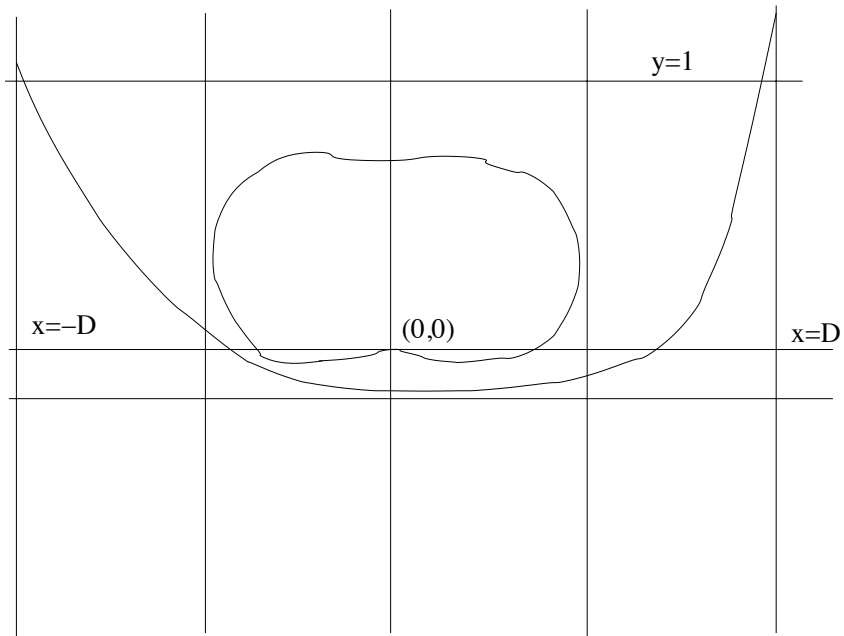
Pour chaque courbe $\tilde{C}(\tau_i)$, on considère des coordonnées (x, y) , où x est parallèle à v , telles que $(0, 0)$ est dans un arc négatif et est un maximum local (voir dessin plus bas). Il existe $D > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, pour tout i assez grand,

- Les abscisses de $\tilde{C}(\tau_i)$ sont dans $[-D/2, D/2]$.
- Les ordonnées de $\tilde{C}(\tau_i)$ satisfont $y > -\epsilon$.

L'idée est de comparer l'évolution de $\tilde{C}(\tau_i)$ au voisinage de $(0, 0)$ avec une celle d'une courbe convexe située sous $\tilde{C}(\tau_i)$.

Définition 5. *On appelle un (ϵ, D) -panier une courbe convexe β définie sur $[-D, D]$ telle que*

- L'ordonnée satisfait $y > -\epsilon$ sur $[-D, D]$.
- En $-D$ et en $+D$, $y > 1$.
- La dérivée par rapport à x satisfait $|y'| < 1$ sur $[D, D]$.



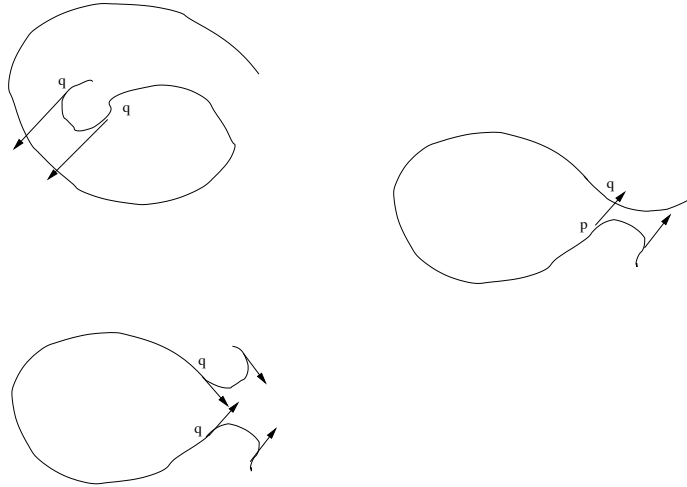
Clairement, si D est assez grand, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un (ϵ, D) -panier $\beta(0)$ situé sous la courbe $\tilde{C}(\tau_i)$. Par comparaison avec les solutions de l'équation de la chaleur de conditions initiales $y = -\epsilon$ en $t = 0$ et de conditions de bord $y(t) = 1$ en $\pm D$, on peut montrer qu'il existe une solution $\beta(t)$ du flot de la courbure, défini sur un intervalle $[0, t_0]$ indépendant de ϵ . De plus, il existe une fonction $f(\epsilon)$ telle que $\beta(t)$ devient strictement positive pour $t > f(\epsilon)$, et $f(\epsilon)$ décroît vers 0 quand ϵ tend vers 0 (cf lemme 4.3 dans [Gr], mais on n'a pas très bien compris). Maintenant, considérons τ_i assez grand pour que $f(\epsilon) < \min\{t_0, 1/2\}$. Faisons évoluer simultanément $\tilde{C}(\tau_i)$ et $\beta(0)$ par le flot de la courbure. En vertu d'un principe du maximum (lemme 3.4 dans [Gr]), les courbes ne doivent pas se couper. Faire évoluer $\tilde{C}(\tau_i)$ pendant une seconde est équivalent à faire évoluer $C(t_i)$ pendant $1 - t_i$ seconde. En effet, l'aire de $\tilde{C}(\tau_i)$ étant égale à 2π , le flot est défini pendant 1 seconde, alors que l'aire de $C(t_i)$ est $2\pi(1 - t_i)$, avec $\tau_i = -\ln(1 - t_i)$. Les flots sont reliés par la relation (5). Par hypothèse, l'arc négatif reste négatif donc le maximum local en $(0, 0)$ (pour C ou \tilde{C}) décroît strictement (lemme 2.1) donc est strictement négatif pour $t \in]\tau_i, \tau_i + 1]$. Comme $\beta(t)$ est positive en un temps $f(\epsilon) < 1$, on a une contradiction \square .

3.3 cas B_1 : si $\bar{\omega} > \pi$, on aboutit à une contradiction

Nous sommes dans le cas où $C(t)$ est défini sur un intervalle $[0, t_0)$ et $K_{MAX}(t) \rightarrow +\infty$ alors que $\text{diam}(C(t)) \geq d_0 > 0$. Eventuellement, $t_0 = T_0$. On suppose également, qu'il existe $w > \pi$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un arc $\alpha(t) \subset C(t)$ tel que

- $\text{diam}(\alpha(t)) \leq \epsilon$.
- $\int_{\alpha(t)} |k| ds = \omega$.
- $k > K$ ou $k < -K$ sur $\alpha(t)$.

Considérons $\epsilon < \min\{d_0, \delta\}$, où δ est celui du δ -whisker lemma. Prolongeons $\alpha(t)$ jusqu'aux points d'inflexions $p(t)$, $q(t)$. On peut supposer que ces deux points ne sont pas joints par un petit arc, sinon $C(t)$ a un petit diamètre et on se ramène au cas A. Au voisinage d'un des deux points au moins, supposons que c'est $p(t)$, le prolongement de l'arc $\alpha(t)$ a une courbure très grande et de signe opposée à celle de $\alpha(t)$. Appelons $\beta(t)$ l'arc positif ou négatif correspondant. D'après le lemme 2.3, il est de courbure scalaire totale $\geq \pi i$. Donc il contient un arc joli, dont le δ -translaté ne doit pas intersecter $\alpha(t)$. Cela signifie que le prolongement de $\alpha(t)$ en $q(t)$ doit aussi être très courbé. Il contient donc un arc joli dont le δ -translaté est disjoint du précédent. C'est impossible.



□.

References

- [H] Hamilton R. S., *three-manifolds with positive ricci curvature*, J. Differential Geometry 17 (1982) 255-306.
- [Ga1] Gage M.E., *An isoperimetric inequality with applications to curve shortening*, Duke Math. Journal 50 No 4, (1983) 1225-1229.
- [Ga2] Gage M.E., *Curve shortening process makes convex curves circular*, Invent. Math. 76, (1984) 357-364.
- [GH] Gage M.E., Hamilton R. S., *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Differential geometry 23 (1986) 69-96.
- [Gr] Grayson M., *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geometry 26 (1987) 285-314.
- [PW] Protter M.H., Weinberger H.F., *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, 1967.
- [T] Taylor M., *Partial differential equations III*, Springer Applied Math. Sciences 117.