Examen d'algèbre.
L1S2. Licences PSI.

Nom, prénom, groupe : $\boxed{}$

1 Consignes (à lire absolument).

- Tout document et appareil électronique (notamment votre téléphone portable) doivent rester dans votre sac. Il y a une horloge disponible en face de vous.
- Répondez sur l'énoncé. Tous les cadres sont à remplir : ils ont tous une taille suffisante. Les petits cadres $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$ ... sont destinés à des petites réponses $\boxed{\text{oui}}$, $\boxed{\text{faux}}$, $\boxed{3}$ ... Il est inutile de mettre des justifications quand elles ne sont pas demandées. Il est inutile d'écrire les étapes de calcul.
- Si vous voulez changer votre réponse, barrez clairement et réécrire dans le même cadre ou à côté de ce cadre. Vous pouvez aussi redemander un nouvel énoncé.
- Lisez attentivement chaque exercice jusqu'au bout : une aide est parfois proposée.
- Il n'y a peu de calculs difficiles. N'hésitez pas à sauter un exercice qui vous parait trop dur ou trop long.
- Le barème est indiqué sur chaque exo (ex : 3+3+3 signifie que l'exercice comporte 3 cadres et que chaque cadre peut rapporter 3 points). Pour les QCM, c'est 1 point par bonne réponse, -1 par mauvaise, et 0 si on ne se prononce pas. Les QCM peuvent comporter plusieurs bonnes réponses et plusieurs mauvaises réponses.
- Le barème est sur XX points. Vous n'avez pas le même sujet que votre voisin. Bon courage.

2 Début

Exercice 2.1 Dans tout cet excercie, nous travaillons dans $\mathbb{R}^3$. On peut dire que

(a). L'ensembles des vecteurs $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tel que $x - y + y = 1$ est un s.e.v. $\boxed{}$

(b). $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est dans $\text{vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. $\boxed{}$

(c). $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ est dans le plan d'équation $x - y = 0$. $\boxed{}$

(d). La somme de deux différentes droites vectorielles est un s.e.v de dimension 2. $\boxed{}$

(e). L'intersection de deux plans vectoriels est une droite vectorielle. $\boxed{}$

(f). Si w est un vecteur non nul orthogonal à un plan $P = \text{vect}(v_1, v_2)$, alors (w, v_1, v_2) forme une base de $\mathbb{R}^3$. $\boxed{}$

(g). La seule base du s.e.v. $\{0\}$ est constituée du vecteur nul. $\boxed{}$

(h). L'intersection de 2 s.e.v. de dimension 2 ne peut pas être $\mathbb{R}^3$. $\boxed{}$

Exercice 2.2 On pose $v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$. Quel est nombre de solutions du système linéaire $xv_1 + yv_2 = w$ (les deux inconnues sont x et y) ?

(on ne demande pas le détail des calculs).

Le vecteur w appartient-il à $\text{vect}(v_1, v_2)$? Justifiez brièvement.

Combien de solutions à le système linéaire $xv_1 + yv_2 + zv_3 = w$ (les trois inconnues sont x, y et z). ?

(on ne demande pas le détail des calculs).

Donnez les coordonnées de w dans la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 2.3 Soient S et T deux s.e.v. de $\mathbb{R}^d$. On peut dire que:

(a). $S + T$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme la somme d'un vecteur de S et d'un vecteur de T.

(b). Si $S = \{0\}$ alors $S + T = T$.

(c). Si $S = \mathbb{R}^d$ alors $S + T = S$.

(d). $S + T$ est toujours inclus dans $S \cap T$.

(e). $S + T$ est toujours inclus dans $S \cup T$.

(f). Si $S \subset T$ alors $S + T = T$.

(g). Si $S \subset T$ alors $S + T \subset T$.

Exercice 2.4 Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Notons S l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = 0$. L'ensemble S est un de $\mathbb{R}^d$ avec $d =$. Donnez la base standard de S.

Exercice 2.5 Considérons les deux s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$S_1 = \text{vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \qquad S_2 = \text{vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

Vrai ou faux :

(a). On a $S_1 = S_2$.

(b). S_1 et S_2 sont des droites.

(c). La base standard de S_1 est donnée par $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$.

(d). L'équation standard de S_1 sont donnée par $x - 2y + z = 0$.

Donnez les équations standards de $S_1 \cap S_2$.

Exercice 2.6 (2+3) On rappelle qu'une matrice antisymétrique est une matrice A telle que $A = -A^\top$.

Que valent les coefficients diagonaux d'une matrice anti-symétrique ? Justifiez.

Ecrire la matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A_{i,j} = 2i - j$ pour $j > i$.

Exercice 2.7 Donnez la définition d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^d$.

Considérons $(e_1, ..., e_d)$ une telle base. Considérons $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix}$. Notons $\tilde{v} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{bmatrix}$ l'écriture de v dans la base $(e_1, ..., e_d)$. Démontrez que $\sum_{i=1}^d v_i^2 = \sum_{i=1}^d \lambda_i^2$. On soignera bien la présentation; en indiquant en particulier les propriétés du produit scalaire que l'on utilise.

Aide : on rappelle que, par définition des coordonnées, on a $v = \lambda_1 e_1 + ... + e_d$. Calculez alors $\langle v, v\rangle$ de deux manière différentes.

Exercice 2.8 Soit A_m la matrice réelle

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{bmatrix}$$

(m étant un paramètre). Les questions suivantes peuvent être traitées de manière indépendante.

1) Calculer $\det(A_m)$. Pour quelles valeurs de m, la matrice A_m est inversible ? (on ne demande pas ici de calculer l'inverse).

2) Résoudre le système linéaire réel:

$$A_m \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) Quelle est la matrice inverse de A_m quand $m \neq 1$? (donnez uniquement le résultat).

4) Pour $m \neq 1$, et a, b, c des nombres réels quelconques fixés, résoudre

$$A_m \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Exercice 2.9 Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $M_a = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$.

Calculer le déterminant de M_a.

Factoriser $\det M_a$ sous la forme: $\det M_a = (a-1)^2 \times$

On définit les vecteurs $v_1 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$ et $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}$. Et on note $V = \operatorname{vect}(v_1, v_2, v_3)$.

Pour quelle(s) valeur(s) de a, a-t-on $\dim V = 3$?

Pour quelle(s) valeur(s) de a a-t-on $\dim V = 1$?

En déduire la/les valeur(s) de a telle(s) que $\dim V = 2$.

Exercice 2.10 On définit les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a). Quelle est la dimension de $E_1 = \operatorname{vect}(v_1, v_2, v_3)$? Justifier.

(b). Quelle est la dimension de $E_2 = \operatorname{vect}(v_2, v_3, v_4)$? Justifier.

(c). Donner une (ou des) équation(s) linéaires définissant le sous-espace E_2.

Exercice 2.11 Soit $n \geq 2$ un entier. On définit la matrice A_n de taille n par

$$\begin{cases} A_{ii} = 1 & \text{pour tout } 1 \leq i \leq n \\ A_{i,i+1} = 1 & \text{pour tout} 1 \leq i \leq n-1 \\ A_{n,1} = 1 & \\ A_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a). Ecrire A_4 et calculer son déterminant.

(b). Ecrire le développement de Δ_5 selon la premiŔre colonne et en déduire la valeur de Δ_5.

(c). Déduire l'expression de $\det A_n$ en fonction de n.

Exercice 2.12 On note e_1, e_2, e_3 et e_4 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On définit les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants.

$$S_1 = \text{vect}(e_1), \quad S_2 = \text{vect}(e_1 + e_2, e_3), \quad S_3 = \{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \; y = 0 \text{ et } z = 0 \}$$

Donner les dimensions des sous-espaces vectoriels suivants:

(a). $\dim S_1 =$ $\boxed{}$

(b). $\dim S_2 =$ $\boxed{}$

(c). $\dim S_3 = \boxed{}$

(d). $\dim S_1 \cap S_2 = \boxed{}$

(e). $\dim(S_1 + S_3) = \boxed{}$

(f). $\dim(S_2 + S_3) = \boxed{}$

(g). $\dim((S_2 + S_3) \cap S_1) = \boxed{}$

(h). $\dim(S_2 + (S_3 \cap S_1)) = \boxed{}$