Communauté
UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Raphaël Achet

Thèse dirigée par **Michel Brion, directeur de recherche CNRS, Institut Fourier**

préparée au sein de **l'Institut Fourier**
dans **l'École Doctorale MSTII**

Groupe de Picard des groupes unipotents sur un corps quelconque

Thèse soutenue publiquement le **25 septembre 2017**,
devant le jury composé de :

M. Michel BRION
Directeur de Recherche CNRS, Université Grenoble Alpes, Directeur de thèse
M. Jean FASEL
Professeur, Université Grenoble Alpes, Examinateur
M. Philippe GILLE
Directeur de Recherche CNRS, Université Claude Bernard Lyon 1, Rapporteur
Mme. Anne MOREAU
Professeure, Université Lille 1, Examinatrice
Mme. Lucy MOSER-JAUSLIN
Professeure, Université de Bourgogne, Examinatrice
M. Burt TOTARO
Professeur, University of California, Los Angeles, Rapporteur

Résumé

Soit k un corps quelconque. Dans cette thèse, on étudie le groupe de Picard des k-groupes algébriques unipotents (lisses et connexes).

Tout k-groupe algébrique unipotent est extension itérée de formes du groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$; on va donc d'abord s'intéresser au groupe de Picard des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$. L'étude de ce groupe est faite avec une méthode géométrique qui permet de traiter le cas plus général des formes de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$. On obtient ainsi une borne explicite sur la torsion du groupe de Picard des formes de $\mathbb{A}^1_k$ et sur la torsion de la composante neutre du foncteur de Picard de leur complétion régulière. De plus, on trouve une condition suffisante pour que le groupe de Picard d'une forme de $\mathbb{A}^1_k$ soit non trivial et on construit des exemples de formes non triviales de $\mathbb{A}^1_k$ dont le groupe de Picard est trivial.

Un k-groupe algébrique unipotent est une forme de l'espace affine. Afin d'étudier le groupe de Picard d'une forme X de $\mathbb{A}^n_k$ avec une méthode géométrique, on définit un foncteur de Picard "restreint". On montre que si X admet une complétion régulière, alors le foncteur de Picard "restreint" est représentable par un k-groupe unipotent (lisse, non nécessairement connexe). Avec ce foncteur de Picard "restreint" et des raisonnements purement géométriques, on obtient que le groupe de Picard d'une forme unirationnelle de $\mathbb{A}^n_k$ est fini. De plus, on généralise un résultat dû à B. Totaro : si k est séparablement clos, et si le groupe de Picard d'un k-groupe algébrique unipotent commutatif est non trivial, alors il admet une extension non triviale par le groupe multiplicatif.

Mots-clés

Groupe de Picard, Foncteur de Picard, Groupes algébriques unipotents, Corps non parfait, Formes de l'espace affine, Torseurs.

Abstract

Let k be any field. In this Ph.D. dissertation we study the Picard group of the (smooth connected) unipotent k-algebraic groups.

As every unipotent algebraic group is an iterated extension of forms of the additive group $\mathbb{G}_{a,k}$, we will study the Picard group of the forms of $\mathbb{G}_{a,k}$. In fact we study the Picard group of forms of $\mathbb{G}_{a,k}$ and the affine line $\mathbb{A}^1_k$ simultaneously using a geometric method. We obtain an explicit upper bound on the torsion of the Picard group of the forms of $\mathbb{A}^1_k$ and their regular completion, and a sufficient condition for the Picard group of a form of $\mathbb{A}^1_k$ to be nontrivial. We also give examples of nontrivial forms of $\mathbb{A}^1_k$ with trivial Picard groups.

In general, a unipotent k-algebraic group is a form of the affine n-space $\mathbb{A}^n_k$. In order to study the Picard group of a form X of $\mathbb{A}^n_k$ with a geometric method, we define a "restricted" Picard functor; we show that if X admits a regular completion then the "restricted" Picard functor is representable by a unipotent k-algebraic group (smooth, not necessarly connected). With this "restricted" Picard functor and geometric arguments we show that the Picard group of a unirational form of $\mathbb{A}^n_k$ is finite. Moreover we generalise a result of B. Totaro : if k is separably closed and if the Picard group of a unipotent k-algebraic group is nontrivial then it admits a nontrivial extension by the multiplicative group.

Keywords

Picard group, Picard functor, Unipotent algebraic group, Imperfect field, Forms of the affine space, Torsor.

Classification MSC2010

14C22, 14H20, 14K30, 14R10, 20G07, 20G15.

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord vers mon directeur de thèse, Michel Brion. Merci de m'avoir proposé un sujet passionnant ; tu as su orienter mes recherches par tes idées, tes remarques, ta patience et tes encouragements. Pour tout cela, je te suis très reconnaissant.

Je remercie Philippe Gille et Burt Totaro d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse : l'intérêt qu'ils portent à mes travaux est pour moi un honneur, et une incitation à continuer. Je suis très reconnaissant à Jean Fasel, Anne Moreau et Lucy Moser-Jauslin d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie Masayoshi Miyanishi pour m'avoir informé de l'existence de l'importante référence [KM77] (après qu'une première version de [Ach17] a circulé), et pour des discussions très intéressantes. Je veux remercier tout particulièrement Michel Raynaud qui a accepté de me recevoir, et de partager un peu de son immense savoir avec moi. Je remercie Ziyang Gao qui m'a fait découvrir [Tit67] dont le texte original est très difficile à trouver. Je remercie Bruno Laurent et Lara Thomas qui m'ont aidé à conjecturer le théorème 3.4.3 ; ainsi que Jean Fasel, Mathieu Florence et Matthieu Romagny pour leurs remarques pertinentes et leurs suggestions. Enfin, je remercie Zev Rosengarten pour une discussion enrichissante sur les groupes algébriques et leurs groupes de Picard. Plus généralement, je voudrais remercier tous les mathématiciens que j'ai croisés en conférence, ou en séminaire et qui m'ont si bien accueilli.

De plus, je tiens à remercier l'Institut Fourier en général, et particulièrement Christine, Francesca, Géraldine, Lindsay et Patrick toujours disponibles et efficaces quand j'ai eu besoin de leur aide. Je salue aussi les doctorants, ex-doctorants et A.T.E.R. de l'institut : Amina, Adrien, Ya, Sébastien, Luc, Zhizhong, Bruno, Louis-Clément, Alejandro, Baptiste, Florent, Martine, Clément, Julie, Agnès, Juan et Thibaut. Je remercie tout particulièrement Pedro-Pablo : tu es le meilleur co-bureau que j'ai jamais eu !

Je n'oublie pas mes amis de Grenoble et d'ailleurs qui m'ont accompagné pendant ces années : Christophe et Aurore de Stokholm ; Raphaël, Mathilde, Mathieu, Romain et Benoit de Paris ; Maxime et Auguste de Lyon ; Giuseppe, Quentin et Greg de Grenoble.

Je remercie ma famille qui a toujours été à mes côtés ; particulièrement ma grand-mère et mes frères qui m'ont soutenu, et mes parents qui ont passé du temps à relire ma thèse afin d'en corriger l'orthographe, la grammaire et la conjugaison.

Enfin, j'ai une pensée toute particulière envers les machines à café du second étage ; sans elles, je n'y serais jamais arrivé : je leur dois au moins 20% de ma productivité.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et résumé des résultats obtenus

Soit k un corps quelconque. Dans cette thèse, on considère des *k-groupes algébriques*, c'est-à-dire les k-schémas en groupes de type fini, lisses. Les k-groupes algébriques affines sont les groupes algébriques linéaires définis sur k au sens de [Bor12]. Plus précisément, on étudie le groupe de Picard des k-groupes algébriques unipotents connexes.

Nous allons tout d'abord faire un rapide résumé des connaissances actuelles sur la structure des groupes algébriques linéaires sur un corps quelconque. Ensuite, nous allons présenter les principaux résultats obtenus dans cette thèse.

1.1 Groupes algébriques linéaires sur un corps quelconque

1.1.1 État de l'art et motivation

Historiquement, M. Rosenlicht [Ros56] [Ros63] a été le premier à étudier les groupes algébriques linéaires sur un corps quelconque. A. Borel et J. Tits ont introduit la notion de groupe pseudo-réductif (qui coïncide avec la notion de groupe réductif sur un corps parfait) Récemment, des progrès majeurs ont été effectués sur la structure des groupes linéaires sur un corps quelconque avec l'étude de la structure des groupes pseudo-réductifs par B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad [CGP15]. On considère un k-groupe linéaire connexe G ; il se décompose via la suite exacte

$$1 \to \mathcal{R}_{u,k}(G) \to G \to G/\mathcal{R}_{u,k}(G) \to 1,$$

où $\mathcal{R}_{u,k}(G)$ est le *radical unipotent* de G (c'est-à-dire $\mathcal{R}_{u,k}(G)$ le plus grand sous-groupe algébrique de G qui est unipotent et distingué) et $G/\mathcal{R}_{u,k}(G)$ est un k-groupe *pseudo-réductif* (c'est-à-dire le radical unipotent de $G/\mathcal{R}_{u,k}(G)$ est trivial). Cette suite exacte suggère qu'une meilleure compréhension des groupes algébriques unipotents et pseudo-réductifs doit permettre de comprendre les groupes linéaires connexes en général.

En caractéristique supérieure à 5, la construction “standard” [CGP15] [CP16] réduit essentiellement la classification des groupes algébriques pseudo-réductifs au cas des groupes pseudo-réductifs commutatifs. En caractéristique 3 et surtout 2, la classification est bien plus complexe. La classification des groupes pseudo-réductifs commutatifs semble elle insoluble. Néanmoins, B. Totaro a montré que pour U groupe algébrique unipotent connexe commutatif le groupe $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ est le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(U)$ formé des classes invariantes par translation [Tot13, Lem. 9.2]. Il a ainsi réussi à obtenir un début de classification des groupes pseudo-réductifs commutatifs de dimension 2 [Tot13, Cor. 9.5]. Enfin, il a construit un k-groupe algébrique unipotent connexe commutatif *k-ployé* (c'est-à-dire qui n'admet aucun sous-groupe fermé isomorphe au groupe additif $\mathbb{G}_{a,k}$) de dimension 2 sur un corps séparablement clos dont le groupe de Picard est trivial [Tot13, Exe. 9.7]. Cet exemple et d'autres [Tot13, Exe. 9.10] montrent que la classification en dimension supérieure est complexe.

Ainsi, afin d'étudier le groupe de Picard des groupes algébriques linéaires sur un corps quelconque et les groupes pseudo-réductifs commutatifs, la première étape est un examen approfondi du groupe de Picard des groupes unipotents.

1.1.2 Groupes unipotents sur un corps quelconque

Si k est un corps parfait, alors tous les k-groupes algébriques unipotents connexes U sont *k-déployés*, autrement dit, il existe une suite de sous-groupes

$$\{1\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_n = U,$$

tel que pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, U_i est un sous-groupe distingué de U_{i+1} et $U_{i+1}/U_i \cong \mathbb{G}_{a,k}$. Il en résulte que tout k-groupe algébrique unipotent connexe est isomorphe en tant que variété à l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$, donc son groupe de Picard est trivial ; de plus, le groupe de Picard des groupes linéaires connexes est fini [KKLV89, Pro. 4.5].

Sur un corps non parfait le groupe de Picard d'un k-groupe algébrique unipotent connexe n'est pas forcément fini (voir l'exemple 3.5.2, ou le lemme [KMT74, Lem. 6.11.1]) mais il est de p^n-torsion pour une certaine puissance n de la caractéristique p du corps (voir par exemple la proposition 3.6.3).

Sur un corps quelconque, la structure des groupes unipotents est très riche ; elle a été étudiée par J. Tits [Tit67], T. Kambayashi, M. Miyanishi et M. Takeuchi [KMT74] et J. Oesterlé [Oes84]. Un rapide résumé des résultats obtenus par J. Tits est fait dans le chapitre 2.

Sur un corps non parfait de caractéristique $p > 0$, il existe des groupes unipotents qui ne sont pas déployés. Par exemple, J. Oesterlé a remarqué que si k'/k est une extension purement inséparable alors $U = R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})/\mathbb{G}_{m,k}$ (où $R_{k'/k}$ désigne la restriction de Weil) est un k-groupe algébrique unipotent connexe k-ployé [Oes84, Lem. VI 5.1].

Un autre exemple important de k-groupe algébrique unipotent connexe k-ployé est le suivant : soit $a \in k \setminus k^p$, on considère le sous-groupe G de $\mathbb{G}^2_{a,k}$ défini par $y^p = x + ax^p$. Si $k' = k[a^{1/p}]$, alors $G_{k'} \cong \mathbb{G}_{a,k'}$. Mais la complétion régulière C de G est la courbe de $\mathbb{P}^2_k$ définie par l'équation $y^p = xz^{p-1} + ax^p$, et $C \setminus G$ est un unique point dont le corps résiduel est $k' \neq k$. Donc G n'est pas isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$, mais $G_{k'}$ est k'-isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k'}$.

Définition 1.1.1. Soit X et Y deux k-schémas (respectivement deux k-schémas en groupes), on dit que X est une *k-forme* de Y s'il existe une extension K/k tel que X_K est K-isomorphe à Y_K (respectivement X_K est isomorphe comme K-schéma en groupes à Y_K).

Avec cette définition, le k-groupe algébrique G considéré ci-dessus est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. Les formes de $\mathbb{G}_{a,k}$, et plus généralement les formes de $\mathbb{A}^1_k$ ont été étudiées par P. Russell [Rus70], C. Greither [Gre86] et T. Kambayashi et M. Miyanishi [KM77]. Certains des résultats de P. Russell sur les formes de $\mathbb{G}_{a,k}$ ont été généralisés aux formes de $\mathbb{G}^n_{a,k}$ dans [KMT74, §2].

Un des principaux résultats obtenus par P. Russell est une présentation explicite des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$:

Théorème. *[Rus70, 2.1]*

Soit G une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. Alors G est isomorphe à un sous-groupe $\mathrm{Spec}\,(k[x,y]/I)$ *de $\mathbb{G}^2_{a,k}$, où I est un idéal de $k[x,y]$ engendré par le polynôme $y^{p^n} - \left(x + a_1x^p + \cdots + a_mx^{p^m}\right)$.*

Un autre résultat remarquable obtenu par P. Russell est l'existence pour toute forme X de $\mathbb{A}^1_k$ d'une unique extension minimale k'/k purement inséparable telle que $X_{k'} \cong \mathbb{A}^1_{k'}$. Un résumé des résultats obtenus par P. Russell est fait dans les sections 3.1 et 3.2.

1.2 Principaux résultats obtenus

1.2.1 Groupe de Picard des formes de $\mathbb{A}^1_k$ et de $\mathbb{G}_{a,k}$

Pour tout k-groupe algébrique unipotent connexe, il existe une suite de composition dont les quotients successifs sont des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$ [SGA3II, XVII Pro. 4.1.1]. La première étape pour étudier le groupe de Picard des groupes unipotents est donc l'étude du groupe de Picard des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$.

Ce groupe de Picard a déjà été étudié dans un cas particulier dans [KMT74], et le groupe de Picard des formes de $\mathbb{A}^1_k$ a, lui, été étudié dans un cas particulier dans [Gre86]. T. Kambayashi et M. Miyanishi ont obtenu dans [KM77], de nombreux résultats sur les formes de $\mathbb{A}^1_k$ et leur groupe de Picard [KM77, Thm. 4.2], [KM77, Pro. 4.3.2] et [KM77, Cor. 4.6.1]. Les principaux résultats présentés dans cette thèse sur le groupe de Picard des formes de $\mathbb{A}^1_k$ ont été publiés dans [Ach17].

Dans le chapitre 3, on va étudier le groupe de Picard des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$ et de $\mathbb{A}^1_k$ simultanément à l'aide d'une méthode géométrique. Le principal résultat obtenu est le suivant :

Théorème. *3.6.1 ou [Ach17, Thm. 2.4]*
Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$, et soit $n(X)$ le plus petit entier positif tel que $X_{k^{p^{-n}}} \cong \mathbb{A}^1_{k^{p^{-n}}}$.

(i) $\mathrm{Pic}(X)$ *est de $p^{n(X)}$-torsion.*

(ii) Si X est une forme non trivial de $\mathbb{A}^1_k$ qui a un point k-rationnel (par exemple X est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ où k est séparablement clos), alors $\mathrm{Pic}(X) \neq \{0\}$.

L'assertion (i) est énoncée dans [KM77, Pro. 4.3.2], mais leur preuve n'est valide que si k est séparablement clos. Les arguments de notre preuve de (i) sont assez généraux ; on les utilise pour majorer la torsion du groupe de Picard de variétés de plus grande dimension (proposition 3.6.3). T. Kambayashi et M. Miyanishi ont montré que si X a un point k-rationnel, l'exposant de $\mathrm{Pic}(X)$ est exactement $p^{n(X)}$, ce qui implique l'assertion (ii). On va donner une courte preuve alternative de cette assertion.

Une forme de $\mathbb{A}^1_k$ n'a pas forcément un point k-rationnel. L'assertion (ii) du théorème 3.6.1, pose la question suivante : existe-t-il des formes non triviales de $\mathbb{A}^1_k$ dont le groupe de Picard est trivial ? Dans la section 3.7, on considère une forme non triviale G de $\mathbb{G}_{a,k}$ et on construit une forme X de $\mathbb{A}^1_k$ qui est un G-torseur dont le groupe de Picard est trivial. On déduit de cette construction que les formes de $\mathbb{G}_{a,k}$ non triviales ne sont pas des groupes spéciaux (voir la définition 3.7.5 et le corollaire 3.7.6).

On considère la complétion régulière C d'une forme X de $\mathbb{A}^1_k$, alors $\mathrm{Pic}^0(C)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(X)$ (voir la suite exacte (3.5.3)) ; ceci motive l'étude de $\mathrm{Pic}^0(C)$.

Dans le chapitre 5, on va étudier un objet plus général : le foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{C/k}$. Comme C est une variété propre géométriquement intègre, le foncteur $\mathrm{Pic}_{C/k}$ est représentable par un k-schéma en groupes localement de présentation finie que l'on note toujours $\mathrm{Pic}_{C/k}$. De plus, si C a un point k-rationnel, alors on a l'égalité $\mathrm{Pic}^0(C) = \mathrm{Pic}^0_{C/k}(k)$, et en général $\mathrm{Pic}(C)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}^0_{C/k}(k)$. Une rapide présentation du foncteur de Picard relatif et de ses propriétés est faite dans les sections 4.1.1 et 4.1.2.

On obtient le résultat suivant sur $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$:

Théorème. *5.2.4 ou [Ach17, Thm. 4.4]*

Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$ et C la complétion régulière de X. Soit $n'(X)$ le plus petit entier positif n tel que le corps des fonctions de $X_{k^{p^{-n}}}$ est isomorphe à $k^{p^{-n}}(t)$. Soit k' l'unique extension minimale de k tel que $X_{k'} \cong \mathbb{A}^1_{k'}$.

(i) Alors, $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est un groupe algébrique unipotent de $p^{n'(X)}$-torsion qui est k-ployé et qui est déployé sur k'.

(ii) Si X est un G-torseur où G est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$, alors

$$\dim \mathrm{Pic}^0_{C/k} \leqslant \frac{(p^{\min(n,m)}-1)(p^{\max(n,m)}-2)}{2},$$

où $n = n(G)$ et m est le plus petit entier tel que G est défini par une équation de la forme $y^{p^n} = x + a_1 x^p + \cdots + a_m x^{p^m}$.

(iii) Si X est une forme non triviale de $\mathbb{G}_{a,k}$ et si $p \neq 2$, alors k' est l'extension minimale de k tel que $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est déployé sur k'.

Afin de démontrer le théorème 5.2.4, on va construire des carrés de k-schémas cocartésiens dans la catégorie des espaces annelés. Ainsi, dans les sections 4.2, 4.3 et 4.4, on va étudier les liens entre les foncteurs de Picard des k-schémas de tels carrés. Un premier résultat obtenu est le théorème 4.3.4 ; on démontre ensuite le théorème 4.4.4 qui est beaucoup plus général. Le niveau de généralité du théorème 4.4.4 peut être utilisé pour une étude approfondie des torseurs sur une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$.

La démonstration de l'assertion (i) du théorème 5.2.4 se fait en deux temps. Tout d'abord, dans la section 5.1 on étudie le cas particulier des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$ en utilisant une méthode "explicite". Ensuite, on donne un raisonnement plus général dans la section 5.2 qui marche pour toutes les formes de $\mathbb{A}^1_k$. Le fait que le groupe algébrique $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est unipotent avait déjà été obtenu dans [KMT74, Thm. 6.6.10], et la majoration de la torsion de $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ avait déjà été obtenue dans [KM77, Cor. 4.6.1].

Pour obtenir la majoration de la dimension de $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ (assertion (ii)), on va calculer dans la section 3.4 le genre arithmétique de certaines courbes dans certains plans projectifs à poids.

L'assertion (iii), qui affirme (sous certaines hypothèses) qu'il existe une extension minimale telle que $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est déployé est un fait surprenant. Si une telle extension existe pour les formes de $\mathbb{G}_{a,k}$, ce n'est pas le cas pour les k-groupes algébriques unipotents en général. En effet, dans la section 6.4, on va donner un exemple d'une forme de $\mathbb{G}^2_{a,k}$ qui n'admet pas d'extension minimale qui la déploie (remarque 6.4.8).

1.2.2 Torseurs sous une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ et groupe de Picard des groupes unipotents

Tout groupe algébrique unipotent connexe de dimension strictement positive est (de façon non canonique) un torseur sous une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. Une autre façon d'aborder le problème du groupe de Picard des groupes algébriques unipotents connexes est donc d'étudier les torseurs sous une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ et leurs groupes de Picard. L'étude des torseurs sur une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ est l'objet du chapitre 6.

Dans la section 6.1, on va réunir des résultats préliminaires sur le *fibré associé* : on considère une forme G de $\mathbb{G}_{a,k}$, de complétion régulière C. Soit $f : X \to Y$ un G-torseur où X et Y sont des *k-variétés algébriques* (c'est à dire des k-schémas de type fini). Alors il y a une unique k-variété algébrique $X \times^G C$ (dit fibré associé), munie d'un morphisme projectif $X \times^G C \to Y$

et d'un G-torseur $f' : X \times C \to X \times^G C$ tel que le carré

$$\begin{tikzcd} X \times C \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \times^G C \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Dans la section 6.2, on étudie les torseurs sous une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ et leur fibré associé. Il y a une immersion ouverte $X \to X \times^G C$. De plus, si X est lisse, alors $X \times^G C$ est régulier. Ainsi $X \times^G C$ est une complétion régulière de X relativement à Y. On a le résultat suivant sur $\mathrm{Pic}_{X\times^G C/Y}$:

Proposition. *6.2.5*

Avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses que ci-dessus, $\mathrm{Pic}_{X\times^G C/Y}$ *est représenté par un Y-schéma en groupes commutatif lisse, séparé, et localement de présentation finie.*

De plus, $\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}$ *est un Y-schéma en groupes commutatif de type fini, lisse et séparé. Si Y est réduit, alors* $\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}$ *est de $p^{n'(G)}$-torsion où $n'(G)$ est le plus petit entier positif tel que le corps des fonctions de $G_{k^{p^{-n}}}$ est isomorphe à $k^{p^{-n}}(t)$.*

Dans la section 6.3, on va utiliser le fibré associé pour construire une complétion régulière relative d'un k-groupe algébrique unipotent connexe de dimension 2 (proposition 6.3.1). Cette complétion est la première étape pour faire une étude détaillée du groupe de Picard des k-groupes algébriques unipotents connexes de dimension 2.

Dans la section 6.4, on utilise une suite exacte de groupes de Picard de torseurs, et le théorème 3.6.1. On obtient la proposition suivante :

Proposition. *6.4.7*

Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe. On considère une suite de composition centrale

$$\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_d = U$$

où $U_i/U_{i-1} = G_i$ est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ pour $i = 1, .., d$. Alors $\mathrm{Pic}(U)$ *est de $p^{n(G_1)+\cdots+n(G_d)}$-torsion.*

Le problème avec ce résultat est que la suite de composition centrale ci-dessus n'est pas canonique. Néanmoins, dans le cas des formes de $\mathbb{G}^n_{a,k}$ on montre que l'on peut facilement calculer explicitement l'exposant $n(G_1) + \cdots + n(G_d)$ (proposition 6.4.9).

On rappelle qu'une k-variété géométriquement intègre est dite *unirationnelle* si son corps des fonctions rationnelles est contenu dans une extension purement transcendante de k. Soit G un k-groupe algébrique connexe, si k est parfait ou si G est réductif, alors G est unirationnel. Sur un corps quelconque les k-groupes unipotents ne sont pas en général unirationnels ; par exemple il y a une seule forme non triviale de $\mathbb{G}_{a,k}$ qui n'est pas unirationnelle [KMT74, Thm. 6.9.2]. De plus, tout k-groupe algébrique connexe G admet un plus grand sous-groupe unirationnel [BLR90, §10.3 p. 310] ; les k-groupes algébriques dont le plus grand sous-groupe unirationnel est trivial ont été étudiés dans [BLR90, §10.3]. L'étude des k-groupes algébriques unipotents k-ployés unirationels a été commencée par J. Oesterlé [Oes84], et plus récemment D. T. Nguyễn a étudié les groupes algébriques unipotents unirationels sur un corps local [Ngu11].

Dans la section 6.5, on détermine explicitement le groupe de Picard des groupes unipotents unirationnels de la forme $U = R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})/\mathbb{G}_{m,k}$ où k'/k est une extension purement inséparable, ainsi que le groupe $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ des extensions commutatives de U par $\mathbb{G}_{m,k}$.

Cet exemple est particulièrement intéressant car J. Oesterlé a montré que si k est le corps des fonctions d'une courbe définie sur un corps fini, alors tout groupe algébrique unipotent connexe k-ployé de dimension strictement inférieure à $p-1$ n'est pas unirationnel. Or, si $[k':k]=p$, alors $R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})/\mathbb{G}_{m,k}$ est un groupe algébrique unipotent connexe k-ployé unirationnel de dimension $p-1$. Deux questions naturelles se posent alors : est-ce que tout groupe algébrique unipotent connexe unirationnel k-ployé de dimension $p-1$ est de la forme $R_{k'/k}(T_{k'})/T$, où T est un tore de dimension 1 et k'/k est une extension purement inséparable de degré p ? Est-ce que tout groupe algébrique unipotent unirationnel k-ployé admet un sous-groupe de la forme $R_{k'/k}(T_{k'})/T$, où T est un tore et k'/k est une extension purement inséparable ?

1.2.3 Foncteur de Picard restreint et applications

Comme pour les formes de la droite affine, on aimerait utiliser des méthodes géométriques pour étudier le groupe de Picard des formes de $\mathbb{A}^d_k$ (les k-groupes algébriques unipotents sont des cas particuliers de formes de $\mathbb{A}^d_k$). Le manque d'outils géométriques rend une telle approche complexe. Une des difficultés rencontrées est le manque de complétion régulière canonique (pour $d>1$). De plus, l'existence d'une complétion régulière n'est assurée que si $d \leqslant 3$ [CP14, Thm. 1.1].

Néanmoins, soit X une forme de $\mathbb{A}^d_k$. Suivant une idée de M. Raynaud, on considère une version "restreinte" du foncteur de Picard, i.e. le foncteur en groupes :

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Pic}^+_{X/k} : & (\text{Schémas Lisses}/k)^\circ & \to & (\text{Groupes}) \\ & T & \mapsto & \dfrac{\mathrm{Pic}(X \times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)}. \end{array}$$

On obtient le résultat de représentabilité suivant :

Théorème. *7.1.2*

Si X admet une complétion régulière alors le foncteur $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est représenté par un k-groupe algébrique unipotent commutatif dont la composante neutre est k-ployée.

Remarquons que l'on démontre quelque chose de légèrement plus fort : on montre que ${\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}$ n'admet pas de sous-groupe unirationnel non trivial. Ce théorème est démontré dans la section 7.3. On va esquisser ici l'idée de la preuve. On va considérer (inspiré par la définition de P. Deligne des 1-motifs [Del74, Sec. 10.1]) le quotient d'un k-schéma en groupes localement algébrique par un groupe discret. Par exemple, soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$ avec un point k-rationnel et C sa complétion régulière, alors il y a une suite exacte de groupes abéliens (voir la suite (3.5.1)) :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}_{C/k}(k) \to \mathrm{Pic}(X) \to 0.$$

On note $\mathbb{Z}_k$ le schéma en groupes constant $\mathbb{Z}$ sur k. Alors $\mathbb{Z}_k \to \mathrm{Pic}_{C/k}$ est une immersion fermée et le quotient (fppf) $\mathrm{Pic}_{C/k}/\mathbb{Z}_k$ est représentable par un schéma en groupes localement de type fini sur k. Ce quotient représente le foncteur $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$.

Les deux résultats suivants sont des conséquences du théorème ci-dessus. Tout d'abord, on réinterprète [Tot13, Lem. 9.2] avec la notion de foncteur de Picard "restreint".

Théorème. *7.8.5*

Soit U un k-groupe algébrique unipotent, connexe et commutatif. On suppose que U admet une complétion régulière.

Alors l'action par translation de U sur lui-même induit une action sur $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$. Et l'on peut définir le foncteur en groupes

$$\mathrm{Pic^+}^U_{U/k} : \quad (\text{Schémas Lisses}/k)^\circ \quad \to \quad (\text{Groupes})$$

des invariants de $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ sous l'action de U comme suit : pour tout k-schéma lisse T, le groupe $\mathrm{Pic^+}^U_{U/k}(T)$ est le sous-groupe des éléments $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^+_{U/k}(T)$ tel que pour tout T-schéma lisse S, l'élément $\mathcal{L}_S$ induit par $\mathcal{L}$ dans $\mathrm{Pic}^+_{U/k}(S)$ est $U(S)$-invariant.

Alors $\mathrm{Pic^+}^U_{U/k}$ est représenté par un sous-groupe algébrique de $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$. De plus, pour toute extension séparable L/k,

$$\mathrm{Pic^+}^U_{U/k}(L) = \mathrm{Ext}^1(U_L, \mathbb{G}_{m,L}).$$

La proposition suivante est une généralisation du lemme [Tot13, 9.4] :

Proposition. *7.8.6*
Soit U un k-groupe algébrique unipotent, connexe, commutatif et qui admet une complétion régulière.
Si le k-groupe algébrique $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est non trivial, alors le k-groupe algébrique $\mathrm{Pic^+}^U_{U/k}$ est non trivial.
En particulier, si le k-groupe algébrique $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est non trivial, alors le groupe abélien $\mathrm{Ext}^1(U_{k_s}, \mathbb{G}_{m,k_s})$ est non trivial.

Le résultat suivant est une conséquence formelle de la représentabilité de $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$. Ce résultat ouvre la voie à l'étude de la structure des groupes unipotents unirationnels.

Théorème. *7.9.3*
Soit X une forme de $\mathbb{A}^d_k$ unirationnelle. On suppose que X admet une complétion régulière. Alors :
(i) *Le k-groupe algébrique unipotent $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est étale.*
(ii) $\mathrm{Pic}(X)$ *est un groupe fini.*

1.3 Notations et conventions

Soit k un corps. Sauf mention explicite du contraire, on supposera k non parfait de caractéristique $p > 0$. On fixe une clôture algébrique $\overline{k}$ de k, et on note $k_s \subset \overline{k}$ la clôture séparable de k. Pour tout entier positif n, on note $k^{p^{-n}} = \{x \in \overline{k} | x^{p^n} \in k\}$, et $k^{p^{-\infty}} = \{x \in \overline{k} | \exists n \geqslant 0, x^{p^n} \in k\}$.

Soit X un schéma ; on note $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural de X. On note $\mathcal{O}(X)$ l'anneau des fonctions régulières sur X, et $\mathcal{O}(X)^*$ le groupe multiplicatif des fonctions régulières inversibles sur X. Soit $x \in X$, le germe de $\mathcal{O}_X$ en x est noté $\mathcal{O}_{X,x}$, le corps résiduel en x est noté $\kappa(x)$.

Entre deux k-schémas, les morphismes considérés sont des morphismes sur k. Une *variété algébrique* est un schéma séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}(k)$. Soit K une extension de k, le changement de base $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(K)$ est noté X_K. Soit X une variété intègre, le corps des fonctions de X est noté $\kappa(X)$.

Un schéma en groupes localement de type fini sur k est dit un *groupe localement algébrique*. Un schéma en groupes lisse de type fini sur k est appelé un *groupe algébrique*. On considère un k-groupe algébrique G, alors une suite de sous-groupes

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$$

est dite une *suite de composition* si pour tout i, G_i est un sous-groupe distingué de G_{i+1}. Une suite de composition est dite *centrale* si en plus $[G_{i+1}, G]$ est un sous-groupe de G_i, ou de façon équivalente, si pour tout i l'extension

$$1 \to G_{i+1}/G_i \to G/G_i \to G/G_{i+1} \to 1$$

est centrale.

Chapitre 2

Structure des groupes unipotents sur un corps quelconque

Dans ce chapitre, on va rappeler des résultats connus sur la structure des groupes algébriques unipotents sur un corps quelconque. On met particulièrement l'accent sur un phénomène propre aux corps non parfaits : les groupes algébriques unipotents ployés. Ainsi, dans tout le chapitre on considère un corps non parfait k de caractéristique $p > 0$.

La principale référence de ce chapitre provient des notes d'un cours donné par J. Tits à l'université de Yale [Tit67]. La plupart des résultats sur les groupes algébriques unipotents de [Tit67] ont été récemment exposés dans un langage moderne dans l'annexe B de [CGP15].

2.1 Groupes unipotents, groupes unipotents déployés

Avant de parler de k-groupes algébriques unipotents k-ployés, on va d'abord, par souci d'exhaustivité, définir ce qu'est un k-groupe algébrique unipotent et donner quelques propriétés sur les k-groupes algébriques unipotents k-déployés.

Définition 2.1.1. Soit U un k-schéma en groupes de type fini, on dit que U est unipotent s'il existe une extension algébriquement close K de k tel que U_K admet une suite de composition dont les quotients successifs sont K-isomorphes à des sous-groupes de $\mathbb{G}_{a,K}$.

La définition 2.1.1 ne dépend pas de l'extension algébriquement close K de k choisie [SGA3II, XVII Pro. 1.2]. De plus un k-groupe algébrique unipotent est automatiquement affine [SGA3II, XVII Pro. 2.1].

Remarque 2.1.2. Dans le livre de M. Demazure et P. Gabriel [DG70, IV §2 Déf. 2.1], une définition plus générale de k-groupe unipotent est introduite : Un k-schéma en groupes U est dit unipotent si U est affine et pour tout sous-groupe fermé $H \neq 0$ de U il existe un morphisme de k-schémas en groupes $H \to \mathbb{G}_{a,k}$ qui est non trivial.

Si on suppose que le groupe U considéré ci-dessus est algébrique, alors les deux définitions coïncident [DG70, IV §2 Pro. 2.5].

Dans la suite, on va s'intéresser au cas des k-groupes algébriques unipotents connexes.

Définition 2.1.3. Un k-groupe algébrique unipotent U est dit k-déployé si U admet une suite de composition dont les quotients successifs sont isomorphes à $\mathbb{G}_{a,k}$.

Comme le montre le résultat ci-dessous, les groupes algébriques unipotents k-déployés ont une structure schématique assez simple.

Théorème 2.1.4. *[Théorème de Lazard] [DG70, IV §4 Thm. 4.1]*

Soit U un groupe algébrique connexe, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) U est k-déployé ;

(ii) U est isomorphe comme k-schéma à $\mathbb{A}_k^{\dim(U)}$.

Une conséquence immédiate du théorème de Lazard est que le groupe de Picard de tout k-groupe algébrique unipotent k-déployé est trivial.

Remarque 2.1.5. Un parallèle peut être fait entre la structure des groupes algébriques unipotents k-déployés et la structure des tores k-déployés. En effet, par définition, un k-tore T est dit *k-déployé* si et seulement s'il est isomorphe en tant que k-groupe algébrique à $\mathbb{G}_{m,k}^{\dim(T)}$. En fait, un k-tore T est k-déployé si et seulement si il est isomorphe en tant que k-schéma à $\mathbb{G}_{m,k}^{\dim(T)}$.

Ce parallèle entre la théorie des tores et la théorie des groupes unipotents n'est pas isolé. Tout au long de ce chapitre, on signalera un tel parallèle chaque fois qu'il apparaît.

2.2 p-polynômes

Définition 2.2.1. Un polynôme $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ est dit un p-polynôme (ou un polynôme additif) si les monômes qui le composent sont de la forme $c_{i,j}X_i^{p^j}$.

Proposition 2.2.2. *[Tit67, Pro. III.3.3.4]*

Un polynôme $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ est un p-polynôme si et seulement si l'application $\mathbb{G}_{a,k}^n \to \mathbb{G}_{a,k}$ induite par P est un morphisme de k-groupes algébriques.

Démonstration. Montrons que si

$$P(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = P(x_1, \ldots, x_n) + P(y_1, \ldots, y_n)$$

alors P est un p-polynôme, le reste étant clair.

On raisonne par récurrence sur le degré total de P. Pour tout $y \in \overline{k}^n$, $P(X+y) = P(X)+P(y)$ donc pour tout i, on a $\frac{\partial P}{\partial X_i}(X + y) = \frac{\partial P}{\partial X_i}(X)$.

Donc $\frac{\partial P}{\partial X_i}(X) = \gamma_i$ est constant, et $P - \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i X_i$ est additif de dérivées partielles nulles. Donc $P - \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i X_i = Q(X_1^p, \ldots, X_n^p)$. Pour conclure on applique l'hypothèse de récurrence à Q. □

On dit qu'un polynôme de $k[X_1, \ldots, X_n]$ est *séparable* si son schéma des zéros dans $\mathbb{A}_k^n$ est génériquement lisse.

Proposition 2.2.3. *[Tit67, Pro. III.3.3.4]*

Soit $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme non nul tel que $P(0) = 0$. Alors le sous-schéma fermé $P^{-1}(0) \subseteq \mathbb{G}_{a,k}^n$ est un sous-groupe algébrique (donc lisse) si et seulement si P est un p-polynôme séparable.

Démonstration. Si P est un p-polynôme séparable alors $P^{-1}(0)$ est un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_{a,k}^n$ (proposition 2.2.2).

Reste la réciproque : on note $G = P^{-1}(0)$, la lissité de G implique P séparable. Selon la proposition 2.2.2 il suffit de montrer que P induit un morphisme de k-groupes algébriques de $\mathbb{G}_{a,k}^n$ dans $\mathbb{G}_{a,k}$, on peut donc supposer que k est algébriquement clos.

Soit $\alpha \in G(k)$, le schéma des zéros de $P(x + \alpha)$ et $P(x)$ est G. Donc $P(x + \alpha) = c(\alpha)P(x)$ où $c(\alpha) \in k^*$.

La fonction c est une fonction polynomiale de α et vérifie :

$$c(\alpha+\beta)P(x) = P(\alpha+\beta+x) = c(\alpha)c(\beta)P(x).$$

Donc $c : G \to GL_1$ est un k-morphisme. Mais G est unipotent donc $c = 1$. Donc pour tout $\alpha \in G(k)$, on a $P(x+\alpha) = P(x)$.

Soit $\beta \in k^n$, pour tout $\alpha \in G(k)$ on a $P(\alpha+\beta) - P(\beta) = 0$. Donc $P(x+\beta) - P(\beta)$ s'annule sur G, donc $P(x+\beta) - P(\beta) = g(\beta)P(x)$ où $g(\beta) \in k$ et $g(0) = 1$.

Donc pour tout $\gamma \in k^n$ on a :

$$P(x+\beta+\gamma) - P(\beta+\gamma) = g(\beta+\gamma)P(x).$$

De plus on a :

$$P(x+\beta+\gamma) = P(\beta) + g(\beta)P(x+\gamma) = P(\beta) + g(\beta)P(\gamma) + g(\beta)g(\gamma)P(x).$$

En comparant les termes de plus haut degré on trouve que $g(\beta+\gamma) = g(\beta)g(\gamma)$, donc $g(\beta)^p = g(0) = 1$, donc P est bien additive. □

Définition 2.2.4. Un groupe vectoriel sur k est un k-groupe algébrique qui est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}^n$ pour un certain $n \geqslant 0$.

Définition 2.2.5. Si $P = \sum_{i=1}^{n} P_i(X_i)$ est un p-polynôme sur k en n variables, alors la partie principale de P noté P_{princ} est la somme des termes de plus haut degré des P_i.

Lemme 2.2.6. *[Tit67, Lem. III.3.3.6]*

Soit V un groupe vectoriel sur k de dimension $n > 0$, soit $f : V \to \mathbb{G}_{a,k}$ un morphisme de k-groupes algébriques, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un morphisme de k-schémas non constant $f' : \mathbb{A}_k^1 \to V$ tel que $f \circ f' = 0$.

(ii) Pour tout isomorphisme de k-groupes algébriques $h : \mathbb{G}_{a,k}^n \xrightarrow{\sim} V$, la partie principale du p-polynôme $f \circ h \in k[X_1, \dots, X_n]$ a un zéro non trivial dans k.

(iii) Il existe un isomorphisme de k-groupes algébriques $h : \mathbb{G}_{a,k}^n \xrightarrow{\sim} V$ tel que $\ker(f \circ h)$ *contient le premier facteur de $\mathbb{G}_{a,k}^n$.*

Démonstration. On va montrer que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

Supposons (i), on considère alors $\varphi = h^{-1} \circ f' : \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{G}_{a,k}^n$, l'on note $\varphi_i : \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{G}_{a,k}$ la i-ème composante de φ est $a_i t^{s_i}$ le monôme dominant de $\varphi_i(t)$, où $s_i = 0$ si $\varphi_i = 0$. f' est non constant donc φ aussi, donc pour un certain i on a $s_i > 0$.

Soit $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{p^{m_i}}$ la partie principale de $f \circ h$. On a alors :

$$0 = f(h(\varphi(t)) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i^{p^{m_i}} t^{s_i p^{m_i}} + \dots$$

On note $N = \max s_i p^{m_i}$, et on définit $b_i = a_i$ si $s_i p^{m_i} = N$, sinon $b_i = 0$. Le coefficient de degré N de $f(h(\varphi(t))$ est 0 donc $\sum_{i=1}^{n} c_i b_i^{p^{m_i}} = 0$ où les b_i sont dans k non tous nuls. C'est exactement (ii).

Montrons maintenant $(ii) \Rightarrow (iii)$. Soit $h : \mathbb{G}_{a,k}^n \xrightarrow{\sim} V$ un isomorphisme de k-groupes algébriques. On peut supposer que f est non nul, donc la partie principale de $f \circ h$ est non nulle. On raisonne par récurrence sur la somme des degrés des monômes de la partie principale de $f \circ h$, toujours notée $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i^{p^{m_i}}$.

Si l'un des c_i est 0, quitte à permuter les variables (iii) est vrai. Sinon, on suppose que tous les c_i sont non nuls et que $m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_n \geqslant 0$. Par hypothèse il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n - \{0\}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i a_i^{p^{m_i}} = 0$. Soit $r \geqslant 0$ le plus petit entier tel que a_r est non nul.

On considère $h' : \mathbb{G}_{a,k}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_{a,k}^n$ défini par

$$h'(y_1, \ldots, y_n) = \left(y_1, \ldots, y_{r-1}, a_r y_r, y_{r+1} + a_{r+1} y_r^{p^{m_r - m_{r+1}}}, \ldots, y_n + a_n y_r^{p^{m_r - m_n}}\right).$$

Alors $f \circ h \circ h'$ est un p-polynôme dont la partie principale est $\sum\limits_{i \neq r} c_i y^{p^{m_i}}$ de somme des degrés partiels strictement inférieurs à la somme des degrés partiels des monômes de la partie principale de $f \circ h$; d'où par récurrence (iii).

Il reste à montrer que (iii) implique (i). Soit h vérifiant (iii) et

$$\varphi : t \in \mathbb{G}_{a,k} \mapsto (t, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{G}_{a,k}^n,$$

alors $f' = h \circ \varphi$ convient. □

Lemme 2.2.7. *[Tit67, Lem. III.3.3.7]*
Soit K/k une extension galoisienne. Si un p-polynôme de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i^{p^{m_i}} \in k[X_1, \ldots, X_n]$$

a un zéro dans $K^n - \{0\}$, alors il a un zéro dans $k^n - \{0\}$.

Démonstration. On peut supposer que $m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_n$. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$ alors $c_1 a_1^{p^{m_1}} = 0$ avec $a_1 \in K^*$ implique $c_1 = 0$. Donc le polynôme est nul.

Supposons $n > 1$, alors il existe $a \in K^n - \{0\}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i a_i^{p^{m_i}} = 0$. Si l'un des a_i est nul le lemme est vrai par hypothèse de récurrence. Sinon on peut supposer $a_n = 1$. Pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$, alors $a - \sigma(a)$ est toujours un zéro du polynôme $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i X_i^{p^{m_i}}$. Si $a \in k^n$ alors il n'y a rien à faire, sinon il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/k)$ tel que $a - \sigma(a) \neq 0$. Or $a_n - \sigma(a_n) = 0$, donc on s'est ramené à prouver le lemme pour le p-polynôme $\sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i X_i^{p^{m_i}}$; on peut conclure par hypothèse de récurrence. □

Remarque 2.2.8. Soit V un groupe vectoriel sur k, soit K/k une extension galoisienne et soit $f : V \to \mathbb{G}_{a,k}$ un k-morphisme, alors les conditions équivalentes du lemme 2.2.6 sont vraies sur K si et seulement si elles sont vraies sur k.

2.3 Groupes commutatifs d'exposant p

Théorème 2.3.1. *[Tit67, Thm. III.3.3.1]*
Soit G un k-groupe algébrique connexe commutatif d'exposant p, alors G est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un certain $\mathbb{G}_{a,k}^N$.

Remarque 2.3.2. Sur un corps de caractéristique nulle, tout groupe algébrique unipotent commutatifs U est un sous-groupe fermé d'un certain $\mathbb{G}_{a,k}^N$. La preuve est alors beaucoup plus simple : U peut être vu comme un sous-groupe d'un certain $GL_{n,k}$ formé de matrices unipotents et donc de $M_{n,k} \cong \mathbb{G}_{a,k}^{n^2}$ par passage au logarithme.

La preuve ci-dessous due à J. Tits utilise des astuces pour pallier au manque de la fonction exponentielle en caractéristique positive.

Démonstration. Le groupe G s'identifie à un sous-groupe fermé de $GL_{n,k}$ qui est lui même un ouvert de $\mathbb{A}_k^{n^2}$. Soit A le k-espace vectoriel engendré par $\{g - I_n | \ g \in G\}$. On note A^i le k-espace vectoriel engendré par $\{a^i | \ a \in A\}$.

On a alors
$$(g - I_n)(h - I_n) = (gh - I_n) - (g - I_n) - (h - I_n)$$
donc $\{0\} = A^p \subset \cdots \subset A^2 \subset A$.

Soit $(a_1, \ldots, a_r)$ une base de A telle que pour tout j, le sous-espace A^j est engendré par $(a_{i_j}, \ldots, a_r)$ pour un certain i_j. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & A & \to & I_n + A \\ & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i & \mapsto & \prod\limits_{i=1}^{n} \exp x_i a_i \end{array}$$

où $\exp x_i a_i = \sum\limits_{k=1}^{p-1} \frac{(x_i a_i)^k}{k!}$.

On remarque que $\exp((x+y)a) = \exp(xa)\exp(ya)$. De plus, A est commutatif donc $\varphi : A \to I_n + A$ est un k-morphisme du groupe additif A dans le groupe multiplicatif $I_n + A$ qui contient G.

Il reste à montrer que φ est inversible. Or $\prod\limits_{i=1}^{n} \exp x_i a_i = I_n + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i a_i$, où y_i est de la forme $x_i + P_i(x_1, \ldots, x_{i-1})$ par construction des a_i. □

Si k est un corps infini (c'est toujours le cas dans le cadre qui nous intéresse), on peut renforcer le résultat précédent :

Proposition 2.3.3. *[CGP15, Pro. B.1.13]*

Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et de cardinal infini. Soit U un k-groupe algébrique commutatif d'exposant p.

Alors U est k-isomorphe à un sous-groupe de codimension 1 d'un k-groupe vectoriel. En particulier, U est isomorphe au schéma des zéros d'un p-polynôme séparable sur k.

2.4 Groupes unipotents ployés

Définition 2.4.1. Un k-groupe algébrique unipotent U est dit k-ployé si tout morphisme de k-schémas $\mathbb{A}_k^1 \to U$ est constant (d'image un point de $U(k)$).

La définition de k-ployé a un sens en caractéristique 0 ; mais dans ce cas tout groupe k-ployé est trivial.

Remarque 2.4.2. Supposons k infini. Selon la proposition 2.3.3, les k-groupes algébriques U commutatifs d'exposant p sont exactement les schémas des zéros des p-polynômes séparables non nuls.

Si la partie principale P_{prin} de P n'a pas de zéro dans $k^n \setminus \{0\}$ alors selon le lemme 2.2.6 U est k-ployé. Mais la réciproque est fausse (voir l'exemple 3.3.2).

Par contre, si P est un p-polynôme dont la partie principale P_{prin} a un zéro sur $k^n \setminus \{0\}$, alors la preuve de l'implication entre la seconde et la troisième assertion du lemme 2.2.6 montre que l'on peut trouver un p-polynôme Q qui a un schéma des zéros isomorphe à celui de P et dont la somme des degrés des monômes de la partie principale est strictement inférieure à celle de P. Par récurrence immédiate, on peut obtenir un p-polynôme R dont le schéma des zéros est k-isomorphe à celui de P, et dont la partie principale n'a pas de zéro non trivial.

Dans ce sens, les schémas des zéros des p-polynômes irréductibles dont la partie principale n'a pas de zéro non trivial sont exactement les k-groupes algébriques k-ployés, commutatifs et d'exposant p.

Théorème 2.4.3. *[CGP15, Thm. B.2.5]*

Soit U un k-groupe algébrique connexe commutatif d'exposant p. Alors U est le produit direct d'un k-groupe vectoriel V et d'un k-groupe algébrique unipotent connexe W tel que W_{k_s} est k_s-ployé.

De plus V est uniquement déterminé car V_{k_s} est engendré par les images des morphismes de k_s-schémas $\mathbb{A}^1_{k_s} \to U_{k_s}$ contenant l'élément neutre.

Corollaire 2.4.4. *[CGP15, Cor. B.2.6]*

Soit U un k-groupe algébrique connexe commutatif d'exposant p, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) U est k-ployé ;

(ii) U_{k_s} est k_s-ployé ;

(iii) Il n'y a pas de morphisme de k-groupe non trivial $\mathbb{G}_{a,k} \to U$.

De plus, U est un k-groupe vectoriel si et seulement si U_{k_s} est un k_s-groupe vectoriel.

Lemme 2.4.5. *[Tit67, Lem. III.3.3.13]*

Tout $\overline{k}$-groupe algébrique unipotent connexe U qui est $\overline{k}$-ployé, commutatif, et d'exposant p est trivial.

Démonstration. Par l'absurde, on suppose que $\dim(U) \geqslant 1$. On peut supposer que U est le noyau de $f : \mathbb{G}^n_{a,k} \to \mathbb{G}_{a,k}$ (Proposition 2.3.3). Selon le lemme 2.2.6 il existe $f' : \mathbb{G}_{a,k} \to V$ non constant tel que $f \circ f' = 0$ (en effet (ii) est toujours vrai sur $\overline{k}$), ce qui contredit l'hypothèse U $\overline{k}$-ployé. □

Théorème 2.4.6. *[Tit67, Thm. III.3.3.14]*

Si k est un corps parfait et U est un k-groupe algébrique commutatif connexe d'exposant p alors U est isomorphe à un k-groupe vectoriel.

Démonstration. On peut supposer $k = \overline{k}$ (corollaire 2.3.3), on applique ensuite le théorème 2.4.3 puis le lemme 2.4.5. □

Remarque 2.4.7. Ce théorème est prouvé dans [SGA3II, XVII] comme conséquence du théorème de Hilbert 90 pour la dimension 1, et par récurrence pour les dimensions supérieures.

Une reformulation du théorème 2.4.6 est que les k-groupes algébriques connexes commutatifs d'exposant p et de dimension n sont exactement les formes de $\mathbb{G}^n_{a,k}$.

2.5 Le noyau cckp

Définition 2.5.1. Soit U un k-groupe algébrique unipotent, le noyau cckp de U est le plus grand sous-groupe de U qui est connexe, central et d'exposant p.

La définition ci-dessus a un sens car deux sous-groupes connexes, centraux et d'exposant p engendrent un groupe avec les mêmes propriétés. De plus, si $U \neq \{1\}$, alors le noyau cckp de U est non trivial.

Le noyau cckp est très utile car il permet de généraliser les résultats déjà obtenus dans le cadre des formes de $\mathbb{G}_{a,k}^n$ à tous les k-groupes algébrique unipotents.

Proposition 2.5.2. *[Tit67, Pro. 4.1.4]*

Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe, soit K/k une extension séparable. On note F le noyau cckp de U. Alors U est k-ployé si et seulement si U_K est K-ployé. Si U est k-ployé alors U/F l'est aussi.

De plus les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) U est k-ployé.

(ii) U n'a pas de sous-groupe central k-isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$.

(iii) F est k-ployé.

Remarque 2.5.3. Selon cette proposition U est k-ployé si, et seulement si, il n'y a pas de k-morphisme non trivial de $\mathbb{G}_{a,k}$ dans U. Cette propriété est exactement analogue à la définition de l'anisotropie pour les tores.

Pour un k-groupe algébrique unipotent connexe, la propriété d'être ployé n'est donc pas modifiée après une extension séparable. Les tores eux se déploient sur une extension séparable finie, par contre les tores anisotropes restent anisotropes après une extension purement inséparable. Comme on va le voir un peu plus loin, la situation est vraiment inversée : les groupes unipotents se déploient sur une extension finie purement inséparable.

2.6 Structure des groupes unipotents connexes

Le théorème suivant permet de décomposer tout groupe algébrique unipotent connexe en un sous-groupe déployé et un quotient ployé. C'est l'analogue de la proposition [Bor12, Pro. 8.15] qui permet de décomposer un tore quelconque en deux sous-tores : l'un déployé, l'autre anisotrope.

Théorème 2.6.1. *[Tit67, Thm. 4.2]*

Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe.

(i) Il existe un unique sous groupe fermé $U_{dép}$ de U, distingué et k-déployé tel que $U/U_{dép}$ est k-ployé.

(ii) Le sous-groupe $U_{dép}$ contient l'image de tout morphisme d'un k-groupe algébrique unipotent k-déployé dans U.

(iii) Le noyau de tout morphisme de U dans un k-groupe algébrique unipotent k-ployé contient $U_{dép}$.

(iv) La formation de $U_{dép}$ commute avec les extensions séparables de k.

Proposition 2.6.2. *[SGA3II, XVII Pro. 4.1.1]*

Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe, alors U admet une suite de composition centrale, caractéristique,

$$\{1\} = U_n \subset \cdots \subset U_0 = U$$

telle que pour tout i, U_i/U_{i+1} est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}^{m(i)}$ pour $m(i) \geqslant 0$.

Démonstration. On note $H_1 = \mathcal{D}(U) = [U, U]$ et pour $i > 1$, $H_i = [U, H_{i-1}]$. Ce sont des sous-groupes lisse de U [SGA3I, VIB Pro. 7.1]. On a donc une suite centrale descendante :

$$\{1\} = H_g \subset \cdots \subset H_1 \subset U$$

où H_i et H_{i-1}/H_i sont connexes. De plus H_{i-1}/H_i est commutatif. On peut donc supposer que U est commutatif.

Soit U^{p^n} l'image de U par $x \in U \mapsto x^{p^n} \in U$; c'est un k-groupe algébrique et on a

$$\{1\} = U^{p^N} \subset \cdots \subset U^p \subset U.$$

On a donc obtenu une suite centrale de k-groupes dont les quotients successifs sont unipotents commutatifs et d'exposant p. Selon le théorème 2.4.6 ce sont bien des formes de $\mathbb{G}_{a,k}^m$. □

Proposition 2.6.3. *Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe. Il existe une extension finie purement inséparable K/k telle que U_K est K-déployé.*

Démonstration. On peut le voir comme une conséquence de la Proposition 2.6.2 : les quotients qui apparaissent dans ce théorème sont isomorphes à $\mathbb{G}_{a,k}^{m(i)}$ sur $k^{p^{-\infty}}$ (théorème 2.4.6). Donc $U_{k^{p^{-\infty}}}$ est $k^{p^{-\infty}}$-déployé. Donc il existe un sous-corps K de $k^{p^{-\infty}}$ tel que K/k est finie et U_K est K-déployé. □

Remarque 2.6.4. On peut trouver une autre preuve de ce résultat dans [Bor12, 15.5].

Un dernier résultat important est le corollaire suivant du théorème 2.6.2.

Proposition 2.6.5. *[SGA3II, Pro. 4.1.1]*

Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe. Alors U admet une suite de composition centrale dont les quotients successifs sont des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$.

2.7 Action des tores sur les groupes unipotents

On rappelle la jolie caractérisation des groupes algébriques unipotents connexe k-ployé obtenue par J. Oesterlé :

Proposition 2.7.1. *[Oes84, Pro. V.8]*

Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe, alors U est k-ployé si et seulement si

$$U\left(k[[T]]\right) = U\left(k((T))\right).$$

Dans le théorème suivant on considère un k-tore T, i.e. un k-groupe algébrique tel que $T_{\overline{k}}$ est $\overline{k}$-isomorphe à $\mathbb{G}_{m,\overline{k}}^{\dim(T)}$. Un k-tore T est dit déployé si T est k-isomorphe à $\mathbb{G}_{m,k}^{\dim(T)}$.

Théorème 2.7.2. *Soit T un k-tore et U un k-groupe algébrique unipotent connexe k-ployé. Alors la seule action de T sur U est l'action triviale.*

Démonstration. On peut supposer que $k = k_s$, et donc que T est déployé [Bor12, Pro. 8.11]. Alors, une action de T sur U implique des actions de $\mathbb{G}_{m,k}$ sur U.

Or tous les k-morphismes $\mathbb{G}_{m,k} \to U$ sont constants. En effet, ils correspondent à des points de $U\left(k[T, T^{-1}]\right)$, et selon la proposition 2.7.1,

$$U\left(k[T, T^{-1}]\right) \subseteq U\left(k((T))\right) = U\left(k[[T]]\right).$$

Donc $U\left(k[T, T^{-1}]\right) = U\left(k[T]\right) = U(k)$. Les applications orbites sont donc triviales et l'action aussi. □

Une conséquence de ce théorème est que l'action d'un tore ne permet pas de décomposer en sous-espaces propres l'algèbre de Lie d'un k-groupe algébrique unipotent connexe k-ployé.

Chapitre 3

Groupe de Picard des formes de $\mathbb{A}^1_k$ et de $\mathbb{G}_{a,k}$

3.1 Complétion régulière et invariant

Dans cette section, on va introduire des notations et donner des résultats démontrés par P. Russell [Rus70] que nous allons utiliser dans la suite de la thèse.

Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$, on va noter C sa *complétion régulière*, c'est-à-dire l'unique courbe projective régulière telle qu'il existe une immersion ouverte dominante $j : X \to C$. Alors C satisfait la propriété universelle suivante : pour tout morphisme $f : X \to Y$ dans un schéma propre Y, il existe un unique morphisme $\mathcal{F} : C \to Y$ tel que $\mathcal{F} \circ j = f$ [GW10, Thm. 15.21].

Lemme 3.1.1. *[Rus70, Lem. 1.1]*

Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$, de complétion régulière C.

(i) $C \setminus X$ est un unique point noté P_∞ dont le corps résiduel est purement inséparable sur k.

(ii) Il existe une unique extension minimale k' de k tel que $X_{k'} \cong \mathbb{A}^1_{k'}$ et k' est purement inséparable de degré fini sur k.

Soit φ_k le morphisme de Frobenius de k, i.e. le morphisme

$$\varphi_k : x \in k \mapsto x^p \in k.$$

Dans la suite on note φ pour φ_k.

Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$, par définition $X = \mathrm{Spec}(R)$ où R est une k-algèbre telle que $R \otimes_k k' \cong k'[t]$. Soit n un entier positif, on considère

$$\begin{array}{rccc} F^n_R : & R \otimes_k k & \to & R \\ & r \otimes x & \mapsto & x r^{p^n} \end{array}$$

où la structure de k comme k-algèbre est donnée par φ^n, la puissance n-ème de φ.

Le morphisme F^n_R correspond au niveau schématique au n-ème morphisme de Frobenius relatif F^n_X. Soit $X^{(p^n)}$ le changement de base $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(k)$ où k est vu comme une k-algèbre via φ^n, autrement dit $X^{(p^n)}$ est isomorphe au changement de base de X par $k^{p^{-n}}$. On peut alors écrire :

$$F^n_X : X \to X^{(p^n)}.$$

Lemme 3.1.2. *[Rus70, Lem. 1.3]*

Il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $X^{(p^n)} \cong \mathbb{A}^1_{k^{p^{-n}}}$.

Définition 3.1.3. Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$.

(i) Le plus petit entier positif n tel que $X^{(p^n)} \cong \mathbb{A}^1_k$ est noté $n(X)$.

(ii) Le plus petit entier positif n tel que $\kappa\left(X^{(p^n)}\right) \cong k(t)$ est noté $n'(X)$.

(iii) Le point P_∞ est purement inséparable (lemme 3.1.1), on note $r(X)$ l'entier tel que $\deg(P_\infty) = p^{r(X)}$.

Remarque 3.1.4. (i) On a $n(X) \geqslant n'(X)$, on va montrer avec l'exemple 3.3.6 que cette inégalité peut être stricte. Mais si X est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ et si $p \neq 2$, alors il y a égalité (lemme 3.3.5).

(ii) On note n pour $n(X)$, le morphisme F^n_X s'étend en un morphisme fini dominant $\mathcal{F}^n_X : C \to \mathbb{P}^1_k$ de degré p^n. Alors $p^{r(X)}$ est le degré résiduel de la valuation associée à P_∞ dans $\kappa(C)$, donc

$$p^{r(X)} = [\kappa(P_\infty) : k] \leqslant [\kappa(C) : \kappa(\mathbb{P}^1_k)] = p^n.$$

Ainsi $r(X) \leqslant n(X)$.

Définition 3.1.5. Soit $m(X)$ l'entier positif tel que l'image du morphisme de groupe $\deg : \mathrm{Pic}(C) \to \mathbb{Z}$ est $m(X)\mathbb{Z}$.

Remarque 3.1.6. $m(X)$ est le plus petit diviseur commun des degrés des corps résiduels des points fermés de C, en particulier $m(X)$ divise $[\kappa(P_\infty) : k] = p^{r(X)}$. Donc $m(X)$ est une puissance de p et $m(X) \leqslant p^{r(X)}$.

On a montré les relations suivantes entre nos invariants :

Lemme 3.1.7.

$$n(X) \geqslant \max\left(n'(X), r(X)\right)$$
$$m(X) \mid p^{r(X)}.$$

3.2 Structure des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$

Les résultats suivants sont dus à P. Russell et donnent une présentation des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$, les notations sont celles de l'article [Rus70].

On note $F = F^1_{\mathbb{G}_{a,k}} \in A = \mathrm{Hom}_k\left(\mathbb{G}_{a,k}, \mathbb{G}_{a,k}\right)$ l'endomorphisme de Frobenius relatif de $\mathbb{G}_{a,k}$. Alors $A = k\langle F\rangle$ est un anneau de polynômes non commutatifs avec pour tout $a \in k$ la relation $Fa = a^pF$. On note A^* l'ensemble des polynômes de A dont le coefficient constant est non nul.

Théorème 3.2.1. *[Rus70, Thm. 2.1]*

Soit G une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. Alors il existe un p-polynôme séparable

$$P = y^{p^n} - \left(x + a_1x^p + \cdots + a_mx^{p^m}\right)$$

tel que G est isomorphe au sous-groupe $\mathrm{Spec}\left(k[x,y]/I\right)$ *de $\mathbb{G}^2_{a,k}$, où I est l'idéal de $k[x,y]$ engendré par P.*

De façon équivalente G est le noyau de l'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}^2_{a,k} & \to & \mathbb{G}_{a,k} \\ (x,y) & \mapsto & y^{p^n} - \left(x + a_1x^p + \cdots + a_mx^{p^m}\right). \end{array}$$

Enfin, on peut voir G comme un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\zeta"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathbb{G}_{a,k} \arrow[d, "\tau"] \\ \mathbb{G}_{a,k} \arrow[r, "F^n"'] & \mathbb{G}_{a,k} \end{tikzcd}$$

où $\tau = 1 + a_1F + \cdots + a_mF^m \in A^*$. Et réciproquement tout G défini de cette façon est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. On note alors $G = (F^n, \tau)$.

Remarque 3.2.2. Soit G une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$, la preuve du théorème [Rus70, 2.1] montre que l'on peut choisir n comme étant la plus petit entier tel que $F^n_G(G) \cong \mathbb{G}_{a,k}$. Autrement dit on peut choisir $n = n(G)$ où $n(G)$ est l'entier défini en 3.1.3.

P. Russell donne de plus une condition nécessaire et suffisante pour que deux formes de $\mathbb{G}_{a,k}$ soient isomorphes.

Proposition 3.2.3. *[Rus70, Pro. 2.3]*
Soient $G = (F^n, \tau)$ et $G_1 = (F^{n_1}, \tau_1)$, on suppose $n_1 \leqslant n$ alors $G \cong G_1$ si et seulement s'il existe $\rho \in A^*$, $\sigma \in A$ et $c \in k^*$ tels que

$$\tau_1^{(n-n_1)} = \left(\rho^{(n)}\tau + F^n\sigma\right) c^{-1}.$$

De plus on peut choisir ρ de degré $\leqslant p^{n-1}$.

En général tout k-groupe algébrique unipotent connexe est déployé sur une extension finie purement inséparable (Proposition 2.6.3), dans le cas particulier d'une forme G de $\mathbb{G}_{a,k}$ on connaît explicitement le plus petit corps sur lequel G est déployé.

Corollaire 3.2.4. *[Rus70, Cor. 2.3.1]*
Soit G une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie par l'équation

$$y^{p^n} = x + a_1x^p + \cdots + a_mx^{p^m}$$

alors le plus petit corps sur lequel G est déployé est $k' = k\left(a_1^{p^{-n}}, \ldots, a_m^{p^{-n}}\right)$.

Remarque 3.2.5. Le schéma sous-jacent d'une forme G de $\mathbb{G}_{a,k}$ est une forme X de $\mathbb{A}^1_k$, de plus G est non trivial en tant que forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ si et seulement si X est non trivial en tant que forme de $\mathbb{A}^1_k$ (proposition 2.5.2 et définition 2.4.1).

Si X est une forme de $\mathbb{A}^1_k$, alors P. Russell a montré qu'il y a deux raisons pour lesquels X peut ne pas avoir de structure de groupe. Tout d'abord X peut ne pas avoir de point k-rationnel, ensuite X_{k_s} peut n'avoir qu'un nombre fini d'automorphismes [Rus70].

Proposition 3.2.6. *[KMT74, Pro. 6.9.1]*
Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$, tel que X a un point k-rationnel P_0. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) *X a une structure de k-groupe algébrique avec P_0 comme élément neutre.*

(ii) *X est isomorphe en tant que schéma à une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$.*

(iii) $\mathrm{Aut}(X_{k_s})$ *est infini.*

Proposition 3.2.7. *[Rus70, Pro. 4.1]*

Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$. Si X_{k_s} admet une structure de groupe, alors X est un G-torseur où G est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ déterminée uniquement par X. De plus

$$X = \operatorname{Spec}(k[x,y]/I),\ G = \operatorname{Spec}(k[x,y]/J)$$

où les idéaux I et J sont engendrés respectivement par $y^{p^n} - b - f(x)$ et $y^{p^n} - f(x)$ où $b \in k$ et $f(x) := x + a_1x^p + \cdots + a_m x^{p^m}$. Réciproquement, si X et G sont définies comme ci-dessus, alors X est un G-torseur.

Remarque 3.2.8. P. Russell [Rus70] et T. Kambayashi, M. Miyanishi, et M. Takeuchi [KMT74, Thm. 6.8.1 et 6.8.3] ont classifié toutes les formes de $\mathbb{A}^1_k$ sur un corps séparablement clos telles que le genre arithmétique de la complétion régulière est $\leqslant 1$.

M. Rosenlicht [KMT74, 6.9.3] a trouvé un exemple de forme de $\mathbb{A}^1_k$ avec un nombre fini d'automorphismes et un genre arithmétique $(p-1)/2$ pour tout $p > 2$.

Plus récemment, T. Asanuma [Asa05, Thm. 8.1] a trouvé une description algébrique explicite des formes de $\mathbb{A}^1_k$, sur un corps k de caractéristique $p > 2$.

3.3 Exemples

Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$, nous allons tout d'abord comparer k' (le plus petit corps tel que $X_{k'} \cong \mathbb{A}^1_{k'}$) et le corps résiduel $\kappa(P_\infty)$ de P_∞. Il y a une inclusion $\kappa(P_\infty) \subset k'$ qui, comme le montre l'exemple ci-dessous, peut être stricte.

Exemple 3.3.1. Soit $k = \mathbb{F}_p(t_1, t_2)$ et G la forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie comme sous-groupe de $\mathbb{G}^2_{a,k}$ par l'équation

$$y^{p^2} = x + t_1x^p + t_2x^{p^2},$$

alors C est isomorphe à la courbe de $\mathbb{P}^2_k$ définie par l'équation

$$y^{p^2} = xz^{p^2-1} + t_1x^pz^{p^2-p} + t_2x^{p^2}.$$

Dans ce cas $\kappa(P_\infty) = k(t_2^{p^{-2}}) \subsetneq k' = k(t_1^{p^{-2}}, t_2^{p^{-2}})$.

L'inégalité $p^{r(X)} = [\kappa(P_\infty) : k] \leqslant p^{n(X)}$ (lemme 3.1.7) peut être stricte, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.3.2. Soit $k = \mathbb{F}_p(t)$ et G la forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie comme sous-groupe de $\mathbb{G}^2_{a,k}$ par l'équation

$$y^{p^3} = x + tx^p + t^{p^2}x^{p^2},$$

alors $n(G) = 3$ et après le changement de variable $w = tx - y^p$ on remarque que G est aussi définie par l'équation

$$-t^{1-p}y^{p^2} - t^{-1}y^p = t^{-1}w + t^{1-p}w^p + w^{p^2}.$$

Donc C est la courbe de $\mathbb{P}^2_k$ définie par l'équation

$$-t^{1-p}y^{p^2} - t^{-1}y^pz^{p^2-p} = t^{-1}wz^{p^2-1} + t^{1-p}w^pz^{p^2-p} + w^{p^2},$$

et le corps résiduel du point à l'infini est $\kappa(P_\infty) = k(t^{p^{-2}})$.

Exemple 3.3.3. [Dû à B. Laurent]

On considère $k = \mathbb{F}_2(t,u)$, et G la forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie comme sous groupe de $\mathbb{G}^2_{a,k}$ par l'équation

$$y^4 = x + tx^2 + u^2x^4.$$

Alors l'adhérence $\widehat{C}$ de G dans l'espace projectif $\mathbb{P}^2_k$ est donné par l'équation

$$y^4 = xz^3 + tx^2z^2 + u^2x^4.$$

La variété affine $\widehat{C} \cap (x \neq 0)$ est le spectre de la k-algèbre

$$A = k[y,z]/(y^4 - z^3 - tz^2 - u^2).$$

De plus, la clôture intégrale de A est la k-algèbre

$$k[y,w]/(w^3 + tw + y^2 + u),$$

où $w^2 + t = z$. Donc $\kappa(P_\infty) = \mathbb{F}_2\left(t^{1/2}, u^{1/2}\right)$.

Le corps résiduel du point à l'infini de la complétion régulière d'une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ n'est donc pas forcément engendré par un unique générateur.

On va maintenant présenter quelques résultats sur les formes de $\mathbb{A}^1_k$ dont la complétion régulière est $\mathbb{P}^1_k$.

Lemme 3.3.4. *Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$ telle que $X(k) \neq \emptyset$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $C \cong \mathbb{P}^1_k$.

(ii) *X est le complémentaire d'un point purement inséparable de $\mathbb{P}^1_k$.*

(iii) *C est lisse.*

Démonstration. Montrons $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Le sens $(i) \Rightarrow (ii)$ est une conséquence de [Rus70, Lem. 1.1]. La réciproque est immédiate.

Enfin montrons $(i) \Leftrightarrow (iii)$. Le sens $(i) \Rightarrow (iii)$ est immédiat. Réciproquement, si C est lisse, alors on note k' le plus petit corps sur lequel X est déployé, la variété $C_{k'}$ est toujours lisse. Donc $C_{k'}$ est l'unique complétion régulière de $X_{k'} \cong \mathbb{A}^1_{k'}$, donc $C_{k'} \cong \mathbb{P}^1_{k'}$. De plus $C(k) \neq \emptyset$, donc selon la proposition [Liu06, 7.4.1 (b)] $C \cong \mathbb{P}^1_k$, soit (i). □

Lemme 3.3.5. *[Ros55] [Rus70] [KMT74, 6.9.2]*

Soit G une forme de $\mathbb{G}_a$ non triviale. Si $C \cong \mathbb{P}^1_k$ alors $p = 2$ et $n(G) = 1$.

Démonstration. Tout d'abord, on peut supposer que $k = k_s$, on note $n = n(G) = n(G_{k_s}) \geqslant 1$. Selon le lemme 3.3.4, G est isomorphe à $\mathbb{P}^1_k \backslash \{P_\infty\}$ avec $\kappa(P_\infty)/k$ extension purement inséparable. En général, $\kappa(P_\infty) = k[t]/(P)$ où P est un polynôme irréductible, mais dans ce cas particulier, l'extension est purement inséparable donc $P = t^{p^r} - a$ où $a \in k \setminus k^p$. De plus $k' = \kappa(P_\infty)$, donc $r = n$ et $\kappa(P_\infty) = k[t]/(t^{p^n} - a)$.

Soit f un automorphisme de $\mathbb{P}^1_k \setminus \{P_\infty\}$, alors f s'étend en un automorphisme de $\mathbb{P}^1_k$ que l'on note $\overline{f}$. On peut voir $\overline{f}$ comme un automorphisme de $k(t)$. Il existe donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ tel que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ et

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & k(t) & \to & k(t) \\ & t & \mapsto & \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}. \end{array}$$

Alors

$$\overline{f}(t^{p^n} - a) = \frac{\alpha^{p^n} t^{p^n} + \beta^{p^n}}{\gamma^{p^n} t^{p^n} + \delta^{p^n}} - a = \frac{(\alpha^{p^n} - a\gamma^{p^n})t^{p^n} + \beta^{p^n} - a\delta^{p^n}}{\gamma^{p^n} t^{p^n} + \delta^{p^n}},$$

or $\overline{f}$ provient d'un automorphisme de $\mathbb{P}^1_k \setminus P_\infty$, donc $\beta^{p^n} - a\delta^{p^n} = -a(\alpha^{p^n} - a\gamma^{p^n})$ ou de façon équivalente $\beta^{p^n} + (\alpha^{p^n} - \delta^{p^n})a - \gamma^{p^n} a^2 = 0$.

Si $p > 2$ ou $n > 1$, alors le polynôme $\beta^{p^n} + (\alpha^{p^n} - \delta^{p^n})t - \gamma^{p^n} t^2$ est nul car sinon il diviserait $t^{p^n} - a$ qui est irréductible. Donc $\beta = \gamma = 0$ et $\alpha = \delta$ donc f est l'identité. Le seul automorphisme de $\mathbb{P}^1_k \setminus \{P_\infty\} \cong G$ serait donc l'identité, ce qui est faux car on a une injection de $G(k)$ (qui est infini car $k = k_s$) dans le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^1_k \setminus \{P_\infty\} \cong G$. □

Exemple 3.3.6. Soit $p = 2$, on note G la forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie par l'équation

$$y^2 = x + ax^2$$

avec $a \in k \setminus k^2$ où $k^2 = \{x^2 \mid x \in k\}$. Alors G est une forme non triviale de $\mathbb{G}_{a,k}$, et la complétion régulière C est isomorphe à la courbe de $\mathbb{P}^2_k$ définie par l'équation

$$y^2 = xz + ax^2.$$

On remarque que C est lisse (car C est lisse en P_∞), donc selon le lemme 3.3.4 $C \cong \mathbb{P}^1_k$ (ou plus directement C est une conique avec un point k-rationnel).

Remarque 3.3.7. On peut combiner les exemples 3.3.2 et 3.3.6 : soit $p = 2$ et G la forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie par l'équation

$$y^{p^3} = x + tx^p + t^{p^2} x^{p^2},$$

alors $r(G) = 2$ et $n(G) = 3$. De plus $G_{k^{p^{-2}}}$ est isomorphe à la $k^{p^{-2}}$-forme de $\mathbb{G}_{a,k^{p^{-2}}}$ définie par l'équation

$$y^2 = x + t^{p^{-2}} x^2,$$

donc $n'(G) = 2$. Nous avons donc construit un exemple de forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ tel que l'inégalité $n(X) \geqslant \max(n'(X), r(X))$ (lemme 3.1.7) est stricte.

Remarque 3.3.8. Si X est une forme non triviale de $\mathbb{A}^1_k$, alors P_∞ n'est pas k-rationnel. En effet, si P_∞ est k-rationnel, alors C est lisse en P_∞ [Liu06, Pro.4.3.30] donc C est lisse. Selon le lemme 3.3.4, C est isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$ et X est le complément d'un point k-rationnel de $\mathbb{P}^1_k$, donc X est k-isomorphe à $\mathbb{A}^1_k$.

Exemple 3.3.9. Soit Q un point purement inséparable de $\mathbb{P}^1$, alors $X = \mathbb{P}^1_k \setminus \{Q\}$ est une forme de $\mathbb{A}^1_k$ avec pour complétion régulière $\mathbb{P}^1_k$. Si Q n'est pas k-rationnel, alors X est une forme non triviale de $\mathbb{A}^1_k$ et si $\deg(Q) > 2$, alors selon le lemme 3.3.5, X_{k_s} n'a pas de structure de groupe. Dans ce cas $n'(x) = 0$ et $n(X) = r(X)$ est arbitrairement grand.

Exemple 3.3.10. Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$, si $C \cong \mathbb{P}^1_k$ alors $k' = \kappa(P_\infty)$. La réciproque est fausse : soit G une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie par l'équation $y^p = x + ax^p$ où $a \in k \setminus k^p$. Alors C est définie par l'équation

$$y^p = xz^{p-1} + ax^p$$

dans $\mathbb{P}^2_k$, alors $\kappa(P_\infty) = k[a^{p^{-1}}] = k'$. Si $p \geqslant 3$, alors C n'est pas lisse (car $C_{k'}$ n'est pas régulier en P_∞) donc C n'est pas isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$.

3.4 Genre arithmétique de la complétion régulière

Tout d'abord, on considère un corps k de caractéristique quelconque. Soit a, b et c trois entiers strictement positifs, l'espace projectif à poids $\mathbb{P}_k(a, b, c)$ est défini comme $\mathrm{Proj}(k[x, y, z])$ où $k[x, y, z]$ est la k-algèbre graduée de polynômes avec les poids a pour x, b pour y et c pour z. Si w est un élément homogène de $k[x, y, z]$, on note $D_+(w)$ l'ouvert de $\mathbb{P}_k(a, b, c)$ constitué des idéaux premiers homogènes de $\mathrm{Proj}(k[x, y, z])$ qui ne contiennent pas l'idéal (w).

Soit C une courbe géométriquement intègre de degré d dans $\mathbb{P}^2_k$, on note $p_a(C)$ le genre arithmétique de la courbe C. Il est bien connu que $p_a(C) = (d-1)(d-2)/2$. Dans cette section, on va généraliser ce résultat pour certaines courbes dans certains plans projectifs à poids (Proposition 3.4.2). I. Dolgachev a calculé le genre géométrique des courbes lisses dans les plans projectifs à poids [Dol82, 3.5.2] avec l'hypothèse additionnelle que la caractéristique du corps ne divise pas les poids. Mais nous avons besoin de calculer le genre arithmétique dans un espace projectif à poids où l'un des degrés est une puissance de la caractéristique (théorème 3.4.3). Même si le résultat de la proposition 3.4.2 est certainement déjà connu, nous n'avons pas trouvé une référence appropriée, la preuve est donc incluse ici par souci d'exhaustivité.

Lemme 3.4.1. *Soit k un corps de caractéristique arbitraire, soit a un entier positif et soit n un entier. Soit $S = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S_d$ la k-algèbre graduée de polynôme $k[x,y,z]$ avec les poids 1 pour x, 1 pour y et a pour z. On note $\mathbb{P}$ l'espace projectif à poids $\mathbb{P}_k(1,1,a) = \mathrm{Proj}(S)$.*

Alors $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)$ est un faisceau inversible sur $\mathbb{P}$ et $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)) = S_{na}$.

Démonstration. Tout d'abord, montrons que $S_{na} = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na))$ (dans le cas où $a = 1$ et $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2_k$ c'est un fait bien connu). Soit $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)(\mathbb{P})$, alors par définition de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)$:

$$g_{|D_+(x)} = P/x^{m_x} \text{ avec } P \in S_{m_x+na},$$
$$g_{|D_+(y)} = Q/y^{m_y} \text{ avec } Q \in S_{m_y+na}.$$

On peut supposer que $m_x = m_y = m$ (si ce n'est pas le cas, par exemple $m_x > m_y$, on considère $Q' = Qy^{m_x-m_y}$, alors $g_{|D_+(y)} = Q'/y^{m_x}$). Les deux sections locales $g_{|D_+(x)}$ et $g_{|D_+(y)}$ coïncident sur $D_+(xy)$, donc

$$g_{|D_+(xy)} = P/x^m = Q/y^m \in S\left[\frac{1}{xy}\right].$$

Alors, dans S on a l'égalité $x^mQ = y^mP$. Donc y^m divise Q, et $g = Q/y^m$ est un polynôme homogène de degré $m+na-m = na$. Ainsi $g \in S_{na}$, donc $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)) \subset S_{na}$. Réciproquement, il est clair que $S_{na} \subset \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na))$.

Ensuite, pour montrer que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)$ est un faisceau inversible de $\mathbb{P}$, il suffit de montrer que pour $U = D_+(x)$, $D_+(y)$ et $D_+(z)$, le $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(U)$-module $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)(U)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(U)$.

On note w pour x où y, la multiplication par w^{na} :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{mult}_{w^{na}} : & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(D_+(w)) & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)(D_+(w)) \\ & P/w^{\deg(P)} & \mapsto & w^{na}P/w^{\deg(P)}, \end{array}$$

a pour inverse la multiplication par $1/w^{na}$. Donc $\mathrm{mult}_{w^{na}}$ est un isomorphisme.

Pour $D_+(z)$, l'isomorphisme est donné par la multiplication par z^n :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{mult}_{z^n} : & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(D_+(z)) & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)(D_+(z)) \\ & P/z^m & \mapsto & z^nP/z^m, \end{array}$$

où $P \in S_{ma}$. □

Proposition 3.4.2. *Soit k un corps de caractéristique arbitraire, Soit a un entier positif. On note $\mathbb{P}$ le plan projectif à poids $\mathbb{P}_k(1,1,a)$.*

Soit C une courbe géométriquement intègre de degré d dans $\mathbb{P}$, tel que d est un multiple de a. Soit h l'entier d/a. Alors le genre arithmétique de C est :

$$p_a(C) = \frac{(h-1)(d-2)}{2}. \tag{3.4.1}$$

Démonstration. On considère un entier positif n, selon le théorème de Riemann-Roch [Liu06, Thm. 7.3.17] :

$$\dim_k \mathrm{H}^0(C, \mathcal{O}_C(na)) - \dim_k \mathrm{H}^1(C, \mathcal{O}_C(na)) = \deg(\mathcal{O}_C(na)) + 1 - p_a(C). \tag{3.4.2}$$

Selon [Liu06, Thm.5.3.2], si n est assez grand, alors $\mathrm{H}^1(C, \mathcal{O}_C(na)) = 0$, on fait cette hypothèse tout au long de cette preuve.

On note $\mathcal{I}_C$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ qui définit la sous-variété fermée C, et $f : C \to \mathbb{P}$ l'immersion fermée induite par $\mathcal{I}_C$; alors

$$0 \to \mathcal{I}_C \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to f_*\mathcal{O}_C \to 0$$

est une suite exacte de faisceaux sur $\mathbb{P}$. De plus $\mathcal{I}_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-ha)$, et le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)$ est inversible (donc en particulier plat). Donc

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na - ha) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na) \to f_*\mathcal{O}_C(na) \to 0 \tag{3.4.3}$$

est une suite exacte de faisceaux sur $\mathbb{P}$.

Comme ci-dessus, on peut choisir n assez grand, tel que $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na - ha)) = 0$. Alors la suite exacte cohomologique induite par la suite (3.4.3) est

$$0 \to \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na - ha)) \to \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)) \to \mathrm{H}^0(C, \mathcal{O}_C(na)) \to 0.$$

Ainsi

$$\dim_k \mathrm{H}^0(C, \mathcal{O}_C(na)) = \dim_k \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na)) - \dim_k \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(na - ah)). \tag{3.4.4}$$

Ensuite, on calcule $\dim_k \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\delta a))$. Comme dans le lemme 3.4.1, on note $S = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S_d$ la k-algèbre graduée $k[x, y, z]$ avec les poids 1 pour x, 1 pour y et a pour z. Selon [Bou07, Chap. 5 §5.1 Pro. 1], $\dim_k S_{\delta a}$ est le δa-ème coefficient de la série formelle

$$\frac{1}{(1-t)^2(1-t^a)} = \left(\sum_{l\geqslant 0}(l+1)t^l\right)\left(\sum_{i\geqslant 0} t^{ia}\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}\dim_k \mathrm{H}^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(\delta a)) = \dim_k S_{\delta a} = \sum_{l+ai=\delta a} l+1 = \sum_{i=0}^{\delta} \delta a - ia + 1 &\\ =&(\delta a+1)(\delta+1) - a\frac{\delta(\delta+1)}{2}\\ =&\frac{(\delta+1)(\delta a+2)}{2}.\end{aligned}$$

En combinant les équations (3.4.2), (3.4.4) et l'équation ci-dessus on obtient :

$$\begin{aligned}\deg(\mathcal{O}_C(na)) + 1 - p_a(C) =&\frac{(n+1)(na+2)}{2} - \frac{(n-h+1)(na-ha+2)}{2}\\ =&nah + \frac{2h + ah - ah^2}{2}.\end{aligned}$$

Finalement :

$$p_a(C) = 1 + \frac{ah^2 - 2h - ah}{2} = \frac{(h-1)(ah-2)}{2}.$$

□

Nous allons appliquer la proposition 3.4.2 à l'étude du genre arithmétique de la complétion régulière des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$. Ce genre arithmétique a été considéré par C. Greither dans le cas particulier des formes X de $\mathbb{A}^1_k$ tel que le plus petit corps k' qui vérifie $X_{k'} \cong \mathbb{A}^1_{k'}$ est de degré p [Gre86, Thm. 3.4 et 4.6].

Théorème 3.4.3. *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, et G une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. On note $n = n(G)$ et m les plus petits entiers tel que G est définie par une équation de la forme $y^{p^n} = x + a_1x^p + \cdots + a_mx^{p^m}$. Si C est la complétion régulière de G, alors*

$$p_a(C) \leqslant \frac{(p^{\min(n,m)} - 1)(p^{\max(n,m)} - 2)}{2}. \tag{3.4.5}$$

De plus $a_m \notin k^p$ si et seulement si (3.4.5) *est une égalité.*

Pour prouver ce théorème, on va introduire une "complétion naïve" $\widehat{C}$ de G. La "complétion naïve" va nous donner une interprétation géométrique de la condition $a_m \notin k^p$: elle est équivalente à la régularité de $\widehat{C}$.

Tout d'abord, on suppose que $n \leqslant m$. On définit $\widehat{C}$ comme la complétion de G dans $\mathbb{P}_k(1, p^{m-n}, 1)$, alors $\widehat{C}$ est donnée par le polynôme homogène :

$$y^{p^n} - \left(xz^{p^n-1} + a_1x^pz^{p^n-p} + \cdots + a_mx^{p^m}\right), \tag{3.4.6}$$

où x a pour poids 1, y a pour poids p^{m-n}, et z a pour poids 1.

Soit A la k-algèbre graduée définie comme le quotient de $k[x, y, z]$ (avec les poids ci-dessus) par l'idéal engendré par le polynôme homogène (3.4.6). Alors $\widehat{C} = \mathrm{Proj}(A)$.

On considère l'ouvert affine $D_+(x)$ de $\mathbb{P}_k(1, p^{m-n}, 1)$, la variété affine $\widehat{C} \cap D_+(x)$ est le spectre de la sous-algèbre $A_{(x)}$ de $A[\frac{1}{x}]$ constituée des éléments de degré 0. Alors $A_{(x)}$ est engendrée par $y/x^{p^{m-n}}$ et z/x.

Soit $Y = y/x^{p^{m-n}}$ et $Z = z/x$, alors

$$A_{(x)} = k[Y, Z]/\left(Y^{p^n} - \left(Z^{p^n-1} + a_1Z^{p^n-p} + \cdots + a_m\right)\right).$$

De plus $\widehat{C} \setminus G$ est un unique point que l'on va noter ∞. Un calcul direct montre que,

$$\frac{\mathcal{O}_{\widehat{C},\infty}}{(z)} \cong \frac{k[y]}{(y^{p^n} - a_m)}.$$

Si $a_m \notin k^p$ alors $\frac{k[y]}{(y^{p^n} - a_m)}$ est un corps, donc $\widehat{C}$ est régulière, c'est donc la complétion régulière C.

On considère le morphisme $\widehat{C} \to \mathbb{P}^1_k$ induit par la projection $p_x : G \to \mathbb{G}_{a,k}$. La fibre schématique de ce morphisme en $[1 : 0]$ est $\mathrm{Spec}\left(\mathcal{O}_{\widehat{C},\infty}/(z)\right)$. Donc z est une uniformisante de $\widehat{C}$ en ∞, si et seulement si $\widehat{C}$ est régulière, si et seulement si $a_m \notin k^p$.

Si $n > m$, la construction de la "complétion naïve" $\widehat{C}$ est quasiment la même. On définit $\widehat{C}$ comme la complétion de G dans $\mathbb{P}_k(p^{n-m}, 1, 1)$. La courbe $\widehat{C}$ est alors donnée par l'équation homogène

$$y^{p^n} = xz^{p^n-1} + a_1x^pz^{p^m-p} + \cdots + a_mx^{p^m},$$

où x a pour poids p^{n-m}, y a pour poids 1, et z a pour poids 1.

Et $\widehat{C} \setminus G$ est un unique point toujours noté ∞, alors

$$\frac{\mathcal{O}_{\widehat{C},\infty}}{(z)} \cong \frac{k[x]}{(x^{p^m} - a_m^{-1})}.$$

Par le même argument que ci-dessus $a_m \notin k^p$ si et seulement si $\widehat{C}$ est régulière.

Démonstration du théorème 3.4.3. Si $a_m \notin k^p$, alors on a vu que $\widehat{C}$ est régulière, donc (par unicité de la complétion régulière) $\widehat{C}$ est la complétion régulière de C. Et selon la proposition 3.4.2, on a

$$p_a(C) = \frac{1}{2}(p^{\min(n,m)} - 1)(p^{\max(n,m)} - 2).$$

Sinon, $a_m \in k^p$, et alors $\widehat{C}$ n'est pas normale. Soit $\pi : C \to \widehat{C}$ la normalisation. Il y a une suite exacte de faisceaux sur $\widehat{C}$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\widehat{C}} \to \pi_* \mathcal{O}_C \to \mathcal{F} \to 0$$

où $\mathcal{F}$ est un faisceau non trivial à support en ∞. Donc $p_a(C) = p_a(\widehat{C}) - \dim_k \mathrm{H}^0(\widehat{C}, \mathcal{F})$, et on a enfin

$$p_a(C) < p_a(\widehat{C}) = \frac{1}{2}(p^{\min(n,m)} - 1)(p^{\max(n,m)} - 2).$$

□

3.5 Groupe de Picard des formes de $\mathbb{A}^1_k$ et de leur complétion régulière

On considère une forme X de $\mathbb{A}^1_k$, et sa complétion régulière C. Dans cette section, on va réduire l'étude du groupe de Picard de X à l'étude du groupe de Picard de C, en adaptant les arguments de [KMT74, Thm. 6.10.1]. Les courbes C et X sont régulières, dont on identifie leur groupe de Picard avec le groupe des classes des diviseurs. Ainsi on note $[P_\infty]$ la classe du point P_∞ dans le groupe de Picard de C. Les suites suivantes sont exactes [Har13, Pro. II.6.5] :

$$0 \to \mathbb{Z}[P_\infty] \to \mathrm{Pic}(C) \to \mathrm{Pic}(X) \to 0, \tag{3.5.1}$$

et

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(C) \to \mathrm{Pic}(C) \to m(X)\mathbb{Z} \to 0 \tag{3.5.2}$$

où $m(X)$ est l'invariant de X défini en 3.1.5.

En combinant les deux suites exactes (3.5.1) et (3.5.2), on obtient la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Pic}^0(C) \to \mathrm{Pic}(X) \to m(X)\mathbb{Z}/p^{r(X)}\mathbb{Z} \to 0. \tag{3.5.3}$$

Exemple 3.5.1. Comme dans l'exemple 3.3.6, soit $p = 2$ et soit G la forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie par l'équation $y^2 = x + ax^2$ où $a \notin k^2$. Alors $C \cong \mathbb{P}^1_k$, donc $\mathrm{Pic}(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Plus généralement, si Q est un point purement inséparable de $\mathbb{P}^1_k$, alors $X = \mathbb{P}^1_k \setminus \{Q\}$ est une forme non triviale de $\mathbb{A}^1_k$ et $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}/\deg(Q)\mathbb{Z}$.

Exemple 3.5.2. Soit k un corps de caractéristique $p \neq 2$, on considère la forme G de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie comme sous-groupe de $\mathbb{G}^2_{a,k}$ par l'équation $y^2 = x + ax^2$ où $a \notin k^2$. Soit $P_0 = (0,0)$ l'identité de G, le morphisme

$$P \in G(k) \mapsto [P] - [P_0] \in \mathrm{Pic}^0(C)$$

est injectif [KMT74, Thm. 6.7.9]. Donc si $G(k)$ est infini (par exemple si k est séparablement clos), alors $\mathrm{Pic}(G)$ est un groupe infini (on rappelle que sur un corps parfait, le groupe de Picard d'un k-groupe linéaire connexe est fini [San81, Lem. 6.9]).

Remarque 3.5.3. Pour toute extension K de k, il y a une complétion régulière C^K de X_K, qui n'est pas nécessairement le changement de base C_K (si K n'est pas une extension séparable de k, alors C_K peut ne plus être régulière). Donc il existe une suite exacte,

$$0 \to \mathrm{Pic}^0\left(C^K\right) \to \mathrm{Pic}(X_K) \to m(X_K)\mathbb{Z}/p^{r(X_K)}\mathbb{Z} \to 0.$$

Tout cela motive l'étude de $\mathrm{Pic}^0(C)$. Dans le chapitre 5, on va étudier un objet plus général : le foncteur de Picard $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$.

3.6 Groupe de Picard des formes de $\mathbb{A}^1_k$

Théorème 3.6.1. *Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$.*

(i) Le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ *est de $p^{n(X)}$-torsion.*

(ii) Si X est une forme de $\mathbb{A}^1_k$ non triviale qui a un point k-rationnel (par exemple si X est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ ou si $k = k_s$), alors $\mathrm{Pic}(X) \neq \{0\}$.

Démonstration. (i) On note n pour $n(X)$. Le n-ème morphisme de Frobenius relatif

$$F^n_X : X \to X^{(p^n)}$$

est un morphisme fini surjectif de degré p^n, on va le noter f. Soit Z un cycle de codimension 1 de X, alors f_*Z est un cycle de codimension 1 de $X^{(p^n)}$ [Liu06, Cor. 8.2.6]. Une conséquence directe de la définition de f est que f est injective en tant qu'application entre espaces topologiques, donc $f^*f_*Z = \deg(f)Z = p^nZ$ [Liu06, Pro. 7.1.38]. De plus $X^{(p^n)} \cong \mathbb{A}^1_k$, donc $f_*Z = 0$ dans $\mathrm{Pic}\left(X^{(p^n)}\right)$. Ainsi $f^*f_*Z = p^{n(X)}Z = 0$ dans $\mathrm{Pic}(X)$, et le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ est de $p^{n(X)}$-torsion.

(ii) Si X a un point k-rationnel, alors $m(X) = 1$. Par hypothèse, X est une forme non triviale de $\mathbb{A}^1_k$, alors P_∞ est un point purement inséparable non k-rationnel (Remarque 3.3.8), et $\mathbb{Z}[P_\infty]$ est un sous-groupe strict de $\mathrm{Pic}(C)$. Donc $\mathrm{Pic}(X)$ est non trivial. □

On va maintenant utiliser les arguments de la preuve du théorème 3.6.1 (i) pour obtenir une borne supérieure sur la torsion d'autres groupes de Picard.

Soit Y une variété algébrique affine de dimension d. Le morphisme $F^n_Y : Y \to Y^{(p^n)}$ est un morphisme fini de degré p^{dn}. On note $n(Y)$ le plus petit entier n tel que $Y^{(p^n)} \cong \mathbb{A}^d_k$ (s'il existe). Cette notation coïncide avec celle de la section 3.1 si Y est une forme de $\mathbb{A}^1_k$.

Lemme 3.6.2. *L'entier $n(Y)$ est bien défini dans les cas suivants :*

(i) Y est un k-groupe algébrique unipotent connexe.

(ii) Y est une forme de $\mathbb{A}^2_k$.

Démonstration. Pour (i) voir [DG70, Cor. IV § 2 3.9] et [DG70, Thm. IV §4 4.1]. Pour (ii) voir [Kam75, Thm. 3]. □

La proposition suivante est une conséquence du lemme 3.6.2 et des arguments de la preuve du théorème 3.6.1.

Proposition 3.6.3. *(i) Si U est un groupe algébrique unipotent connexe, de dimension d, alors* $\mathrm{Pic}(U)$ *est de $p^{dn(U)}$-torsion.*

(ii) Si Y est une forme de $\mathbb{A}^2_k$, alors $\mathrm{Pic}(Y)$ *est de $p^{2n(Y)}$-torsion.*

(iii) Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et soit Y une forme de $\mathbb{A}^d_k$. Si k est séparablement clos alors $\mathrm{Pic}(Y)$ *est de $p^{dn(Y)}$-torsion.*

Remarque 3.6.4. Soit $d \geqslant 3$, on ignore si toute forme de $\mathbb{A}^d_k$ devient triviale après une extension purement inséparable.

3.7 Exemples de formes de $\mathbb{A}^1_k$ de groupe de Picard trivial

Tout d'abord, on va donner un exemple explicite d'une forme non triviale de $\mathbb{A}^1_k$ dont le groupe de Picard est trivial.

Lemme 3.7.1. *On considère $k = \mathbb{F}_2(t,u)$ et la forme X de $\mathbb{A}^1_k$ définie par l'équation $y^2 = u + x + tx^2$, alors $X(k) = \emptyset$ et* $\mathrm{Pic}(X)$ *est trivial.*

Démonstration. Pour montrer que $X(k) = \emptyset$, il suffit de montrer que la seule solution de $P^2 = uQ^2 + QR + tR^2$, où $P, Q, R \in \mathbb{F}_2[t, u]$ est triviale. On note deg le degré total d'un polynôme en t, u. Si $\deg(Q) \neq \deg(R)$, par exemple $\deg(Q) < \deg(R)$, alors

$$\deg(P^2) = \deg(uQ^2 + QR + tR^2) = 1 + 2\deg(R).$$

Donc $\deg(P^2)$ est impair, contradiction. Donc $\deg(Q) = \deg(R)$ et les monômes de plus haut degré de uQ^2 et tR^2 doivent s'annuler (s'ils ne s'annulent pas on a la même contradiction). Mais c'est impossible car les monômes de plus haut degré de uQ^2 ont un degré partiel en u impair, tandis que les monômes de plus haut degré de tR^2 ont un degré partiel en u pair.

Après une extension de corps à k_s, selon la proposition 3.2.7, X_{k_s} est isomorphe en tant que k_s-schéma à la forme non triviale de $\mathbb{A}^1_{k_s}$ définie par l'équation $y^2 = x + tx^2$. On a vu dans l'exemple 3.3.6 que la complétion régulière de cette forme est $\mathbb{P}^1_{k_s}$, donc par unicité de la complétion régulière $C_{k_s} \cong \mathbb{P}^1_{k_s}$. Donc $\mathrm{Pic}^0_{C_{k_s}/k_s}$ est triviale, et $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ aussi. De plus $\mathrm{Pic}^0(C)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}^0_{C/k}(k)$ [BLR90, Thm. 9.3.1], donc $\mathrm{Pic}^0(C)$ est trivial.

De plus X n'a pas de point k-rationnel. Donc selon un théorème de T. A. Springer [EKM08, Cor. 18.5], X n'a pas de point rationnel sur toute extension de degré impair. Ainsi

$$\deg : \mathbb{Z}[P_\infty] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(C),$$

et par exactitude de la suite (3.5.1), $\mathrm{Pic}(X)$ est trivial. □

Remarque 3.7.2. La complétion régulière de la forme de $\mathbb{A}^1_k$ considérée dans le lemme 3.7.1 est une forme non triviale de $\mathbb{P}^1_k$.

On va maintenant construire une famille de formes de la droite affine avec un groupe de Picard trivial. Soit G une forme non triviale de $\mathbb{G}_{a,k}$, selon 3.2.1 il y a une suite exacte :

$$0 \to G \to \mathbb{G}^2_{a,k} \to \mathbb{G}_{a,k} \to 0.$$

Soit η le point générique de $\mathbb{G}_{a,k}$, alors $\eta = \mathrm{Spec}(k(t))$ et il y a une application $\eta \to \mathbb{G}_{a,k}$. On note X le produit fibré $\mathbb{G}^2_{a,k} \times_{\mathbb{G}_{a,k}} \eta$.

Proposition 3.7.3. *Avec les notations ci-dessus, X est une forme non triviale de $\mathbb{A}^1_{k(t)}$ et* $\mathrm{Pic}\,(X)$ *est trivial.*

Démonstration. Le morphisme $\mathbb{G}^2_{a,k} \to \mathbb{G}_{a,k}$ est un G-torseur. Donc $X \to \eta$ est un $G_{k(t)}$-torseur, et en particulier c'est une forme de $\mathbb{A}^1_{k(t)}$. Soit K la clôture séparable de $k(t)$, alors G_K est toujours K-ployée ($K/k(t)$ et $k(t)/k$ sont des extensions séparables, et selon la proposition 2.5.2, la propriété d'être ployé n'est pas affectée par les extensions séparables). Par définition de K-ployé, G_K est une forme non triviale de $\mathbb{A}^1_K$. De plus X_K est un G_K-torseur, donc X_K est une forme non triviale de $\mathbb{A}^1_K$ et donc X est une forme non triviale de $\mathbb{A}^1_{k(t)}$.

Enfin, au niveau algébrique le morphisme $p_1 : X \to \mathbb{G}^2_{a,k}$ est le morphisme de localisation

$$k[x, y] \to k[x, y] \otimes_{k[T]} k(T),$$

où $T = y^{p^n} - \left(x + a_1 x^p + \cdots + a_m x^{p^m}\right)$ est un polynôme qui définit G. Alors

$$p_1^* : \mathrm{Pic}(\mathbb{G}^2_{a,k}) \to \mathrm{Pic}(X)$$

est surjectif [Bou06, Chap. 7 §1 n°10 Pro. 17], ainsi $\mathrm{Pic}\,(X)$ est trivial. □

Remarque 3.7.4. Soit k un corps non parfait, avec la construction de la proposition 3.7.3, on a un exemple de forme non triviale de $\mathbb{A}^1_{k(t)}$ avec un groupe de Picard trivial.

Définition 3.7.5. Soit G un k-groupe algébrique affine, alors G est dit *spécial* si pour toute extension K de k, tout G_K-torseur $X \to \mathrm{Spec}(K)$ est trivial.

J.-P. Serre a introduit la notion de groupes spéciaux sur un corps algébriquement clos dans [Ser58] et A. Grothendieck a classifié ces groupes [Gro58]. Plus récemment J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc ont caractérisé les tores spéciaux sur un corps quelconque [CS87, Pro. 7.4], et M. Huruguen a caractérisé les groupes réductifs spéciaux sur un corps quelconque [Hur16, Thm. 4.1]. Il est connu que $\mathbb{G}_{a,k}$ est spécial, par les arguments de [Ser58, 4.4.a], et plus généralement que tout k-groupe algébrique unipotent k-déployé est spécial. D. T. Nguyễn a montré, avec une hypothèse faible sur le corps de base, qu'un groupe unipotent est spécial si et seulement s'il est k-déployé [Ngu13, Cor. 6.10]. Dans une note non publiée, il a généralisé ce résultat à un corps de base quelconque [Ngu16]. On va montrer ce résultat, dans le cas particulier des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$, en utilisant une méthode différente ; on voit ce résultat comme un corollaire du théorème 3.6.1 et de la proposition 3.7.3.

Corollaire 3.7.6. *Soit G une forme non triviale de $\mathbb{G}_{a,k}$. Le $G_{k(t)}$-torseur $X \to \mathrm{Spec}(k(t))$ considéré dans la proposition 3.7.3 est non trivial, en particulier G n'est pas un groupe spécial.*

Démonstration. On suppose que $X \to \mathrm{Spec}(k(t))$ est un $G_{k(t)}$-torseur trivial. Alors, en particulier $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Pic}\left(G_{k(t)}\right)$. Mais c'est impossible, car $\mathrm{Pic}\left(G_{k(t)}\right)$ n'est pas trivial (théorème 3.6.1), alors que $\mathrm{Pic}(X)$ l'est (proposition 3.7.3). $\square$

Chapitre 4

Carré cocartésien et foncteur de Picard relatif

Dans tout le chapitre, S désigne un schéma de base. Sauf si le contraire est mentionné les schémas considérés sont des schémas sur S et les morphismes considérés sont des morphismes de S-schémas. La catégorie des schémas sur S est notée $\big(\text{Schémas}/S\big)$, la catégorie des ensembles est notée (Ensembles).

4.1 Foncteur de Picard relatif

4.1.1 Définitions et premières propriétés

Soient

$$F : \big(\text{Schémas}/S\big)^{\circ} \to (\text{Ensembles})$$

un foncteur contravariant et $\mathfrak{M}$ une classe de morphismes stables par composition, produit fibré et qui contient les isomorphismes.

Le foncteur F est dit un faisceau pour $\mathfrak{M}$ si pour toute famille de schémas $(T_i)_{i\in I}$, le morphisme canonique

$$F\left(\coprod T_i\right) \to \prod F(T_i)$$

est un isomorphisme et si pour tout morphisme $T' \to T$ de $\mathfrak{M}$, la suite

$$F(T) \to F(T') \rightrightarrows F(T' \times_T T')$$

est exacte.

Dans le cas où $\mathfrak{M}$ est la classe des morphismes fidèlement plats de présentation fini (respectivement étales surjectifs) on dit alors que F est un faisceau pour la topologie fppf (respectivement étale).

Soit X un schéma, le foncteur de Picard relatif noté $\operatorname{Pic}_{X/S}$ est défini dans [BLR90, 8.1] comme le faisceau pour la topologie fppf associé au foncteur contravariant

$$\begin{array}{rccc} P_{X/S} : & \big(\text{Schémas}/S\big)^{\circ} & \to & (\text{Ensembles}) \\ & T & \mapsto & \operatorname{Pic}(X \times_S T) \end{array}$$

où $\operatorname{Pic}(X \times_S T)$ est le groupe de Picard usuel.

La proposition suivante donne, sous certaines hypothèses, une description explicite des points de $\operatorname{Pic}_{X/S}$.

Proposition 4.1.1. *[BLR90, Pro. 8.1.4]*

Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas quasi-compact et quasi-séparé, on suppose que le morphisme f satisfait $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$ (respectivement satisfait universellement $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$) et que f admet une section. On considère un S-schéma T plat sur S (respectivement un S-schéma T), alors la suite

$$0 \to \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}(X \times_S T) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(T) \to 0$$

est exacte.

Si les hypothèses de la proposition 4.1.1 sont vérifiées on peut alors identifier le foncteur $\mathrm{Pic}_{X/S}$ avec le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \left(\text{Schémas}/S\right)^\circ & \to & (\text{Ensembles}) \\ T & \mapsto & \frac{\mathrm{Pic}(X \times_S T)}{p_2^* \mathrm{Pic}(T)}. \end{array}$$

Remarque 4.1.2. (i) Dans le cas où $S = \mathrm{Spec}(k)$, avec k un corps, tout S-schéma T est plat. De plus, si X est une variété algébrique sur k, alors le morphisme f est automatiquement quasi-compact et quasi-séparé. Si X est une variété propre, géométriquement connexe et géométriquement réduite alors $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$ [Liu06, Cor. 3.3.21]. Enfin, le morphisme f admet une section si et seulement si le schéma X admet un point k-rationnel. On peut donc appliquer la proposition 4.1.1 à toute variété algébrique propre, géométriquement connexe et géométriquement réduite ayant un point k-rationnel.

(ii) Plus généralement, dans le cas où $f : X \to S$ est propre, plat avec des fibres géométriques intègres, selon la proposition [EGAIII2, 7.8.6] on a universellement $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$. Et si f admet une section, on peut alors appliquer la proposition 4.1.1.

Dans les cas où f n'admet pas de section, on peut utiliser la notion de rigidificateur.

Définition 4.1.3. Soit $f : X \to S$ un morphisme propre, plat et de présentation finie. Alors un sous-schéma $Y \subset X$ qui est fini, plat et de présentation finie sur S (c'est-à-dire Y est défini par une $\mathcal{O}_S$-algèbre localement libre de rang fini) est dit un rigidificateur de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ si le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \left(\text{Schémas}/S\right)^\circ & \to & (\text{Ensembles}) \\ T & \mapsto & \mathcal{O}_{X \times_S T}(X \times_S T) \end{array}$$

est un sous-foncteur de

$$\begin{array}{rcl} \left(\text{Schémas}/S\right)^\circ & \to & (\text{Ensembles}) \\ T & \mapsto & \mathcal{O}_{Y \times_S T}(Y \times_S T). \end{array}$$

autrement dit si l'application $\mathcal{O}_{X \times_S T}(X \times_S T) \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y \times_S T}(Y \times_S T)$ est injective pour tout S-schéma T.

Exemple 4.1.4. Si $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$ est vrai universellement, et s'il existe une section $\varepsilon : S \to X$ de f, alors $\varepsilon(S) \subset X$ est un rigidificateur.

Définition 4.1.5. Soit Y un rigidificateur de $\mathrm{Pic}_{X/S}$ et T un S-schéma, un faisceau inversible sur X rigidifié selon Y est un couple $(\mathcal{L}, \alpha)$ où $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X et α est un isomorphisme $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{|Y}$.

On note $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ le foncteur

$$(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) : \ \left(\text{Schémas}/S\right)^\circ \ \to \ (\text{Ensembles})$$

qui au S-schéma T associe l'ensemble des classes d'isomorphismes des faisceaux inversibles sur $X \times_S T$ rigidifié selon $Y \times_S T$. Le foncteur $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est dit foncteur de Picard rigidifié.

Remarque 4.1.6. L'identité est le seul automorphisme du couple $(\mathcal{L}, \alpha)$, ce qui justifie la terminologie de rigidificateur.

Selon [BLR90, 8.1] $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est un faisceau pour la topologie de Zariski, par théorie de la descente c'est aussi un faisceau pour la topologie fpqc. De plus, $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ a une structure canonique de foncteur en groupes.

4.1.2 Représentabilité du foncteur de Picard relatif

Pour que le foncteur de Picard relatif soit représenté par un schéma, on doit imposer des conditions assez fortes sur $X \to S$.

Théorème 4.1.7. *[Gro62, Thm. VI.3.1]*

Soit $f : X \to S$ un morphisme de schémas projectif et de présentation finie. On suppose qu'en plus f est plat et que les fibres géométriques de f sont réduites et irréductibles. Alors $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est représentable par un S-schéma séparé qui est localement de présentation finie sur S.

Un exemple de Mumford [BLR90, 8.2, p210] montre que l'on ne peut pas espérer des hypothèses beaucoup plus faibles sur $X \to S$. Néanmoins, si on suppose que le schéma de base est le spectre d'un corps, on a le résultat suivant avec des hypothèses un peu plus faibles sur $X \to S$.

Théorème 4.1.8. *[Mur64] [Oor62]*

Soit X un schéma propre sur un corps k, alors $\mathrm{Pic}_{X/k}$ est représentable par un schéma localement de type fini sur k.

Pour avoir un résultat avec des hypothèses plus “naturelles”, il faut se contenter de la représentation du foncteur de Picard relatif par un espace algébrique.

Définition 4.1.9. Soit S un schéma, un espace algébrique X sur S est un foncteur

$$X : \big(\text{Schémas}/S\big)^{\circ} \to (\text{Ensembles})$$

qui vérifie :

(i) X est un faisceau pour la topologie étale.

(ii) Il existe un morphisme $\tau : U \to X$ où U est un S-schéma localement de présentation finie, tel que τ est relativement représentable par des morphismes étales surjectifs de schémas.

(iii) Le produit $U \times_X U$ est représenté par un sous-schéma de $U \times_S U$ tel que l'immersion $U \times_X U \to U \times_S U$ est quasi-compacte.

Remarque 4.1.10. La condition (ii) signifie que pour tout S-schéma V et pour tout morphisme $V \to X$ le produit $U \times_X V$ est représenté par un schéma et que la projection $U \times_X V \to V$ est étale et surjective.

Avec les notations de la définition 4.1.9, on peut voir l'espace algébrique X comme quotient (en tant que faisceau pour la topologie étale) de U par la relation d'équivalence $R = U \times_X U$. Réciproquement, étant donné un S-schéma U localement de présentation finie et un sous-schéma R de présentation finie de $U \times_S U$ qui définit une relation d'équivalence étale, le quotient (pour la topologie étale) de U par R est un espace algébrique.

On va maintenant s'intéresser à la représentabilité du foncteur de Picard rigidifié.

Théorème 4.1.11. *[Ray70, Thm. 2.3.1]*

Soit $f : X \to S$ un morphisme propre, plat et de présentation finie, soit Y un rigidificateur de $\mathrm{Pic}_{X/S}$. Le foncteur en groupe $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est représentable par un S-espace algébrique en groupes localement de présentation finie sur S.

Pour que $\mathrm{Pic}_{X/S}$ soit représentable en tant qu'espace algébrique on doit faire en plus l'hypothèse que f est cohomologiquement plat en dimension 0.

Définition 4.1.12. Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et de présentation finie, on considère un $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ localement de présentation finie et plat sur S. Alors $\mathcal{F}$ est dit cohomologiquement plat en dimension 0 si la formation de $f_*(\mathcal{F})$ commute au changement de base.

Si la condition ci-dessus est vraie pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ alors on dit que f est cohomologiquement plat en dimension 0.

Théorème 4.1.13. *[Art69, Thm. 7.3]*

Soit $f : X \to S$ un morphisme d'espaces algébriques qui est propre, plat et de présentation finie. Si f est cohomologiquement plat en dimension 0, alors $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est représenté par un S-espace algébrique.

Enfin, on s'intéresse maintenant aux propriétés du foncteur de Picard quand il est représentable.

Théorème 4.1.14. *[BLR90, Thm. 8.4.1]*

Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et plat qui est localement de présentation finie. On suppose que f est cohomologiquement plat en dimension 0, donc que $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est un espace algébrique. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Pic}_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^1 f_* \mathcal{O}_X,$$

où $\mathrm{Lie}(\mathrm{Pic}_{X/S})$ est l'algèbre de Lie de $\mathrm{Pic}_{X/S}$.

(ii) Si S est le spectre d'un corps k, alors

$$\dim \mathrm{Pic}_{X/S} \leqslant \dim_k \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X).$$

De plus, il y a égalité si et seulement si $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est lisse sur k.

Proposition 4.1.15. *[BLR90, Pro. 8.4.2]*

Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et plat qui est localement de présentation finie. Soit s un point de S tel que $\mathrm{H}^2(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$. Alors il existe un ouvert U qui contient s tel que $\mathrm{Pic}_{X/S\ |U}$ est formellement lisse.

En particulier, dans le cas d'une courbe relative X sur S, l'espace algébrique $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est formellement lisse sur S.

Exemple 4.1.16. Soit X une courbe projective géométriquement intègre sur un corps k. Dans ce cas $f : X \to \mathrm{Spec}(k)$ est cohomologiquement plat en dimension 0 [EGAIII2, 7.8.6]. Les théorèmes 4.1.14 et 4.1.15 s'appliquent donc. De plus, $\mathrm{Pic}_{X/k}$ est lisse car formellement lisse et selon le théorème 4.1.8 localement de présentation finie sur k. Donc l'inégalité (*ii*) du théorème 4.1.14 est une égalité.

4.2 Carré cocartésien et suite de Mayer-Vietoris

L'objectif de cette section est d'énoncer et de démontrer le théorème 4.2.14 : c'est une suite de Mayer-Vietoris relative que l'on va utiliser dans la section 4.3 pour obtenir une suite exacte de foncteurs de Picard. Tout d'abord, dans la sous-section 4.2.1, on va donner un résultat sur les carrés cartésiens d'anneaux dû à D. Ferrand et un exemple de suite de Mayer-Vietoris. Dans les sections 4.2.2 et 4.2.3 on rassemble des résultats dûs à D. Ferrand [Fer03] et S. Howe [How12] qui sont utilisés dans la sous-section 4.2.4 pour démontrer le théorème 4.2.14.

4.2.1 Un théorème de Milnor et une suite de Mayer-Vietoris

Soient $g : B \to B'$ et $v : A' \to B'$ deux morphismes d'anneaux commutatifs. On note $A = B \times_{B'} A$, on a alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & A' \arrow[d, "v"] \\ B \arrow[r, "g"] & B' \end{tikzcd} \tag{4.2.1}$$

qui est un carré cartésien.

Exemple 4.2.1. On peut construire des carrés cartésiens à partir d'un idéal dit "conducteur". On considère un homomorphisme d'anneaux $f : A \to A'$ et l'idéal I de A défini par

$$I = \{a \in A \mid \forall a' \in A',\ a'f(a) \in f(A)\}.$$

L'idéal I est dit le conducteur de f. Si $\ker(f) \cap I = 0$, alors le carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ A/I \arrow[r] & A'/f(I) \end{tikzcd}$$

est cartésien.

Définition 4.2.2. On considère trois catégories $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{A}'$.

Soient $G : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ et $V : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$ deux foncteurs. On appelle produit fibré de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}'$ au dessus de $\mathcal{B}'$ la catégorie notée $\mathcal{B} \times_{\mathcal{B}'} \mathcal{A}'$ dont les objets sont les triplets (N, s, M') où N est un objet de $\mathcal{B}$, M' est un objet de $\mathcal{A}'$ et s est un isomorphisme de $\mathcal{B}'$ tel que

$$s : G(N) \xrightarrow{\sim} V(M').$$

De plus, les flèches de (N_0, s_0, M'_0) vers (N_1, s_1, M'_1) sont les couples (b, a') où $b : N_0 \to N_1$ est une flèche de $\mathcal{B}$ et $a' : M'_0 \to M'_1$ est une flèche de $\mathcal{A}'$ tels que le carré

$$\begin{tikzcd} G(N_0) \arrow[r, "s_0"] \arrow[d, "G(b)"'] & V(M'_0) \arrow[d, "V(a')"] \\ G(N_1) \arrow[r, "s_1"] & V(M'_1) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Pour tout anneau commutatif R, on note $\mathrm{Mod}(R)$ la catégorie des R-modules.

Dans le cadre du carré cartésien (4.2.1), le morphisme d'anneaux $f : A \to A'$ induit un foncteur d'extension des scalaires

$$f^* : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A').$$

De même, les morphismes d'anneaux g, u et v induisent des foncteurs d'extension des scalaires notés g^*, u^* et v^*. Le produit fibré de catégories $\mathrm{Mod}(B) \times_{\mathrm{Mod}(B')} \mathrm{Mod}(A')$ est alors défini via les foncteurs g^* et v^*.

De plus, on a un isomorphisme de foncteurs $\sigma : g^*u^* \xrightarrow{\sim} v^*f^*$ qui induit le foncteur contravariant suivant :

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{T} : & \mathrm{Mod}(A) & \to & \mathrm{Mod}(B) \times_{\mathrm{Mod}(B')} \mathrm{Mod}(A') \\ & M & \mapsto & (M \otimes_A B, \sigma_M, M \otimes_A A') \end{array} \tag{4.2.2}$$

où $\sigma_M : g^*u^*(M) \xrightarrow{\sim} v^*f^*(M)$ est un isomorphisme de B'-modules.

Ce foncteur possède un adjoint à droite $\mathcal{S}$, défini par

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{S} : & \mathrm{Mod}(B) \times_{\mathrm{Mod}(B')} \mathrm{Mod}(A') & \to & \mathrm{Mod}(A) \\ & (N, s, M') & \mapsto & \{(y, x') \in N \times M' \mid s(1 \otimes y) = 1 \otimes x'\}\,. \end{array} \tag{4.2.3}$$

Théorème 4.2.3. *[Fer03, Thm. 2.2]*

On considère le carré cartésien (4.2.1), avec l'hypothèse supplémentaire que le morphisme d'anneau v est surjectif. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) *Le morphisme d'adjonction $\mathcal{TS} \to Id$ est un isomorphisme.*

(ii) *Un A-module M est nul si et seulement si $\mathcal{T}(M) = 0$.*

(iii) *Soit M un A-module, le morphisme d'adjonction $M \to \mathcal{ST}(M)$ est surjectif, son noyau est annulé par $I = \ker(u)$ et est inclus dans IM.*

(iv) *Désignons, pour tout anneau R, par $\mathcal{C}(R)$ la catégorie des R-modules de type fini (respectivement plats, plats de type fini, projectifs de type fini). Alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ définissent par restriction des foncteurs*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(B) \times_{\mathcal{C}(B')} \mathcal{C}(A') \to \mathcal{C}(B \times_{B'} A')$$

et

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}(A) \to \mathcal{C}(B) \times_{\mathcal{C}(B')} \mathcal{C}(A')$$

qui forment une équivalence de catégories dans chaque cas considéré.

Remarque 4.2.4. (1) Ce théorème généralise un résultat dû à Milnor [Mil71, 2.2] qui a démontré l'assertion (*iv*) dans le cas des modules de type fini.

(2) Dans sa démonstration du théorème 4.2.3 D. Ferrand montre et utilise le fait que dans le cas où M est un module plat le morphisme $M \to \mathcal{ST}(M)$ de l'assertion (*iii*) du théorème 4.2.3 est un isomorphisme.

Avec le théorème 4.2.3 on obtient le théorème ci-dessous, qui est un cas particulier de suite de Mayer-Vietoris.

Théorème 4.2.5. *[Bas68, IX 5.3]*

Avec les notations et les hypothèses du théorème 4.2.3, soit $b' \in B'^*$. On note $\mathrm{mult}_{b'}$ l'isomorphisme de B' vue comme B'-module correspondant à la multiplication par b'. On considère l'application suivante

$$\begin{array}{rrcl} \delta : & B'^* & \to & \mathrm{Pic}(A) \\ & b' & \mapsto & [\mathcal{S}(A', \mathrm{mult}_{b'}, B)] = [\{(x, y) \in A' \times B \mid b'.(x \otimes_{A'} 1) = y \otimes_B 1\}]\,. \end{array}$$

Alors la suite de groupes commutatifs

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^* \arrow[r, "{(f,u)}"] & A'^* \times B^* \arrow[r, "g-v"] & B'^* \arrow[dll, "\delta", rounded corners, to path={ -- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| (\tikztotarget)}] \\ & \mathrm{Pic}(A) \arrow[r, "{(f^*,u^*)}"'] & \mathrm{Pic}(A') \times \mathrm{Pic}(B) \arrow[r, "g^*-v^*"'] & \mathrm{Pic}(B') \end{tikzcd} \tag{4.2.4}$$

est exacte.

4.2.2 Un analogue schématique du théorème de Milnor

Dans cette sous-section, on va montrer un analogue du théorème 4.2.3 dans le cadre de carrés de schémas cocartésiens dans la catégorie des espaces annelés. L'existence de ce résultat est affirmée sans démonstration par D. Ferrand [Fer03, 7.4]. Un énoncé précis et sa démonstration sont donnés dans le mémoire de master de S. Howe [How12, 3.18] qui n'a jamais été publié.

Tout d'abord, on va donner une caractérisation, due à D. Ferrand, des carrés cocartésiens dans la catégorie des espaces annelés.

Proposition 4.2.6. *[Fer03, Pro. 4.3]*
On considère un carré commutatif de morphismes d'espaces annelés

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "u"] & X. \end{tikzcd} \tag{4.2.5}$$

(a) Pour que le carré (4.2.5) *soit cocartésien, il faut et il suffit que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :*

(i) Le carré des ensembles sous-jacents est cocartésien.

(ii) L'application continue $X' \sqcup Y \to X$, déduite de f et u est submersive c'est-à-dire l'application $X' \sqcup Y \to X$ est surjective et si $U \subset X$ est tel que $u^{-1}(U)$ et $f^{-1}(U)$ sont ouverts alors U est un ouvert de X.

(iii) Soit $h = ug = fv$, le carré de morphismes de faisceaux d'anneaux sur X

$$\begin{tikzcd} h_*\mathcal{O}_{Y'} & f_*\mathcal{O}_{X'} \arrow[l] \\ u_*\mathcal{O}_Y \arrow[u] & \mathcal{O}_X \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est cartésien.

(b) Si l'application ensembliste induite par v est injective alors (i) *est équivalent à :*

(i') *u est injectif et f induit une bijection de $X' \setminus v(Y')$ sur $X \setminus u(Y)$.*

(c) Si v induit un homéomorphisme de Y' sur une partie fermée de X' et que le carré (4.2.5) *est cocartésien, alors u induit un homéomorphisme de Y sur une partie fermée de X et f définit un isomorphisme de l'espace annelé induit par X' sur $X' \setminus v(Y')$ sur l'espace annelé induit par X sur $X \setminus u(Y)$.*

Remarque 4.2.7. Le théorème 4.2.6 ci-dessus donne une construction explicite de l'espace somme amalgamé $X = X' \sqcup_{Y'} Y$ en tant qu'espace annelé.

Si X', Y et Y' sont des schémas alors $X' \sqcup_{Y'} Y$ n'est pas en général un schéma, un contre-exemple est donné par [How12, 3.3].

Le cas qui nous intéresse étant celui des schémas, on va considérer dans la suite un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "u"] & X \end{tikzcd}$$

de morphismes de schémas qui est cocartésien dans la catégorie des espaces annelés.

Soit W un schéma, on note $\mathcal{F}_W$ la catégorie des $\mathcal{O}_W$-modules.

Les foncteurs $g^* : \mathcal{F}_Y \to \mathcal{F}_{Y'}$ et $v^* : \mathcal{F}_{X'} \to \mathcal{F}_{Y'}$ permettent de définir la catégorie produit $\mathcal{F}_{X'} \times_{\mathcal{F}_{Y'}} \mathcal{F}_Y$.

On note $\sigma : v^*f^* \xrightarrow{\sim} g^*u^*$ l'isomorphisme de foncteurs. Avec σ on définit le foncteur

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{T}: & \mathcal{F}_X & \to & \mathcal{F}_{X'} \times_{\mathcal{F}_{Y'}} \mathcal{F}_Y \\ & \mathcal{L} & \mapsto & (f^*\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}), u^*\mathcal{L}) \,. \end{array}$$

On va maintenant définir un foncteur $\mathcal{S}$ de $\mathcal{F}_{X'} \times_{\mathcal{F}_{Y'}} \mathcal{F}_Y$ dans $\mathcal{F}_X$, qui est dans les bons cas le pseudo-inverse de $\mathcal{T}$. Pour cela on considère $(\mathcal{L}_{X'}, s, \mathcal{L}_Y)$ un objet de $\mathcal{F}_{X'} \times_{\mathcal{F}_{Y'}} \mathcal{F}_Y$. On note $h = ug = fv$ et $\mathcal{G} = h_*g^*\mathcal{L}_Y$ faisceau de $\mathcal{O}_X$-module sur X.

On a l'égalité $h_* = u_*g_* = f_*v_*$. De plus, on a une application canonique $\mathcal{L}_Y \to g_*g^*\mathcal{L}_Y$. On en déduit, après poussé en avant par u l'existence d'un morphisme de faisceaux

$$\alpha_Y : u_*\mathcal{L}_Y \to \mathcal{G}.$$

De même, on a une application canonique $\mathcal{L}_{X'} \to v_*v^*\mathcal{L}_{X'}$. Or, on a un isomorphisme $s : v^*\mathcal{L}_{X'} \xrightarrow{\sim} g^*\mathcal{L}_Y$, il induit une application $\mathcal{L}_{X'} \to v_*g^*\mathcal{L}_Y$. On en déduit, après poussé en avant par f, un morphisme de faisceaux

$$\alpha_{X'} : f_*\mathcal{L}_{X'} \to \mathcal{G}.$$

Avec ces deux morphismes, on peut définir le foncteur

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{S}: & \mathcal{F}_{X'} \times_{\mathcal{F}_{Y'}} \mathcal{F}_Y & \to & \mathcal{F}_X \\ & (\mathcal{L}_{X'}, s, \mathcal{L}_Y) & \mapsto & f_*\mathcal{L}_{X'} \times_{\mathcal{G}} u_*\mathcal{L}_Y \end{array} \tag{4.2.6}$$

où $\mathcal{H} = f_*\mathcal{L}_{X'} \times_{\mathcal{G}} u_*\mathcal{L}_{Y'}$ est un faisceau produit fibré sur X, explicitement si U est un ouvert de X alors

$$\mathcal{H}(U) = \{(x,y) \in f_*\mathcal{L}_{X'}(U) \times u_*\mathcal{L}_Y(U) \mid \alpha_{X'}(U)(x) = \alpha_Y(U)(y)\} \,.$$

Les foncteurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ généralisent les foncteurs du même nom définis par (4.2.3) et (4.2.2). Pour pouvoir se ramener au cas affine et utiliser le théorème 4.2.3 pour en démontrer une généralisation, on va étudier dans la remarque suivante la compatibilité des foncteurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ avec la restriction.

Remarque 4.2.8. On considère

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{v} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

un diagramme commutatif de morphismes de schémas, cocartésien dans la catégorie des espaces annelés.

Soit U un ouvert de X, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} h^{-1}(U) & \xrightarrow{v_{|h^{-1}(U)}} & f^{-1}(U) \\ {\scriptstyle g_{|h^{-1}(U)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{|f^{-1}(U)}} \\ u^{-1}(U) & \xrightarrow{u_{|u^{-1}(U)}} & U \end{array} \tag{4.2.7}$$

est un diagramme commutatif de morphismes de schémas.

De plus, le carré (4.2.7) est cocartésien dans la catégorie des espaces annelés selon le (a) de la proposition 4.2.6.

On note $\mathcal{S}_U$ et $\mathcal{T}_U$ les foncteurs définis par

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{T}_U : & \mathcal{F}_U & \to & \mathcal{F}_{f^{-1}(U)} \times_{\mathcal{F}_{h^{-1}(U)}} \mathcal{F}_{u^{-1}(U)} \\ & \mathcal{L} & \mapsto & (f^*\mathcal{L}, \sigma_U(\mathcal{L}), u^*\mathcal{L}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{S}_U : & \mathcal{F}_{f^{-1}(U)} \times_{\mathcal{F}_{h^{-1}(U)}} \mathcal{F}_{u^{-1}(U)} & \to & \mathcal{F}_U \\ & \left(\mathcal{L}_{f^{-1}(U)}, s, \mathcal{L}_{u^{-1}(U)}\right) & \mapsto & f_*\mathcal{L}_{f^{-1}(U)} \times_{\mathcal{G}_U} u_*\mathcal{L}_{u^{-1}(U)} \end{array}$$

où l'isomorphisme de foncteurs σ_U et le faisceau $\mathcal{G}_U$ sont définis comme σ et $\mathcal{G}$ *mutatis mutandis.*

On a enfin deux foncteurs restrictions

$$\mathrm{Res}_U : \mathcal{F}_X \to \mathcal{F}_U$$

et

$$\mathrm{Res}_\times : \mathcal{F}_{X'} \times_{\mathcal{F}_{Y'}} \mathcal{F}_Y \to \mathcal{F}_{f^{-1}(U)} \times_{\mathcal{F}_{h^{-1}(U)}} \mathcal{F}_{u^{-1}(U)}.$$

On peut alors vérifier que $\mathcal{T}_U \circ \mathrm{Res}_U = \mathrm{Res}_\times \circ \mathcal{T}$ et $\mathrm{Res}_U \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}_U \circ \mathrm{Res}_\times$.

Soit W un schéma, on note $\mathcal{F}_W^{qc}$ la catégorie des $\mathcal{O}_W$-modules quasi-cohérents.

Théorème 4.2.9. *[How12, Thm. 3.18]*

On considère

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "u"] & X \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de morphismes de schémas, cocartésien dans la catégorie des espaces annelés. On suppose que les morphismes u et v sont des immersions fermées, et que les morphismes g et f sont affines, alors :

(i) Les foncteurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ induisent des foncteurs entre $\mathcal{F}_{X'}^{qc} \times_{\mathcal{F}_{Y'}^{qc}} \mathcal{F}_Y^{qc}$ et $\mathcal{F}_X^{qc}$, et le morphisme d'adjonction $\mathcal{T}\mathcal{S} \to Id$ restreint à ces catégories est un isomorphisme de foncteurs.

(ii) Un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L}$ sur le schéma X est nul si et seulement si $\mathcal{T}(\mathcal{L}) = 0$.

(iii) On considère un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{L}$ sur X, alors l'application d'adjonction $\mathcal{L} \to \mathcal{S}\mathcal{T}(\mathcal{L})$ est surjective, de plus c'est un isomorphisme si $\mathcal{L}$ est plat.

(iv) Soit W un schéma, on note $\mathcal{C}_W$ la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_W$-modules plats quasi-cohérents (respectivement plats de type fini, respectivement localement libre de rang fini). Alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ définissent par restriction des foncteurs

$$\mathcal{S}_\mathcal{C} : \mathcal{C}_{X'} \times_{\mathcal{C}_{Y'}} \mathcal{C}_Y \to \mathcal{C}_X$$

et

$$\mathcal{T}_\mathcal{C} : \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_{X'} \times_{\mathcal{C}_{Y'}} \mathcal{C}_Y$$

qui constituent une équivalence de catégories dans chaque cas considéré.

Démonstration. La définition de $\mathcal{T}$ fait uniquement intervenir des tirés en arrière, le foncteur $\mathcal{T}$ induit donc par restriction aux faisceaux quasi-cohérents un foncteur de $\mathcal{F}_X^{qc}$ dans $\mathcal{F}_{X'}^{qc} \times_{\mathcal{F}_{Y'}^{qc}} \mathcal{F}_Y^{qc}$.

En ce qui concerne $\mathcal{S}$, les immersions fermées sont des morphismes affines donc les morphismes considérés sont tous affines. Or le poussé en avant d'un faisceau quasi-cohérent par un morphisme affine est quasi-cohérent [Liu06, Pro. 5.1.14]. De plus, le produit fibré de deux faisceaux quasi-cohérents au dessus d'un faisceau quasi-cohérent est quasi-cohérent. Donc $\mathcal{S}$ induit bien un foncteur de la catégorie produit $\mathcal{F}^{qc}_{X'} \times_{\mathcal{F}^{qc}_{Y'}} \mathcal{F}^{qc}_{Y}$ dans la catégorie $\mathcal{F}^{qc}_{X}$.

Les propriétés ci-dessus peuvent être démontrées en se restreignant à un ouvert affine U de X. En effet, les morphismes de schémas f, g, u et v étant affines, le diagramme (4.2.7) est constitué de schémas affines. On peut donc considérer le carré cartésien d'anneaux commutatifs associé au diagramme (4.2.7). Or, il y a une équivalence de catégories entre les faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ et les A-modules. Via cette équivalence, les foncteurs $\mathcal{T}_U$ et $\mathcal{S}_U$ correspondent aux foncteurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$ définis par (4.2.2) et (4.2.3). Enfin, v est une immersion fermée, donc la restriction de v entre deux schémas affines induit un morphisme d'anneaux qui est surjectif, on peut donc appliquer le théorème 4.2.3.

Les propriétés (i) à (iii) peuvent être vérifiées sur des ouverts affines, où elles sont les conséquences des propriétés (i) à (iii) du théorème 4.2.3 et de la remarque 4.2.4.

Enfin, pour (iv), on a une équivalence de catégories entre les faisceaux quasi-cohérents plats sur un schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ et les A-modules plats, de même entre les faisceaux plats de type fini et les modules plats de type fini, et enfin entre les faisceaux localement libre de rang fini et les modules projectifs de type fini [Bou62, ch. II §5 n°2 thm. 1]. On peut donc utiliser le (iv) du théorème 4.2.3 pour démontrer les équivalences de catégories voulues. □

Remarque 4.2.10. Dans le cas où les schémas considérés sont localement noethériens, les faisceaux plats de type fini sont les faisceaux plats cohérents.

Soit W un schéma, on note $\underline{\mathrm{Pic}}(W)$ la catégorie des faisceaux inversibles sur W.

Corollaire 4.2.11. *Sous les conditions du théorème 4.2.9 les foncteurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ induisent une équivalence de catégories entre $\underline{\mathrm{Pic}}(X') \times_{\underline{\mathrm{Pic}}(Y')} \underline{\mathrm{Pic}}(Y)$ et $\underline{\mathrm{Pic}}(X)$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du point (iv) du théorème 4.2.9. □

4.2.3 Carré cocartésien et changement de base

Dans cette sous-section on va étudier le comportement d'un carré cocartésien de schémas après un changement de base en commençant par le cas affine.

Lemme 4.2.12. *[How12, Lem. 3.10]*
On considère

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(B') \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Spec}(A') \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{Spec}(B) \arrow[r, "u"] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd} \tag{4.2.8}$$

un diagramme commutatif de morphismes de schémas sur $\mathrm{Spec}(R)$ *où v est une immersion fermée. On suppose que ce diagramme est cocartésien dans la catégorie des espaces annelés. Si A', B et B' sont plats sur R alors,*

(i) A est plat sur R.

(ii) Pour tout morphisme d'anneau $R \to \tilde{R}$, le diagramme obtenu après changement de base par $\tilde{R}$ est cocartésien dans la catégorie des espaces annelés.

Démonstration. On considère le diagramme commutatif de R-algèbres

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f^\#"] \arrow[d, "u^\#"'] & A' \arrow[d, "v^\#"] \\ B \arrow[r, "g^\#"] & B' \end{tikzcd}$$

associé au diagramme (4.2.8). Ce diagramme est cartésien dans la catégorie des anneaux. Par hypothèse v est une immersion fermée, donc le morphisme $v^{\#}$ est surjectif [Liu06, Pro. 2.3.20]. De plus selon le lemme [Fer03, 1.2], $f^{\#}$ induit un isomorphisme de $\ker(u^{\#})$ sur $\ker(v^{\#})$. On a une suite exacte

$$0 \to \ker(v^{\#}) \to A' \to B' \to 0$$

où les R-modules A' et B' sont plats, donc $\ker(v^{\#})$ est aussi plat [Bou62, Chap.I §2 n°5 prop.5].

On a une suite exacte

$$0 \to \ker(u^{\#}) \to A \to B \to 0$$

où le R-module $\ker(u^{\#})$ est isomorphe à $\ker(v^{\#})$ donc plat. Or le R-module B est plat, donc A aussi.

Après changement de base par $\tilde{R}$ on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R \tilde{R} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\tilde{u}"'] & A' \otimes_R \tilde{R} \arrow[d, "\tilde{v}"] \\ B \otimes_R \tilde{R} \arrow[r, "\tilde{g}"] & B' \otimes_R \tilde{R}, \end{tikzcd} \tag{4.2.9}$$

où les flèches verticales restent surjectives.

Les R-modules B et B' étant plats, les suites

$$0 \to \ker(u^{\#}) \otimes_R \tilde{R} \to A \otimes_R \tilde{R} \to B \otimes_R \tilde{R} \to 0$$

et

$$0 \to \ker(v^{\#}) \otimes_R \tilde{R} \to A' \otimes_R \tilde{R} \to B' \otimes_R \tilde{R} \to 0$$

sont exactes [Liu06, Pro. 1.2.6].

Le morphisme $\tilde{f}$ induit donc un isomorphisme entre $\ker(\tilde{u})$ et $\ker(\tilde{v})$. Le carré (4.2.9) est donc cartésien [Fer03, Lem. 1.2]. □

Théorème 4.2.13. *[How12, Thm. 3.11]*

On considère

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "u"] & X \end{tikzcd} \tag{4.2.10}$$

un diagramme de S-schémas cocartésien dans la catégorie des espaces annelés. On suppose que les morphismes u et v sont des immersions fermées, et les morphismes g et f sont affines. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) Si les schémas Y', Y et X' sont plats sur S, alors X est plat sur S.

(ii) Pour tout morphisme $T \to S$, le diagramme obtenu après changement de base

$$\begin{tikzcd} Y' \times_S T \arrow[r, "v_T"] \arrow[d, "g_T"'] & X' \times_S T \arrow[d, "f_T"] \\ Y \times_S T \arrow[r, "u_T"] & X \times_S T \end{tikzcd} \tag{4.2.11}$$

est cocartésien dans la catégorie des espaces annelés.

Démonstration. (i) On rappelle, que selon la remarque 4.2.8 on peut restreindre le diagramme (4.2.10) à un ouvert affine U de X. On obtient alors le diagramme cocartésien de schémas

$$\begin{tikzcd} h^{-1}(U) \arrow[r, "v_{|h^{-1}(U)}"] \arrow[d, "g_{|h^{-1}(U)}"'] & f^{-1}(U) \arrow[d, "f_{|f^{-1}(U)}"] \\ u^{-1}(U) \arrow[r, "u_{|u^{-1}(U)}"] & U. \end{tikzcd}$$

La platitude étant une propriété locale, on peut donc supposer que l'on est dans la situation du lemme 4.2.12, le (i) du lemme 4.2.12 nous permet donc de conclure que X est plat sur S.

(ii) Pour montrer que le carré (4.2.11) est cocartésien dans la catégorie des espaces annelés on va montrer qu'il vérifie la propriété universelle. On considère Z un espace annelé et deux morphismes d'espaces annelés de $X' \times_S T$ et $Y \times_S T$ dans Z. Pour définir un morphisme de $X \times_S T$ dans Z on peut se contenter de le définir sur un recouvrement ouvert de $X \times_S T$.

Soient U un ouvert affine de X, V un ouvert affine de T et W un ouvert affine de S tel que l'image de U et V par les morphismes canoniques de X et T est contenue dans W. Par construction du produit fibré de schémas, $U \times_W V$ est un schéma affine et il existe une immersion ouverte $U \times_W V \to X \times_S T$ qui nous permet de considérer les ouverts affines $U \times_W V$ comme un recouvrement ouvert de $X \times_S T$.

Selon le lemme 4.2.12, le diagramme commutatif de schémas affines obtenu par restriction à $U \times_W V$ est cocartésien dans la catégorie des espaces annelés. Il existe donc un unique morphisme $U \times_W V \to Z$. De plus, par unicité ces morphismes se recollent sur les intersections. La propriété universelle est donc vérifiée. □

4.2.4 Une suite de Mayer-Vietoris relative

On va appliquer les résultats des sous-sections précédentes pour obtenir une suite de Mayer-Vietoris relative qui généralise la suite exacte (4.2.4).

On rappelle que si X est un schéma, on note $\mathcal{O}(X)$ l'anneau des sections globales et $\mathcal{O}(X)^*$ le groupe multiplicatif des sections globales inversibles du faisceau structural $\mathcal{O}_X$.

Théorème 4.2.14. *On considère*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "u"] & X. \end{tikzcd}$$

un diagramme de S-schémas cocartésien dans la catégorie des espaces annelés. On suppose que les morphismes u et v sont des immersions fermées, et les morphismes g et f sont affines. Soit T un S-schéma, la suite

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}(X \times_S T)^* \arrow[r, "(f_T^\#, u_T^\#)"] & \mathcal{O}(X' \times_S T)^* \times \mathcal{O}(Y \times_S T)^* \arrow[r, "v_T^\# - g_T^\#"] & \mathcal{O}(Y' \times_S T)^* \arrow[dll, "\delta"] \\ & \mathrm{Pic}(X \times_S T) \arrow[r, "(f_T^*, u_T^*)"'] & \mathrm{Pic}(X' \times_S T) \times \mathrm{Pic}(Y \times_S T) \arrow[r, "v_T^* - g_T^*"'] & \mathrm{Pic}(Y' \times_S T) \end{tikzcd} \tag{4.2.12}$$

est une suite exacte de groupes commutatifs. L'application δ étant définie par

$$\begin{array}{rccl} \delta : & \mathcal{O}(Y' \times_S T)^* & \to & \mathrm{Pic}(X \times_S T) \\ & a & \mapsto & [\mathcal{S}(\mathcal{O}_{X' \times_S T}, \mathrm{mult}_a, \mathcal{O}_{Y \times_S T})] \end{array}$$

où le foncteur $\mathcal{S}$ est défini par l'équation (4.2.6) *et* mult_a *est l'automorphisme de* $\mathcal{F}_{Y'\times_S T}$ *donné par la multiplication par* $a \in \mathcal{O}(Y' \times_S T)^*$.

Démonstration. Selon le théorème 4.2.13, le carré

$$\begin{tikzcd} Y' \times_S T \arrow[r, "v_T"] \arrow[d, "g_T"'] & X' \times_S T \arrow[d, "f_T"] \\ Y \times_S T \arrow[r, "u_T"] & X \times_S T \end{tikzcd} \tag{4.2.13}$$

est un carré cartésien.

Si X et X' sont des S-schémas et si $f : X' \to X$ est un morphisme affine alors pour tout S-schéma T, le morphisme $f_T : X' \times_S T \to X \times_S T$ est affine [EGAI, Pro. 9.1.16 (iii)]. De plus si X et X' sont des S-schémas et si $f : X' \to X$ est une immersion fermée alors pour tout S-schéma T, le morphisme $f_T : X' \times_S T \to X \times_S T$ est une immersion fermée [EGAI, Pro. 4.3.6 (ii)].

On peut donc appliquer le corollaire 4.2.11 au carré (4.2.13). On obtient une équivalence de catégories entre $\underline{\mathrm{Pic}}(X' \times_S T) \times_{\underline{\mathrm{Pic}}(X\times_S T)} \underline{\mathrm{Pic}}(Y \times_S T)$ et $\underline{\mathrm{Pic}}(Y' \times_S T)$ donnée par les foncteurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ donc la suite (4.2.12) est exacte en $\mathrm{Pic}(X' \times_S T) \times \mathrm{Pic}(Y \times_S T)$.

Ensuite, la suite (4.2.12) est exacte en $\mathrm{Pic}(X \times_S T)$ car si $\mathcal{L} \in \ker(u_T^*, f_T^*)$ alors

$$\mathcal{T}(\mathcal{L}) = (f_T^*\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}), u_T^*\mathcal{L}) \cong (\mathcal{O}_{X'\times_S T}, \varphi, \mathcal{O}_{Y\times_S T}).$$

Or selon la définition 4.2.2, $\varphi = \mathrm{mult}_a$ pour $a \in \mathcal{O}(Y' \times_S T)^*$. Donc $\mathcal{L} \in \mathrm{Im}(\delta)$, l'autre inclusion est évidente.

Enfin, la suite (4.2.12) est exacte en $\mathcal{O}(Y' \times_S T)^*$ car si $a \in \ker(\delta)$, alors

$$\mathcal{S}\left(\mathcal{O}_{X'\times_S T}, \mathrm{mult}_a, \mathcal{O}_{Y\times_S T}\right) \cong \mathcal{O}_{X\times_S T}$$

en appliquant $\mathcal{T}$, on obtient :

$$\left(\mathcal{O}_{X'\times_S T}, \mathrm{mult}_a, \mathcal{O}_{Y\times_S T}\right) \cong \left(\mathcal{O}_{X'\times_S T}, \sigma(\mathcal{O}_{X\times_S T}), \mathcal{O}_{Y\times_S T}\right).$$

Avec la définition 4.2.2 on obtient que $a \in \mathrm{Im}(g^\# - v^\#)$.

Pour finir, le début de la suite (4.2.12) est exacte car le carré

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y' \times_S T) & \mathcal{O}(X' \times_S T) \arrow[l, "v_T^\#"'] \\ \mathcal{O}(Y \times_S T) \arrow[u, "g_T^\#"] & \mathcal{O}(X \times_S T) \arrow[l, "u_T^\#"'] \arrow[u, "f_T^\#"'] \end{tikzcd}$$

est cartésien selon le théorème 4.2.6 (a) (iii). □

4.3 Une première suite exacte de foncteurs de Picard

Dans cette section, on va énoncer et démontrer le théorème 4.3.4. La suite exacte de groupes localement algébriques obtenue fait intervenir les foncteurs de Picard de courbes propres. Ce théorème va être utilisé dans la section 5.1 pour étudier le foncteur de Picard de la complétion régulière d'une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$.

Avant cela, on va d'abord montrer quelques résultats préliminaires.

4.3.1 Résultats préliminaires

Lemme 4.3.1. *On considère*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \tag{4.3.1}$$

un complexe de k-groupes localement algébriques commutatifs lisses. De plus on suppose que les groupes A et B sont des k-groupes algébriques connexes.

Si les suites

$$0 \to A\left(\overline{k}\right) \xrightarrow{f(\overline{k})} B\left(\overline{k}\right) \xrightarrow{g(\overline{k})} C\left(\overline{k}\right) \xrightarrow{h(\overline{k})} D\left(\overline{k}\right) \to 0 \tag{4.3.2}$$

et

$$0 \to \mathrm{Lie}(A) \xrightarrow{\mathrm{Lie}(f)} \mathrm{Lie}(B) \xrightarrow{\mathrm{Lie}(g)} \mathrm{Lie}(C) \xrightarrow{\mathrm{Lie}(h)} \mathrm{Lie}(D) \to 0 \tag{4.3.3}$$

induites par la suite (4.3.1) *sur les points $\overline{k}$-rationnels et sur les algèbres de Lie sont exactes, alors :*

(i) La suite

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g^0} C^0 \xrightarrow{h^0} D^0 \to 0 \tag{4.3.4}$$

est une suite exacte de k-groupes algébriques.

(ii) Le morphisme h induit un isomorphisme $\pi_0(h)$ entre le groupe des composantes connexes de C et celui de D.

(iii) La suite

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \to 0 \tag{4.3.5}$$

est une suite exacte de k-groupes localement algébriques.

Démonstration. Tout d'abord, montrons (i). Le noyau de f est un sous-groupe de A, selon la suite (4.3.3) son algèbre de Lie est triviale, c'est donc un sous-groupe étale. De plus, selon la suite (4.3.2) le noyau de f a un seul point $\overline{k}$-rationnel, donc $\ker(f) = \{0\}$.

Par hypothèse, on a $f(A) \subset \ker(g)$, par propriété universelle du quotient on peut considérer le morphisme de k-groupes localement algébriques $\tilde{g} : B/A \to C$. Dans la suite on note $\tilde{B}$ pour B/A.

Sachant que $\tilde{B}(\overline{k}) = B(\overline{k})/A(\overline{k})$ et $\mathrm{Lie}(\tilde{B}) = \mathrm{Lie}(B)/\mathrm{Lie}(A)$, on se ramène à la situation où l'on a un complexe

$$\tilde{B} \xrightarrow{\tilde{g}} C \xrightarrow{h} D$$

avec $\tilde{B}$ un k-groupe algébrique commutatif et C et D des k-groupes localement algébriques lisses, commutatifs tels que les suites

$$0 \to \tilde{B}\left(\overline{k}\right) \xrightarrow{\tilde{g}(\overline{k})} C\left(\overline{k}\right) \xrightarrow{h(\overline{k})} D\left(\overline{k}\right) \to 0 \tag{4.3.6}$$

et

$$0 \to \mathrm{Lie}(\tilde{B}) \xrightarrow{\mathrm{Lie}(\tilde{g})} \mathrm{Lie}(C) \xrightarrow{\mathrm{Lie}(h)} \mathrm{Lie}(D) \to 0 \tag{4.3.7}$$

sont exactes.

Le noyau de $\tilde{g}$ est un sous-groupe de $\tilde{B}$ avec un seul point $\overline{k}$-rationnel, et dont l'algèbre de Lie est triviale, donc $\ker(\tilde{g}) = \{0\}$.

Le morphisme $\tilde{g}$ identifie $\tilde{B}$ à un sous-groupe de C^0. De plus, par hypothèse on a $\tilde{g}(\tilde{B}) \subset \ker(h)$, on peut donc considérer le morphisme de groupes algébriques $\tilde{h}^0 : \tilde{C}^0 = C^0/\tilde{B} \to D^0$. En effet, la composante neutre d'un groupe localement algébrique est un groupe algébrique [DG70, II §5 Thm. 1.1 (b)]. En utilisant les suites exactes (4.3.6) et (4.3.7), on remarque que le noyau de $\tilde{h}^0$ a un unique point $\overline{k}$-rationnel et que son algèbre de Lie est triviale, le noyau du morphisme $\tilde{h}^0$ est donc trivial. En conséquence, $\tilde{h}^0$ est un monomorphisme, de plus $\tilde{C}^0$ est lisse et Lie$(\tilde{h}^0)$ est une bijection donc selon le corollaire [DG70, II §5 5.5 (b)] le morphisme $\tilde{h}^0$ est une immersion ouverte. Enfin, $\tilde{h}^0$ est surjective sur les points $\overline{k}$-rationnels, $\tilde{h}^0$ est donc un isomorphisme. La suite (4.3.4) est une suite exacte de groupes algébriques, soit (i).

Passons à (ii) : on a donc un diagramme commutatif de groupes abéliens

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \tilde{B}(\overline{k}) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(\overline{k}) \arrow[r] \arrow[d] & D^0(\overline{k}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{B}(\overline{k}) \arrow[r] \arrow[d] & C(\overline{k}) \arrow[r] \arrow[d] & D(\overline{k}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \pi_0(C)(\overline{k}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_0(D)(\overline{k}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dont les 2 premières lignes et les colonnes sont exactes, donc

$$\pi_0(h)(\overline{k}) : \pi_0(C)(\overline{k}) \to \pi_0(D)(\overline{k})$$

est un isomorphisme. Or les k-groupes localement algébriques $\pi_0(C)$ et $\pi_0(D)$ sont étales, donc $\pi_0(D)_{\overline{k}}$ et $\pi_0(C)_{\overline{k}}$ sont des groupes constants qui ont mêmes points $\overline{k}$-rationnels, on a donc un isomorphisme de $\overline{k}$-groupes localement algébriques $\pi_0(h)_{\overline{k}} : \pi_0(D)_{\overline{k}} \xrightarrow{\sim} \pi_0(C)_{\overline{k}}$. Or si $\pi_0(h)_{\overline{k}}$ est un isomorphisme alors $\pi_0(h)$ est aussi un isomorphisme [EGAIV2, 2.7.1 (viii)], d'où (ii).

Il reste à justifier (iii) : on a vu ci-dessus que l'on a un monomorphisme $\tilde{g} : \tilde{B} \to C$, donc $\tilde{g}$ est une immersion fermée [SGA3I, VIA Pro. 2.5.2 (c)]. De plus le quotient $C/\tilde{B}$ noté $\tilde{C}$ est un k-groupe localement algébrique [SGA3I, Thm. VIA.3.3.2]. La suite (4.3.1) étant un complexe, par propriété universelle du quotient, le morphisme de k-groupes localement algébriques h se factorise en $\tilde{h} : \tilde{C} \to D$. Selon la suite (4.3.7), le noyau de $\tilde{h}$ est étale, et selon la suite (4.3.6) il consiste en un unique point rationnel, il est donc trivial. Donc $\tilde{h}$ est un monomorphisme qui induit un isomorphisme entre $\pi_0(\tilde{C})$ et $\pi_0(D)$ (car $\pi_0(\tilde{C})(\overline{k}) \cong \pi_0(D)(\overline{k})$ via $\tilde{h}$ donc $\pi_0(\tilde{h})$ est un isomorphisme), $\tilde{h}$ est donc quasi-compact. Le quotient $D/\tilde{C}$ est selon le théorème [SGA3I, VIA. Thm. 3.3.2] un k-groupe localement algébrique. L'algèbre de Lie de $D/\tilde{C}$ est triviale, ce groupe est donc étale et a un seul point $\overline{k}$-rationnel. Donc $D/\tilde{C}$ est trivial, $\tilde{h}$ est donc un isomorphisme de k-groupes localement algébriques. La suite (4.3.5) est donc exacte. □

Soit $f : X \to S$ un morphisme propre, de présentation finie et plat, le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \left(\text{Schémas}/S\right)^\circ & \to & (\text{Anneaux}) \\ T & \mapsto & \mathcal{O}(X \times_S T) \end{array}$$

est représenté par un S-schéma noté V_X qui est lisse si et seulement si f est cohomologiquement plat en dimension 0 [BLR90, 8.1.8]. De plus le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \left(\text{Schémas}/S\right)^\circ & \to & (\text{Groupes}) \\ T & \mapsto & \mathcal{O}(X \times_S T)^* \end{array}$$

est représenté par un sous-schéma ouvert μ^X de V_X [BLR90, 8.1.10], c'est donc un S-schéma en groupes.

En particulier, si A une k-algèbre de dimension finie, alors le foncteur en groupes

$$\begin{array}{rcl}(k-\text{Algébres}) & \to & (\text{Groupes}) \\ R & \mapsto & (A\otimes_k R)^*\end{array}$$

est représenté par un k-groupe algébrique connexe affine, et commutatif noté μ^A dont l'algèbre de Lie consiste en l'espace vectoriel A muni du crochet de Lie trivial [DG70, II §1 2.3].

Soient $A \subset A'$ deux k-algèbres, l'inclusion $f : A \hookrightarrow A'$ induit une immersion fermée entre groupes algébriques $f^* : \mu^A \to \mu^{A'}$. En effet f^* est injectif sur les $\overline{k}$-points et induit une injection sur les algèbres de Lie, son noyau est donc trivial, c'est donc une immersion fermée [DG70, II §5 Pro. 5.1 b)]. Le conoyau de l'immersion fermée f^* est un k-groupe algébrique affine, connexe, commutatif noté $\mu^{A'/A}$.

Lemme 4.3.2. (i) *Soit A une k-algèbre locale, de dimension finie et de corps résiduel K. On note M l'idéal maximal de A. On a une suite exacte de groupes algébriques*

$$0 \to 1+M \to \mu^A \to \mu^K \to 0 \tag{4.3.8}$$

où $1+M$ est un k-groupe algébrique unipotent k-déployé.

De plus si $K=k$, alors cette suite est scindée et on a un isomorphisme canonique

$$\mu^A \cong (1+M)\times_k \mu^k.$$

(ii) *Soient $A \subset A'$ deux k-algèbres locales, de dimension finie et de même corps résiduel K, alors $\mu^{A'/A}$ est un k-groupe algébrique unipotent connexe k-déployé.*

Démonstration. (i) Tout d'abord, on considère la suite de composition associé aux sous-k-algèbres $k\oplus M^n$ dont les quotients successifs sont des groupes vectoriels car isomorphes à M^n/M^{n+1}. Le groupe algébrique $1+M$ est donc bien un k-groupe algébrique unipotent k-déployé.

L'application quotient $p : A \twoheadrightarrow A/M \cong K$ induit un morphisme de groupes algébriques $\mu^A \twoheadrightarrow \mu^K$ qui a pour noyau $1+M$.

De plus si $K=k$ alors $A = k\oplus M$ et le morphisme $\mu^A \to \mu^k$ admet une section, la suite (4.3.8) est donc scindée et $\mu^A \cong (1+M)\times_k \mu^K$.

(ii) Selon le (i), le diagramme suivant est commutatif avec les deux lignes exactes.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 1+M \arrow[r] \arrow[d] & \mu^A \arrow[r] \arrow[d] & \mu^K \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 1+M' \arrow[r] & \mu^{A'} \arrow[r] & \mu^K \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

On a donc un isomorphisme $\mu^{A'/A} = \mu^{A'}/\mu^A \cong (1+M')/(1+M)$. En particulier $\mu^{A'/A}$ est un k-groupe algébrique unipotent k-déployé car c'est le quotient d'un k-groupe algébrique unipotent k-déployé par un sous-groupe k-déployé (voir [Bor12, Thm. V.15.4]). □

Remarque 4.3.3. En général, si $A \subset A'$ sont deux k-algèbres locales de dimension finie et de corps résiduel K et K' alors $\mu^{A'/A}$ n'est pas forcément un k-groupe algébrique unipotent k-déployé. Par exemple, si $K=k$ et K' est une extension purement inséparable de degré fini de k, alors le groupe algébrique $\mu^{K'}/\mu^K$ est unipotent ployé sur k [Oes84, Lem. VI.5.1].

4.3.2 Une suite exacte de foncteurs de Picard

Théorème 4.3.4. *Soit*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "u"] & X \end{tikzcd}$$

un carré cocartésien de variétés algébriques sur le corps k. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

(i) Les morphismes u et v sont des immersions fermées, et les morphismes g et f sont affines.

(ii) Les variétés X et X' sont des courbes propres, géométriquement intègres avec $X(k)$ et $X'(k)$ non vides.

(iii) Les schémas Y et Y' sont des schémas affines associés à des k-algèbres locales de dimension finie notées A et A'.

(iv) Le morphisme de faisceaux $g^{\#} : \mathcal{O}_Y \to g_*\mathcal{O}_{Y'}$ est injectif.

Alors, la suite de groupes localement algébriques

$$0 \to \mu^Y \overset{g^*}{\to} \mu^{Y'} \overset{\overline{\delta}}{\to} \mathrm{Pic}_{X/k} \overset{f^*}{\to} \mathrm{Pic}_{X'/k} \to 0 \tag{4.3.9}$$

est exacte. De plus, cette suite induit, en considérant les B-points, une suite exacte de groupes commutatifs pour toute k-algèbre artinienne B.

Enfin, en notant $\mu^{Y'/Y}$ le conoyau de g^*, on a une suite exacte de groupes algébriques

$$0 \to \mu^{Y'/Y} \overset{\overline{\delta}}{\to} \mathrm{Pic}^0_{X/k} \overset{f^*}{\to} \mathrm{Pic}^0_{X'/k} \to 0. \tag{4.3.10}$$

Démonstration. L'hypothèse (i) nous permet d'appliquer le théorème 4.2.14, on a donc la suite exacte (4.2.12). Selon la proposition [EGAIII2, Pro. 7.8.6], l'hypothèse (ii) implique que pour tout k-schéma T quasi-compact on a

$$\mathcal{O}(X \times_k T)^* \cong \mathcal{O}(T)^* \text{ et } \mathcal{O}(X' \times_k T)^* \cong \mathcal{O}(T)^*.$$

Les premiers termes de la suite (4.2.12) s'écrivent alors

$$0 \to \mathcal{O}(T)^* \overset{(u_T^{\#}, id)}{\longrightarrow} \mathcal{O}(Y \times_k T)^* \times \mathcal{O}(T)^* \overset{g_T^{\#} - v_T^{\#}}{\longrightarrow} \mathcal{O}(Y' \times_k T)^* \overset{\delta}{\to} \mathrm{Pic}(X \times_k T).$$

On peut donc simplifier cette suite en la suite exacte

$$\mathcal{O}(Y \times_k T)^* \overset{g_T^{\#}}{\to} \mathcal{O}(Y' \times_k T)^* \overset{\delta}{\to} \mathrm{Pic}(X \times_k T).$$

Selon l'hypothèse (iii), les schémas μ^Y et $\mu^{Y'}$ sont des k-groupes algébriques affines. De plus, selon l'hypothèse (iv) le morphisme $g^{\#}$ induit une immersion fermée entre groupes algébriques commutatifs $g^* : \mu^Y \to \mu^{Y'}$.

On obtient donc à partir de la suite (4.2.12) la suite exacte suivante :

$$0 \to \mu^Y(T) \to \mu^{Y'}(T) \to \mathrm{Pic}(X \times_k T) \to \mathrm{Pic}(X' \times_k T) \times \mathrm{Pic}(Y \times_k T) \to \mathrm{Pic}(Y' \times_k T). \tag{4.3.11}$$

L'hypothèse (ii) permet d'appliquer la proposition 4.1.1, donc

$$\mathrm{Pic}_{X/k}(T) = \frac{\mathrm{Pic}(X \times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)} \text{ et } \mathrm{Pic}_{X'/k}(T) = \frac{\mathrm{Pic}(X' \times_k T)}{\mathrm{Pic}(T)}.$$

De plus, selon le théorème 4.1.8, les foncteurs de Picard $\mathrm{Pic}_{X/k}$ et $\mathrm{Pic}_{X'/k}$ sont représentés par des k-groupes localement algébriques commutatifs. Enfin, selon la proposition 4.1.15 les k-groupes localement algébriques $\mathrm{Pic}_{X/k}$ et $\mathrm{Pic}_{X'/k}$ sont lisses.

À partir de maintenant, on suppose que $T = \mathrm{Spec}(B)$ où B est une k-algèbre artinienne, selon l'hypothèse (*iii*) les k-algèbres A et A' sont des k-algèbres locales de dimension finie donc artiniennes. La k-algèbre commutative $A \otimes_k B$ est toujours artinienne [FH97, Pro. 6.1], elle est donc isomorphe à un produit fini de k-algèbres locales [Eis95, Cor. 2.16]. On en déduit que $\mathrm{Pic}(Y \times_k B)$ est trivial, et de même $\mathrm{Pic}(Y' \times_k B)$ est trivial.

On obtient donc à partir de la suite (4.3.11) une suite exacte de B-points de groupes localement algébriques commutatifs lisses.

$$0 \to \mu^Y(B) \to \mu^{Y'}(B) \to \mathrm{Pic}_{X/k}(B) \to \mathrm{Pic}_{X'/k}(B) \to 0. \tag{4.3.12}$$

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mu^Y(k) \arrow[r] \arrow[u] & \mu^{Y'}(k) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Pic}_{X/k}(k) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Pic}_{X'/k}(k) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu^Y(k[\varepsilon]) \arrow[r] \arrow[u] & \mu^{Y'}(k[\varepsilon]) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Pic}_{X/k}(k[\varepsilon]) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Pic}_{X'/k}(k[\varepsilon]) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Lie}(\mu^Y) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Lie}(\mu^{Y'}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Lie}(\mathrm{Pic}_{X/k}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Lie}(\mathrm{Pic}_{X'/k}) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0. \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Les deux premières lignes de ce diagramme sont exactes car obtenues en considérant la suite (4.3.12) avec $B = k[\varepsilon]$ et $B = k$. De plus, les colonnes sont exactes ; en effet si G est un groupe localement algébrique on peut définir l'algèbre de Lie de G par $\ker(G(k[\varepsilon]) \to G(k))$. On en déduit que la troisième ligne est exacte, on a donc une suite exacte entre les algèbres de Lie.

En considérant la suite (4.3.12) avec $B = \overline{k}$ on peut enfin appliquer le lemme 4.3.1. En conclusion, la suite (4.3.9) est une suite exacte de k-groupes localement algébriques, et la suite (4.3.10) est une suite exacte de k-groupes algébriques. $\square$

4.4 Rigidificateur et suite exacte de foncteurs de Picard

Dans cette section, on va obtenir une généralisation du théorème 4.3.4 en utilisant une méthode très différente : on utilise les propriétés des foncteurs de Picard rigidifiés. Tout d'abord, on va obtenir la suite exacte (4.4.1) qui fait le lien entre le foncteur de Picard et le foncteur de Picard rigidifié. Ensuite, on va énoncer le lemme 4.4.3, ce qui nous permet d'obtenir la suite (4.4.2) qui généralise la suite (4.3.9).

Soit $X \to S$ un morphisme propre, plat et de présentation finie. On suppose qu'il existe un rigidificateur $Y \subset X$ de $\mathrm{Pic}_{X/S}$. Alors on a une immersion $\mu^X \to \mu^Y$ [BLR90, Pro. 8.1.9], où μ^X et μ^Y sont les S-schémas en groupes définis dans la sous-section 4.3.1.

On a une application

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\delta}: & \mu^Y & \to & (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \\ & a \in \mathcal{O}(Y \times_S T)^* & \mapsto & (\mathcal{O}_{X \times_S T}, \mathrm{mult_a}) \end{array}$$

où $\mathrm{mult_a} : \mathcal{O}_{X\times_S T} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X\times_S T}$ correspond à la multiplication par a. On a aussi une application canonique $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to \mathrm{Pic}_{X/S}$ dont le noyau est l'image de $\tilde{\delta}$.

Dans ce cadre, la suite

$$0 \to \mu^X \to \mu^Y \to (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to \mathrm{Pic}_{X/S} \to 0 \tag{4.4.1}$$

est une suite exacte de faisceaux pour la topologie étale [Ray70, Pro. 2.1.2 et 2.4.1].

Avec les hypothèses ci-dessus, le théorème 4.1.11 s'applique : le foncteur de Picard rigidifié $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est donc représenté par un S-espace algébrique de présentation finie. Dans la remarque 4.4.1 et la proposition 4.4.2 on donne des cas particuliers où $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est représenté par un S-schéma en groupes.

Remarque 4.4.1. On suppose que $X \to S$ est cohomologiquement plat en dimension 0, alors $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est représenté par un schéma en groupes localement de type fini. De plus, si S est le spectre d'un corps, alors $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est représenté par un S-schéma en groupes localement de type fini [Art69, Lem. 4.2].

Proposition 4.4.2. *On suppose que le morphisme structural $X \to S$ est projectif, de présentation finie, plat et que les fibres géométriques sont réduites et irréductibles, $Y \subset X$ est toujours un rigidificateur. Alors,*

(i) Le quotient fppf μ^Y/μ^X est représentable un S-schéma en groupes affine, plat et de présentation finie,

(ii) $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ *est un S-schéma en groupes,*

(iii) La suite

$$0 \to \mu^Y/\mu^X \to (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to \mathrm{Pic}_{X/S} \to 0$$

est une suite exacte de S-schémas en groupes.

Démonstration. Le théorème 4.1.7 s'applique, donc $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est représenté par un S-schéma séparé localement de présentation finie sur S.

De plus, $\mu^X = \mathbb{G}_{m,S}$ et $\mu^Y = R_{Y/S}(\mathbb{G}_{m,Y})$ (où R désigne la restriction de Weil), donc le S-schéma en groupes μ^Y est affine sur S [DG70, I §1 Pro. 6.6]. De plus, le quotient μ^Y/μ^X est un S-schéma affine [SGA3II, VIII Thm.5.1] ($\mu^X \to \mu^Y$ est une immersion donc μ^X opère librement sur μ^Y). Enfin μ^Y est lisse et de présentation finie sur S [BLR90, Pro. 7.6.5], donc μ^Y/μ^X est de présentation finie sur S [SGA3II, Pro. 8.5.8] et $\mu^Y/\mu^X \to S$ est fidèlement plat [EGAIV2, Cor. 2.2.11 (ii)].

Montrons que μ^Y/μ^X est un S-schéma en groupes. On note $m' : \mu^Y \times \mu^Y \to \mu^Y$ la multiplication de μ^Y et $p : \mu^Y \to \mu^Y/\mu^X$ le quotient. On a alors un morphisme $p \circ m' : \mu^Y \times \mu^Y \to \mu^Y/\mu^X$ qui est $\mu^X \times \mu^X$-invariant, or le quotient $(\mu^Y \times \mu^Y)/(\mu^X \times \mu^X)$ est représentable [SGA3II, VIII Thm. 5.1], donc par propriété universelle du quotient catégorique (en effet selon la proposition [MFK94, 0.1] les torseurs sont des quotients catégoriques au sens de la définition [MFK94, 0.5]) il existe un unique morphisme $(\mu^Y \times \mu^Y)/(\mu^X \times \mu^X) \to \mu^Y/\mu^X$ qui factorise $p \circ m'$. De plus $(\mu^Y \times \mu^Y)/(\mu^X \times \mu^X) = \mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X$, on obtient donc un morphisme $m : \mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X \to \mu^Y/\mu^X$. De même on obtient par quotient des applications $e : S \to \mu^Y/\mu^X$ et $i : \mu^Y/\mu^X \to \mu^Y/\mu^X$. Il reste à montrer que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X \arrow[r, "m\times id"] \arrow[d, "id\times m"'] & \mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X \arrow[d, "m"] \\
\mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X \arrow[r, "m"] & \mu^Y/\mu^X,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mu^Y/\mu^X \arrow[r, "e\times id"] \arrow[dr, "id"'] & \mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X \arrow[d, "m"] & \mu^Y/\mu^X \arrow[l, "id\times e"'] \arrow[dl, "id"] \\
& \mu^Y/\mu^X &
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mu^Y/\mu^X \arrow[r, "id\times i"] \arrow[dr, "e\circ f"'] & \mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X \arrow[d, "m"] & \mu^Y/\mu^X \arrow[l, "i\times id"'] \arrow[dl, "e\circ f"] \\
& \mu^Y/\mu^X &
\end{tikzcd}$$

(où f est le morphisme structural de μ^Y/μ^X) sont commutatifs. Le premier diagramme est commutatif à cause de la propriété universelle du quotient

$$\mu^Y \times \mu^Y \times \mu^Y \to \mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X,$$

en effet il existe une unique application

$$\mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X \times \mu^Y/\mu^X \to \mu^Y/\mu^X$$

qui factorise

$$\mu^Y \times \mu^Y \times \mu^Y \to \mu^Y/\mu^X,$$

or $m \circ (m \times id)$ et $m \circ (id \times m)$ conviennent, donc $m \circ (m \times id) = m \circ (id \times m)$. De même pour les autres diagrammes. On a donc montré (i).

Montrons (ii) : selon le corollaire [DG70, III §4 Cor. 1.8] $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to \mathrm{Pic}_{X/S}$ est un μ^Y/μ^X-torseur (au sens de [DG70, III §4 Def. 1.3]). De plus μ^Y/μ^X est un S-groupe affine, donc selon la proposition [DG70, III §4 1.9 a)] $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est représenté par un S-schéma. De plus, selon le théorème 4.1.11 $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est un S-espace algébrique en groupes, or une conséquence de la proposition [BLR90, 8.3.5] est que les morphismes d'espaces algébriques sont des morphismes de schémas quand les espaces algébriques en question sont des schémas. Donc $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est un S-schéma en groupes, d'où (ii).

Il reste à montrer (iii) : selon les corollaires [DG70, III §4 1.7] et [DG70, III §1 2.11] si le morphisme $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \times_{\mathrm{Pic}_{X/S}} (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y)$ est fidèlement plat de présentation finie alors $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to \mathrm{Pic}_{X/S}$ l'est aussi. Or selon [DG70, III §1 2.4]

$$(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \times_{\mathrm{Pic}_{X/S}} (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \cong (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \times_S \mu^Y/\mu^X,$$

de plus on a déjà montré que $\mu^Y/\mu^X \to S$ est fidèlement plat de présentation finie, donc $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to \mathrm{Pic}_{X/S}$ est fidèlement plat de présentation finie. De plus

$$(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \times_{\mathrm{Pic}_{X/S}} (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \cong (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \times_S \mu^Y/\mu^X$$

implique que μ^Y/μ^X est le noyau de $(\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to \mathrm{Pic}_{X/S}$, d'où l'affirmation (iii). $\square$

Lemme 4.4.3. *[Bri14, Lem. 2.2]*
Soit

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "u"] & X
\end{tikzcd}$$

un carré cocartésien de S-schéma où les morphismes u et v sont des immersions fermées, et les morphismes g et f sont affines. On suppose de plus que $X \to S$ et $X' \to S$ sont des morphismes propres, plats et de présentation finie. On suppose enfin que $Y \subset X$ est un rigidificateur de $\mathrm{Pic}_{X/S}$, et que de même $Y' \subset X'$ est un rigidificateur de $\mathrm{Pic}_{X'/S}$.

Alors $f^* : (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \to (\mathrm{Pic}_{X'/S}, Y')$ est un isomorphisme.

Démonstration. Soit T un S-schéma, selon le théorème 4.2.13 et le corollaire 4.2.11 les faisceaux inversibles sur $X \times_S T$ sont de la forme $(\mathcal{L}_{X' \times_S T}, s, \mathcal{L}_{Y \times_S T})$ où $\mathcal{L}_{X' \times_S T}$ est un faisceau inversible sur $X' \times_S T$, et $\mathcal{L}_{Y \times_S T}$ est un faisceau inversible sur $Y \times_S T$, et $s : v_T^* \mathcal{L}_{Y \times_S T} \xrightarrow{\sim} g_T^* \mathcal{L}_{X' \times_S T}$ est un isomorphisme.

Soit $(\mathcal{L}, \alpha')$ un faisceau de $X' \times_S T$ rigidifié selon Y', on considère le faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $X \times_S T$ associé au triplet $(\mathcal{L}', \alpha', \mathcal{O}_{Y \times_S T})$. On remarque que $(\mathcal{L}, Id)$ a pour image $(\mathcal{L}', \alpha')$ par f^* qui est donc surjective.

De plus, si $(\mathcal{L}, \alpha)$ est un faisceau inversible de $X \times_S T$ rigidifié selon Y dont l'image par f^* est triviale, alors $f_T^* \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{X' \times_S T}$ et $u_T^* \mathcal{L} \overset{\alpha}{\cong} \mathcal{O}_{Y \times_S T}$. Donc $\mathcal{L}$ est isomorphe au faisceau inversible sur $X \times_S T$ qui correspond au triplet $(\mathcal{O}_{X' \times_S T}, s, \mathcal{O}_{Y \times_S T})$ où s est donné par la multiplication par un élément de $\mathcal{O}(Y' \times_S T)^*$. Or $(\mathcal{O}_{X' \times_S T}, s, \mathcal{O}_{Y \times_S T})$ est isomorphe au faisceau associé au triplet $\left(\mathcal{O}_{X' \times_S T}, s v_T^{\#}(x), \mathcal{O}_{Y \times_S T}\right)$ où $x \in \mathcal{O}(X' \times_S T)^*$, donc $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{X \times_S T}$ et $(\mathcal{L}, \alpha) \cong (\mathcal{O}_{X \times_S T}, Id)$. On a donc montré que f^* est injective. □

Théorème 4.4.4. *Soit*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "u"] & X \end{tikzcd}$$

un carré cocartésien de schéma sur S. On suppose que

(i) Les morphismes u et v sont des immersions fermées, et les morphismes g et f sont affines.

(ii) Les morphismes structuraux $X \to S$ et $X' \to S$ sont projectifs, plats, de présentation finie et leurs fibres géométriques sont intègres.

(iii) Y est un rigidificateur de $\mathrm{Pic}_{X/S}$, et de même Y' est un rigidificateur de $\mathrm{Pic}_{X'/S}$.

Alors la suite

$$0 \to \mu^Y \to \mu^{Y'} \to \mathrm{Pic}_{X/S} \to \mathrm{Pic}_{X'/S} \to 0 \tag{4.4.2}$$

est une suite exacte de S-schémas en groupes.

Démonstration. On a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mu^X \arrow[r] \arrow[d] & \mu^Y \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{Pic}_{X/S}, Y) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \mathrm{Pic}_{X/S} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mu^{X'} \arrow[r] & \mu^{Y'} \arrow[r] & (\mathrm{Pic}_{X'/S}, Y') \arrow[r] & \mathrm{Pic}_{X'/S} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Selon le lemme 4.4.3, f^* est un isomorphisme. De plus $\mu^X \cong \mu^{X'} \cong \mathbb{G}_{m,S}$ car on a universellement $\varphi_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S$ et $\varphi'_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_S$ [EGAIII2, Pro. 7.8.6]. Donc la suite (4.4.2) est une suite exacte de S-schémas en groupes. □

Chapitre 5

Foncteur de Picard de la complétion régulière d'une forme de la droite affine

On considère une forme X de $\mathbb{A}^1_k$, de complétion régulière C. L'objectif de ce chapitre est d'étudier la Jacobienne $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$. Les résultats obtenus sont regroupés dans le théorème 5.2.4. La démonstration du théorème 5.2.4 se fait en deux temps. Tout d'abord, dans la section 5.1 on étudie le cas de la Jacobienne des formes de $\mathbb{G}_{a,k}$ avec une méthode explicite. Ensuite, dans la section 5.2, on présente un raisonnement plus général qui marche pour toutes les formes de $\mathbb{A}^1_k$.

5.1 Foncteur de Picard de la complétion régulière d'une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$

Dans cette section, on étudie le foncteur de Picard de la complétion régulière d'une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. Pour cela, on étudie tout d'abord le foncteur de Picard de la complétion naïve (déjà utilisée dans la section 3.4) avec une méthode explicite. Ensuite dans la sous-section 5.1.2, on va déduire de notre étude du foncteur de Picard de la complétion naïve une majoration de la torsion de la Jacobienne de la complétion régulière d'une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$.

5.1.1 Foncteur de Picard de la complétion naïve d'une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$

Soit G une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. Selon le théorème [Rus70, 2.1], G est donnée par une équation de la forme $y^{p^n} = x + a_1 x^p + \cdots + a_m x^{p^m}$ où m et n sont des entiers. Selon la remarque 3.2.2 on peut supposer que $n = n(G)$, de plus on peut supposer que m est minimal. Dans la suite, G est donnée par l'équation $y^{p^n} = x + a_1 x^p + \cdots + a_m x^{p^m}$ où $n = n(G)$ et m est minimal.

On rappelle que selon le corollaire [Rus70, 2.3.1] le plus petit corps k' tel que $G_{k'}$ est déployé est $k' = k\left[a_1^{p^{-n}}, \ldots, a_m^{p^{-n}}\right]$.

On considère l'adhérence $\widehat{C}$ de G dans l'espace projectif à poids $\mathbb{P}\left(1, p^{(m-n)_+}, 1\right)$ où $(m-n)_+ = m-n$ si $m-n \geqslant 0$, sinon $(m-n)_+ = 0$.

La variété projective $\widehat{C}$ est définie par l'équation

$$y^{p^n} = xz^{p^N-1} + a_1 x^p z^{p^N-p} + \cdots + a_m x^{p^m} z^{p^N-p^m} \tag{5.1.1}$$

où $N = \max(n, m)$. On note A' la k-algèbre graduée qui définit la variété $\widehat{C}$. On remarque que la variété $\widehat{C}$ est lisse en tout point sauf P_∞.

On considère maintenant la carte $x = 1$. La variété affine $\widehat{C} \cap (x = 1)$ est définie par $A'_{(x)}$, la sous algèbre de A'_x constituée des éléments de degré 0. Alors $A'_{(x)}$ est engendrée par $y/x^{p^{(m-n)_+}}$ et z/x.

On note $Y = y/x^{p^{(m-n)_+}}$ et $Z = z/x$, la variété affine $\widehat{C} \cap (x = 1)$ est donc donnée par la k-algèbre

$$k[Y, Z]/\left(Y^{p^n} - \left(Z^{p^N-1} + a_1 Z^{p^N-p} + \cdots + a_m Z^{p^N-p^m}\right)\right).$$

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{k'[y,z]}{\left(y^{p^n} - \left(z^{p^N-1} + \cdots + a_m z^{p^N-p^m}\right)\right)} & \overset{\varphi}{\hookrightarrow} & k'[t] \\ y & \mapsto & t^{p^N-1} + a_1^{p^{-n}} t^{p^N-p} + \cdots + a_m^{p^{-n}} t^{p^N-p^m} \\ z & \mapsto & t^{p^n}. \end{array} \tag{5.1.2}$$

Le morphisme de k'-algèbres φ est bien défini car $k' = k\left[a_1^{p^{-n}}, \ldots, a_m^{p^{-n}}\right]$.

Dans la suite on note $\alpha_i = a_i^{p^{-n}}$ et $Q(t) = t^{p^N-1} + \alpha_1 t^{p^N-p} + \cdots + \alpha_m t^{p^N-p^m}$.

Lemme 5.1.1. *On note A la k'-algèbre engendrée par Q et t^{p^n}.*

(i) Pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$t^{p^{2N-1}-p^{N-i}} \in A.$$

(ii) L'application φ est la normalisation.

Démonstration. (i) On va raisonner par récurrence sur i. Pour $i = 1$,

$$\underbrace{Q(t)^{p^{N-1}}}_{\in A} = t^{p^{N-1}(p^N-1)} + \underbrace{\alpha_1^{p^{N-1}} t^{p^{N-1}(p^N-p)} + \cdots + \alpha_m^{p^{N-1}} t^{p^{N-1}(p^N-p^m)}}_{\in A \text{ car c'est un polynôme en } t^{p^n}}$$

donc $t^{p^{N-1}(p^N-1)} \in A$.

Supposons que pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant i_0 < N$ on ait $t^{p^{2N-1}-p^{N-i}} \in A$. Montrons que c'est vrai pour $i_0 + 1$. Pour cela on considère,

$$\begin{aligned} \underbrace{Q(t)^{p^{N-(i_0+1)}}}_{\in A} = t^{p^{N-(i_0+1)}(p^N-1)} + & \\ \alpha_1^{p^{N-(i_0+1)}} t^{p^{N-(i_0+1)}(p^N-p)} + \cdots + \alpha_{i_0}^{p^{N-(i_0+1)}} t^{p^{N-(i_0+1)}(p^N-p^{i_0})} + & \\ \underbrace{\alpha_{i_0+1}^{p^{N-(i_0+1)}} t^{p^{N-(i_0+1)}(p^N-p^{i_0+1})} + \cdots + \alpha_m^{p^{N-(i_0+1)}} t^{p^{N-(i_0+1)}(p^N-p^m)}}_{\in A \text{ car c'est un polynôme en } t^{p^n}}&. \end{aligned}$$

De plus $t^{p^{2N-1}-p^{2N-(i_0+1)}}$ est dans A car c'est un polynôme en t^{p^n}. Donc

$$t^{p^{2N-1}-p^{2N-(i_0+1)}} Q(t)^{p^{N-(i_0+1)}} \in A,$$

or pour tout $i \in [\![1; i_0]\!]$

$$t^{p^{N-(i_0+1)}(p^N-p^i)} t^{p^{2N-1}-p^{2N-(i_0+1)}} = \underbrace{t^{p^{2N-1}-p^{N-(i_0+1-i)}}}_{\in A \text{ par hypothése}}.$$

Donc $t^{p^{N-(i_0+1)}(p^N-1)} t^{p^{2N-1}-p^{2N-(i_0+1)}} = t^{p^{2N-1}-p^{N-(i_0+1)}} \in A$.

(ii) Selon (i), on sait que pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant N$ alors $t^{p^{2N-1}-p^{N-i}} \in A$. En particulier pour $i = N$, $t^{p^{2N-1}-1} \in A$, or $t^{p^{2N-1}} \in A$ donc $t \in \mathrm{Frac}(A)$. La clôture intégrale de $A = \mathrm{Im}(\varphi)$ est donc $k'[t]$, ce qui nous permet de conclure que φ est la normalisation. $\square$

On va construire un diagramme de variétés algébriques sur k',

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^1_{k'} \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r] & \widehat{C}_{k'} \end{tikzcd} \tag{5.1.3}$$

où le morphisme f est la normalisation, qui est explicitée par (5.1.2) dans la carte $x = 1$ (la normalisation de $\widehat{C}_{k'}$ est $\mathbb{P}^1_{k'}$ car c'est la complétion régulière de $G_{k'}$, et la complétion régulière est unique modulo un unique isomorphisme). On note $\mathcal{C}$ le conducteur de $\mathcal{O}_{\widehat{C}_{k'}}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{k'}}$, i.e. le faisceau d'idéaux de $f_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{k'}}$ défini par

$$\mathcal{C}(U) = \left\{a \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{k'}}(f^{-1}(U)) \mid a.\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{k'}}(f^{-1}(U)) \subset \mathcal{O}_{\widehat{C}_{k'}}(U)\right\}.$$

On remarque que $\mathcal{C}$ est aussi un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\widehat{C}_{k'}}$. On définit alors Y comme le sous-schéma fermé de $\widehat{C}_{k'}$ associé au faisceau d'idéaux $\mathcal{C}$. Le schéma Y est supporté en un seul point P_∞, le seul point non régulier de $\widehat{C}_{k'}$ et l'on a par construction une immersion fermée $Y \to \widehat{C}_{k'}$. Enfin Y' est le produit fibré $Y \times_{\widehat{C}_{k'}} \mathbb{P}^1_{k'}$.

On note A l'image de φ dans $k'[t]$, alors A est la sous-k'-algèbre de $k'[t]$ engendrée par $\{1, Q, t^{p^n}\}$, l'on note $\mathfrak{C}$ le conducteur de A dans $k'[t]$, i.e.

$$\mathfrak{C} = \left\{P \in k'[t] \mid P.k'[t] \subset A\right\}.$$

Avec ces notations, on a explicitement $Y = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{C})$ et $Y' = \mathrm{Spec}(k'[t]/\mathfrak{C})$.

On va chercher à calculer le conducteur $\mathfrak{C}$; pour cela on va étudier la k'-algèbre A engendrée par $\{1, Q, t^{p^n}\}$.

Lemme 5.1.2. *Soit B la k'-algèbre engendrée par $\{t^{p^n}, t^{p^{2N-1}-p^{n-1}}, \ldots, t^{p^{2N-1}-1}\}$.*

(i) Soit $a \in \mathbb{N}$, alors a s'écrit de façon unique $a = qp^n + r$ avec $q \in \mathbb{N}$, $-p^n < r \leqslant 0$. De plus on peut décomposer r en base p, $r = -\sum_{k=0}^{n-1} r_k p^k$ où $0 \leqslant r_k < p-1$. On peut donc écrire $a = qp^n - \sum_{k=0}^{n-1} r_k p^k$. Avec ces notations :

$$t^a \in B \Leftrightarrow q \geqslant p^{2N-n-1} \sum_{k=0}^{n-1} r_k.$$

(ii) Le conducteur de B dans $k'[t]$ est (t^R) où $R = np^{2N} - np^{2N-1} - 2p^N + 2$.

(iii) Soit $a \in [\![0; R-1]\!]$, $t^a \in B \Leftrightarrow t^{R-a-1} \notin B$.

Démonstration. (i) Si $q \geqslant p^{2N-n-1} \sum_{k=0}^{n-1} r_k$ alors

$$t^a = t^{p^n\left(q - p^{2N-n-1}\sum_{k=0}^{n-1} r_k\right)} \prod_{k=0}^{n-1} \left(t^{p^{2N-1}-p^k}\right)^{r_k}$$

donc $t^a \in B$.

Réciproquement, si $t^a \in B$ alors

$$t^a = t^{bp^n} \prod_{k=0}^{n-1} \left(t^{p^{2N-1}-p^k}\right)^{r_k}$$

où b et les r_k sont des entiers naturels.

Montrons que l'on peut supposer que tous les r_k sont strictement inférieurs à p. Si $\{r_0, \ldots, r_{k-1}\}$ sont strictement inférieurs à p et $r_k \geqslant p$ alors on écrit $r_k = sp + r'_k$ la division euclidienne de r_k par p. Si $k < n-1$, alors on remarque que

$$t^{p\left(p^{2N-1}-p^k\right)} = t^{p^n\left(p^{2N-n}-p^{2N-n-1}\right)} t^{p^{2N-1}-p^{k+1}}.$$

On pose $r'_i = r_i$ pour $i \notin \{k, k+1\}$. De plus on pose $r'_{k+1} = r_{k+1} + s$ et $b' = b + s(p^{2N-n} - p^{2N-n-1})$. On a toujours

$$t^a = t^{b'p^n} \prod_{k=0}^{n-1} \left(t^{p^{2N-1}-p^k}\right)^{r'_k}.$$

On s'est donc ramené au cas où pour tout $i \leqslant k$ on a $r'_i < p$. Sinon $k = n-1$ et on remarque que $t^{p\left(p^{2N-1}-p^{n-1}\right)} = t^{p^n\left(p^{2N-1-n}-1\right)}$. On pose $r'_i = r_i$ pour $i \neq n-1$ et $b' = b + s(p^{2N-1-n} - 1)$. On a toujours

$$t^a = t^{b'p^n} \prod_{k=0}^{n-1} \left(t^{p^{2N-1}-p^k}\right)^{r'_k}.$$

On se ramène donc au cas où pour tout $i < n$ on a $r'_i < p$.

On a donc obtenu $t^a = t^{bp^n} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \left(t^{p^{2N-1}-p^k}\right)^{r_k}$ avec $0 \leqslant r_k < p$, alors

$$a = bp^n + \sum_{k=0}^{n-1} r_k \left(p^{2N-1} - p^k\right) = \underbrace{\left(b + p^{2N-n-1} \sum_{k=0}^{n-1} r_k\right)}_{=q} p^n - \sum_{k=0}^{n-1} r_k p^k.$$

On a donc bien $q \geqslant p^{2N-n-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} r_k$.

(ii) Pour calculer le conducteur de B on va utiliser le résultat du (i). En effet, on remarque que le plus grand $a_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t^{a_0} \notin B$ est :

$$\begin{aligned} a_0 = &\left(p^{2N-n-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (p-1)\right] - 1\right) p^n - \sum_{k=0}^{n-1} (p-1)p^k \\ &= n(p-1)p^{2N-1} - p^n - (p^n - 1) = np^{2N} - np^{2N-1} - 2p^n + 1 \end{aligned}$$

donc pour tout $a \geqslant a_0 + 1 = np^{2N} - np^{2N-1} - 2p^n + 2 = R$, $t^a \in B$.

(iii) Soit $a \in [\![0; R-1]\!]$, $a = qp^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} p^k r_k$, alors $t^a \in B \Leftrightarrow q \geqslant p^{2N-n-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} r_k$.

$$\begin{aligned} R - 1 - a &= \left(p^{2N-n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} p - 1\right) - 1\right) p^n - \sum_{k=0}^{n-1} p^k (p-1) - qp^n + \sum_{k=0}^{n-1} p^k r_k \\ &= \left(p^{2N-n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} p - 1\right) - 1 - q\right) p^n - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left(p - 1 - r_k\right). \end{aligned}$$

On remarque que $0 \leqslant r_k < p \Leftrightarrow p-1 \geqslant p-1-r_k > -1 \Leftrightarrow p > p-1-r_k \geqslant 0$.

De plus

$$\begin{aligned}
q &\geqslant p^{2N-n-1}\sum_{k=0}^{n-1} r_k \\
\Leftrightarrow -q &\leqslant -p^{2N-n-1}\sum_{k=0}^{n-1} r_k \\
\Leftrightarrow p^{2N-n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} p-1\right) - q - 1 &\leqslant -p^{2N-n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} r_k\right) - 1 + p^{2N-n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(p-1) \\
\Leftrightarrow p^{2N-n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} p-1\right) - q - 1 &\leqslant p^{2N-n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(p-1-r_k)\right) - 1 \\
\Leftrightarrow p^{2N-n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} p-1\right) - q - 1 &< p^{2N-n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(p-1-r_k)\right)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
t^a \in B &\Leftrightarrow q \geqslant p^{2N-n-1}\sum_{k=0}^{n-1} r_k \\
&\Leftrightarrow p^{2N-n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} p-1\right) - q - 1 < p^{2N-n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(p-1-r_k)\right) \\
&\Leftrightarrow t^{R-1-a} \notin B.
\end{aligned}$$

□

Remarque 5.1.3. Avec les notations du lemme 5.1.2, le conducteur de B dans $k'[t]$ est donc (t^R). Or, on a l'inclusion $B \subset A$ donc $(t^{R'})$, le conducteur de A dans $k'[t]$, contient (t^R). On a donc une inégalité $R' \leqslant np^{2N} - np^{2N-1} - 2p^N + 2$.

L'étude du genre arithmétique faite dans la section 3.4 donne donc une meilleure majoration de la dimension de la Jacobienne de C.

Maintenant revenons au diagramme (5.1.3) : par construction il est cartésien, en fait selon la scolie [Fer03, 4.3] le diagramme est aussi cocartésien. Il vérifie donc les hypothèses du théorème 4.3.4, on obtient la suite exacte de k'-groupes localement algébriques :

$$0 \to \mu^{Y/Y'} \to \mathrm{Pic}_{\widehat{C}_{k'}/k'} \xrightarrow{f^*} \mathrm{Pic}_{\mathbb{P}^1_{k'}/k'} \to 0.$$

Le k'-groupe algébrique $\mu^{Y/Y'}$ est unipotent et k'-déployé (lemme 4.3.2). De plus $\mathrm{Pic}^0_{\mathbb{P}^1_{k'}/k'}$ est trivial. On obtient donc un isomorphisme de k'-groupes algébriques :

$$\mathrm{Pic}^0_{\widehat{C}_{k'}/k'} \cong \mu^{Y/Y'}.$$

Et pour toute extension K/k', cet isomorphisme induit un isomorphisme de points K-rationnels :

$$\mathrm{Pic}^0_{\widehat{C}_{k'}/k'}(K) \cong \mu^{Y/Y'}(K) = \frac{\left(\frac{K[t]}{\mathfrak{C}_K}\right)^*}{\left(\frac{A_K}{\mathfrak{C}_K}\right)^*}. \tag{5.1.4}$$

L'égalité dans l'équation (5.1.4) vient du fait que la suite (4.3.9) induit une suite exacte sur les B-points pour toute k'-algèbre artinienne B.

Remarque 5.1.4. Le groupe $\mu^{Y/Y'}(\overline{k})$ est de p^n-torsion, en effet si $P \in \overline{k}[t]$, P^{p^n} est un polynôme en t^{p^n} donc $P^{p^n} \in A_{\overline{k}}$. Donc le groupe algébrique $\mu^{Y/Y'}$ est de p^n-torsion.

On a donc montré le résultat suivant.

Proposition 5.1.5. *Le groupe algébrique* $\operatorname{Pic}^0_{\widehat{C}_{k'}/k'}$ *est unipotent k'-déployé de $p^{n(G)}$-torsion.*

Le lemme suivant explicite la structure des K-points de $\mu^{Y/Y'}$. Par contre dans la forme ci-dessous la multiplication n'est pas la multiplication terme à terme.

Lemme 5.1.6. *On note $E = \{k \in [\![1; R'-1]\!] \mid t^k \notin A_K\}$, tous les éléments de $\mu^{Y/Y'}(K)$ s'écrivent de façon unique $1 + \sum_{i \in E} a_i t^i$ où $a_i \in K$.*

Démonstration. Soit $Q \in \left(\frac{K[t]}{(t^{R'})}\right)^*$, alors Q s'écrit de façon unique $\sum_{i=0}^{R'-1} a_i t^i$ avec $a_0 \neq 0$.

On note $S = [\![1; R'-1]\!] \setminus E$, soit $P \in \left(\frac{A_K}{(t^{R'})}\right)^*$, alors P s'écrit $b_0 + \sum_{i \in S} b_i t^i$ avec $b_0 \neq 0$.

Sans perte de généralité on peut se restreindre au cas où $a_0 = b_0 = 1$.

Alors,

$$QP = 1 + \sum_{k=1}^{R'-1} t^k \left(a_k + b_k \delta_{k \in S} + \sum_{\substack{c+d=k \\ d \in S,\ c \geqslant 1}} a_c b_d \right)$$

où $\delta_{k \in S}$ est le symbole de Kronecker, il vaut 1 si $k \in S$, sinon $\delta_{k \in S} = 0$.

Soit $k \in S$, imposer que $a_k + b_k \delta_{k \in S} + \sum_{\substack{c+d=k \\ d \in S,\ c \geqslant 1}} a_c b_d = 0$ revient donc à imposer

$$b_k = -a_k - \sum_{\substack{c+d=k \\ d \in S,\ c \geqslant 1}} a_c b_d.$$

Par récurrence, il existe un unique $P \in \left(\frac{A_K}{(t^{R'})}\right)^*$ tel que QP est de la forme $1 + \sum_{i \in E} c_i t^i$, de plus c_i est un polynôme en a_j pour $j \leqslant i$. □

5.1.2 Torsion de $\operatorname{Pic}^0_{C/k}$

Dans cette sous-section, on considère une forme G de $\mathbb{G}_{a,k}$ et la complétion régulière C de G. On va appliquer la proposition 5.1.5 à l'étude de $\operatorname{Pic}^0_{C/k}$.

Proposition 5.1.7. *Soit G une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$, on note C la complétion régulière de G.*

Alors $\operatorname{Pic}^0_{C/k}$ est un k-groupe algébrique unipotent commutatif de $p^{n(G)}$-torsion.

Démonstration. Le foncteur de Picard $\operatorname{Pic}_{C/k}$ est représenté par un schéma localement de type fini sur k (théorème 4.1.8), qui est lisse (proposition 4.1.15). Donc $\operatorname{Pic}^0_{C/k}$ est un k-groupe algébrique commutatif [DG70, II §5 Thm. 1.1].

On note $\widehat{C}$ la complétion "naïve" de G que l'on a déjà considéré dans la sous-section 5.1.1. Alors $\widehat{C}$ est définie par l'équation (5.1.1). On peut alors considérer la normalisation $f : C \to \widehat{C}$ de $\widehat{C}$ et le conducteur $\mathcal{C}$ de $\mathcal{O}_{\widehat{C}}$ dans $\mathcal{O}_C$ i.e. le faisceau défini par

$$\mathcal{C}(U) = \left\{ a \in \mathcal{O}_C\left(f^{-1}(U)\right) \mid a.\mathcal{O}_C\left(f^{-1}(U)\right) \subset \mathcal{O}_{\widehat{C}}(U) \right\}.$$

On remarque que l'on peut voir $\mathcal{C}$ comme un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\widehat{C}}$ ce qui nous permet de définir Y' comme le sous-schéma fermé de C associé à $\mathcal{C}$, et Y comme le produit fibré $Y' \times_{\widehat{C}} C$. On obtient un carré cocartésien de schémas

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

qui vérifie les hypothèses du théorème 4.3.4. On en déduit une suite exacte de k-groupes algébriques :

$$0 \to \mu^{Y/Y'} \to \mathrm{Pic}^0_{\widehat{C}/k} \xrightarrow{f^*} \mathrm{Pic}^0_{C/k} \to 0.$$

Selon la proposition 5.1.5 le k'-groupe algébrique $\mathrm{Pic}^0_{\widehat{C}_{k'}/k'}$ est unipotent déployé de $p^{n(G)}$-torsion, selon [Kle05, 4.4] on a un isomorphisme de k'-groupes localement algébriques

$$\mathrm{Pic}_{\widehat{C}_{k'}/k'} \cong \mathrm{Pic}_{\widehat{C}/k} \times_k \mathrm{Spec}(k').$$

Le k-groupe algébrique $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est donc unipotent de $p^{n(G)}$-torsion (car ses points sur $\overline{k}$ sont de $p^{n(G)}$-torsion). De plus $\mu^{Y/Y'}$ est déployé sur $\kappa(P_\infty)$ donc sur k', donc $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est aussi déployé sur k'. □

5.2 Foncteur de Picard de la complétion régulière des formes de $\mathbb{A}^1_k$

5.2.1 Torsion du foncteur de Picard d'une forme de la droite affine

Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$, on note C la complétion régulière de X. Soit K un corps tel que la complétion régulière de X_K est $\mathbb{P}^1_K$ (par exemple $K = k'$ ou $K = k^{p^{-n'(X)}}$, $n'(X)$ étant l'entier défini en 3.1.3). Le courbe C_K obtenue par changement de base n'est pas nécessairement normale, mais la normalisation de C_K est $\mathbb{P}^1_K$ car c'est la complétion régulière de X_K, et la complétion régulière est unique modulo un unique isomorphisme. Soit $\pi : \mathbb{P}^1_K \to C_K$ la normalisation. Suivant [Fer03], on va montrer que C_K est obtenu à partir de $\mathbb{P}^1_K$ via "pincement".

Soit $\mathcal{C}$ le conducteur de $\mathcal{O}_{C_K}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}$, i.e. le faisceau d'idéaux de $\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}$ donné par

$$\mathcal{C}(U) = \left\{ a \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(\pi^{-1}(U)) \mid a.\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(\pi^{-1}(U)) \subset \mathcal{O}_{C_K}(U) \right\}$$

pour tout ouvert U de C_K.

Alors $\mathcal{C}$ est aussi un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{C_K}$. On note Y^K le sous-schéma fermé de C_K défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{C}$. Alors C_K est régulière en dehors de P_∞, donc π induit un isomorphisme entre $C_K \setminus P_\infty$ et $\mathbb{P}^1_K \setminus \infty$ (où P_∞ est l'unique point de $C_K \setminus X_K$, et ∞ est l'unique point de $\mathbb{P}^1_K$ au dessus de P_∞). Donc en temps qu'ensemble, Y^K est le point P_∞ et par construction, il y a une immersion fermée $Y^K \to C_K$. Enfin, on note Z^K le produit fibré $Y^K \times_{C_K} \mathbb{P}^1_K$.

On obtient un diagramme commutatif de K-variétés :

$$\begin{tikzcd} Z^K \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}^1_K \arrow[d, "\pi"] \\ Y^K \arrow[r] & C_K. \end{tikzcd} \tag{5.2.1}$$

Par construction, le diagramme (5.2.1) est cartésien, en fait selon la scolie [Fer03, 4.3] le diagramme est aussi cocartésien.

Tout d'abord, on va expliciter Y^K et Z^K. Le morphisme π induit un morphisme d'anneaux locaux $\pi^{\#}_{P_\infty} : \mathcal{O}_{C_K,P_\infty} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K,\infty}$ qui est la normalisation. On note $\mathfrak{C}$ le conducteur de $\mathcal{O}_{C_K,P_\infty}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K,\infty}$, i.e.

$$\mathfrak{C} = \left\{ x \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K,\infty} \mid x.\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K,\infty} \subset \mathcal{O}_{C_K,P_\infty} \right\} = \mathcal{C}_{P_\infty}.$$

On a alors explicitement $Z^K = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K,\infty}/\mathfrak{C})$ and $Y^K = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{C_K,P_\infty}/\mathfrak{C})$.

Par construction, le diagramme cocartésien (5.2.1) satisfait les hypothèses du théorème 4.4.4. Ainsi, on a une suite exacte de K-groupes localement algébriques :

$$0 \to \mu^{Z^K/Y^K} \to \mathrm{Pic}_{C_K/K} \to \mathrm{Pic}_{\mathbb{P}^1_K/K} \to 0.$$

La composante neutre de $\mathrm{Pic}_{\mathbb{P}^1_K/K}$ est triviale, et μ^{Z^K/Y^K} est connexe. On a donc un isomorphisme de K-groupes algébriques :

$$\mathrm{Pic}^0_{C_K/K} \cong \mu^{Z^K/Y^K}.$$

Remarque 5.2.1. Si $K = k'$, alors selon le lemme 4.3.2, le k'-groupe algébrique μ^{Z^K/Y^K} est unipotent et déployé, donc $\mathrm{Pic}^0_{C_{k'}/k'}$ est un k'-groupe algébrique unipotent et déployé.

Si on regarde les points sur $\overline{k}$, on obtient l'isomorphisme suivant :

$$\mathrm{Pic}^0_{C_K/K}(\overline{k}) \cong \mu^{Z^K/Y^K}(\overline{k}) = \frac{\mu^{Z^K}(\overline{k})}{\mu^{Y^K}(\overline{k})} = \frac{\left(\overline{k} \otimes_k \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K,\infty}}{\mathfrak{C}}\right)^*}{\left(\overline{k} \otimes_k \frac{\mathcal{O}_{C_K,P_\infty}}{\mathfrak{C}}\right)^*}. \tag{5.2.2}$$

Lemme 5.2.2. *Si $K = k^{p^{-n'(X)}}$, alors le K-groupe algébrique μ^{Z^K/Y^K} est de $p^{n'(X)}$-torsion.*

Démonstration. μ^{Z^K/Y^K} est un K-groupe algébrique, on va donc se contenter de montrer que le groupe des points $\overline{k}$-rationnels $\mu^{Z^K/Y^K}(\overline{k})$ est de $p^{n'(X)}$-torsion.

Soit n un entier positif, alors $\kappa\left(X^{(p^n)}\right) = k \otimes_k \kappa(X)$ (où k est vue comme une k-algèbre via φ^n_k). Par définition de C, on a $\kappa(X) = \kappa(C)$. On choisit $n = n'(X)$; alors $\kappa\left(X^{(p^n)}\right) = \kappa(\mathbb{P}^1_K)$. Ainsi, $\kappa\left(\mathbb{P}^1_K\right) = k \otimes_k \kappa(C)$. Avec cette identification, l'image de

$$\varphi^n_{\kappa(\mathbb{P}^1_K)} : x \in \kappa\left(\mathbb{P}^1_K\right) \mapsto x^{p^n} \in \kappa\left(\mathbb{P}^1_K\right)$$

est contenue dans $\kappa(C)$.

L'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K,\infty}$ est définie par la valuation mult_∞ de $\kappa\left(\mathbb{P}^1_K\right)$, et mult_∞ est une extension de la valuation mult_{P_∞} sur $\kappa(C)$. Si $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K,\infty}$, alors $x^{p^n} \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K,\infty}$; et on a vu que $x^{p^n} \in \kappa(C)$, donc $x^{p^n} \in \mathcal{O}_{C,P_\infty} \subset \mathcal{O}_{C_K,P_\infty}$.

Donc, selon l'équation (5.2.2) $\mu^{Z^K/Y^K}(\overline{k})$ est de $p^{n'(X)}$-torsion. □

Pour conclure, on a obtenu les résultats suivants :

Proposition 5.2.3. *Le k-groupe algébrique $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est unipotent de $p^{n'(X)}$-torsion, et $\mathrm{Pic}^0_{C_{k'}/k'}$ est k'-déployé.*

5.2.2 Application au foncteur de Picard de la complétion régulière

Théorème 5.2.4. *Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$, soit C la complétion régulière de X.*

Alors $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est un groupe algébrique unipotent, commutatif de $p^{n'(X)}$-torsion, k-ployé et déployé sur k'.

De plus, si X est un G-torseur où G est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$, alors

$$\dim \mathrm{Pic}^0_{C/k} \leqslant \frac{(p^{\min(n,m)}-1)(p^{\max(n,m)}-2)}{2},$$

où $n = n(G)$ et m sont les plus petit entiers tel que G est définie par une équation de la forme $y^{p^n} = x + a_1x^p + \cdots + a_mx^{p^m}$.

Et si X est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ avec $p > 2$, alors k' est le plus petit corps sur lequel $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est déployé.

Démonstration. L'assertion sur la torsion et le fait que $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est unipotent et déployé sur k' sont des conséquences directes de la Proposition 5.2.3. Selon la proposition 4.1.15 $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est lisse et selon le théorème 4.1.14 $\dim \mathrm{Pic}_{C/k} = \dim_k \mathrm{H}^1(C, \mathcal{O}_C) = p_a(C)$. La variété C est normale et géométriquement intègre, donc selon [BLR90, Pro. 9.2.4] et la proposition 2.5.2 le k-groupe algébrique unipotent $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est k-ployé.

Dans le cas où X est un G-torseur où G est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$, l'assertion sur la dimension de $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est une conséquence directe du théorème 3.4.3, du fait que C_{k_s} est régulière [EGAIV2, Cor. 6.14.2] et de l'invariance du genre arithmétique par extension de corps.

On va maintenant montrer la dernière assertion. Soit K un corps tel que $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est K-déployé, ou de façon équivalente $\mathrm{Pic}^0_{C_K/K}$ est K-déployé. Tout d'abord si C_K est normale, alors le K-groupe algébrique unipotent $\mathrm{Pic}^0_{C_K/K}$ est K-ployé, il est donc trivial. Donc X est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$ et $k' = k$ (lemme 3.3.5). Sinon, on note $g : C^K \to C_K$ la normalisation de C_K. On va faire la même construction, basée sur le conducteur, que dans la sous-section 5.2.1. Soit $\mathcal{C}$ le conducteur de $\mathcal{O}_{C_K}$ dans $\mathcal{O}_{C^K}$ i.e. le faisceau défini par :

$$\mathcal{C}(U) = \left\{a \in \mathcal{O}_{C^K}\left(g^{-1}(U)\right) \mid a.\mathcal{O}_{C^K}\left(g^{-1}(U)\right) \subset \mathcal{O}_{C_K}(U)\right\}.$$

Alors $\mathcal{C}$ est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{C_K}$, et de $\mathcal{O}_{C^K}$. On note Y^K le sous-schéma fermé de C_K définie par $\mathcal{C}$, et on note Z^K le produit fibré $Y^K \times_{C_K} C^K$. Alors on a un carré cocartésien de K-variétés :

$$\begin{tikzcd} Z^K \arrow[r] \arrow[d] & C^K \arrow[d, "g"] \\ Y^K \arrow[r] & C_K \end{tikzcd}$$

qui satisfait les hypothèses du théorème 4.4.4. Donc on a une suite exacte de K-groupes algébriques.

$$0 \to \mu^{Z^K/Y^K} \to \mathrm{Pic}^0_{C_K/K} \to \mathrm{Pic}^0_{C^K/K} \to 0.$$

Alors, $\mathrm{Pic}^0_{C^K/K}$ est un groupe algébrique non trivial K-ployé [BLR90, Pro. 9.2.4]. Tout morphisme d'un k-groupe algébrique unipotent k-déployé dans un k-groupe algébrique unipotent k-ployé est trivial (théorème 2.6.1). Donc $\mathrm{Pic}^0_{C^K/K}$ est trivial, or c'est le cas si et seulement si le genre de C^K est 0, et donc si et seulement si $C^K \cong \mathbb{P}^1_K$, donc si et seulement si $X_K \cong \mathbb{A}^1_K$ (lemme 3.3.5). Or, k' est l'unique extension minimale de k tel que $X_{k'} \cong \mathbb{A}^1_{k'}$ [Rus70, Lem. 1.1]. □

Exemple 5.2.5. On considère $k = \mathbb{F}_3(t)$, et G la forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie comme sous-groupe de $\mathbb{G}_{a,k}^2$ par l'équation $y^3 = x + ax^3$ où $a \in k \setminus k^3$. On note C la complétion régulière de G.

Alors, il y a une immersion fermée $G \to \mathrm{Pic}^0_{C/k}$ [KMT74, Thm. 6.7.9]. Et $\dim \mathrm{Pic}_{C/k} = 1$, donc $G \cong \mathrm{Pic}^0_{C/k}$.

Si $a = t$, alors $G(k) = \{0\}$, donc $\mathrm{Pic}(G) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Soit n un entier, on pose $q = p^n$ et l'on considère

$$a = t + t^{q+2} + t^{2q+3} + \cdots + t^{(p-2)q+p-1}.$$

Alors $G(k)$ est un ensemble fini dont le cardinal est plus grand que $p^{2^n/2n}$ [AV96, Thm. 4.1]. Donc $\mathrm{Pic}(G)$ est un groupe fini (comme extension de deux groupes finis, voir la suite (3.5.3)) de cardinal aussi grand que voulu.

Remarque 5.2.6. Si k est le corps des fonctions d'une courbe projective, lisse, géométriquement intègre définie sur un corps fini, alors je ne connais pas d'exemple de forme de $\mathbb{A}^1_k$, dont le groupe de Picard est infini.

5.3 $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ et $(\mathrm{Pic}_{C/k}, Y)$

Dans cette section, on considère une forme X de $\mathbb{A}^1_k$ et la complétion régulière C de X.

Un invariant géométrique de X est le foncteur de Picard rigidifié $(\mathrm{Pic}_{C/k}, Y)$ où $Y \subset C$ est un rigidificateur de $\mathrm{Pic}_{C/k}$. Selon le lemme 4.4.3, le foncteur de Picard rigidifié $(\mathrm{Pic}_{C/k}, Y)$ a la particularité d'être “invariant par carré cocartésien”. C'est-à-dire si

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"] & X' \end{tikzcd}$$

est un carré cocartésien qui vérifie les hypothèse du lemme 4.4.3, alors on a un isomorphisme $(\mathrm{Pic}_{X'/k}, Y') \cong (\mathrm{Pic}_{C/k}, Y)$.

On a aussi selon la remarque 4.4.1 une suite exacte de k-groupes algébriques

$$0 \to \mu^Y/\mu^C \to (\mathrm{Pic}_{C/k}, Y)^0 \to \mathrm{Pic}^0_{C/k} \to 0. \tag{5.3.1}$$

Proposition 5.3.1. *Si $Y = \mathrm{Spec}(\kappa(P_\infty))$, alors Y est un rigidificateur de C et $(\mathrm{Pic}_{C/k}, Y)^0$ est un k-groupe algébrique unipotent k-ployé qui est déployé sur k'.*

Démonstration. Le groupe μ^C est isomorphe à $\mathbb{G}_m$, donc $\mu^Y/\mu^C \cong \mu^{\kappa(P_\infty)/k}$ est un k-groupe algébrique unipotent ployé selon la remarque 4.3.3, il se déploie sur $\kappa(P_\infty) \subset k'$. Le groupe $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est selon le théorème 5.2.4 unipotent k-ployé et se déploie sur k'. Le groupe $(\mathrm{Pic}_{C/k}, Y)^0$ est donc une extension de deux groupes unipotents ployés, il est donc k-ployé [Oes84, V.3.5]. □

Chapitre 6

Torseurs sur une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ et groupe de Picard de groupes unipotents

Les k-groupes algébriques unipotents connexes sont (de façon non canonique) des torseurs sous une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ (proposition 2.6.5). Une autre façon d'aborder le problème du groupe de Picard des groupes unipotents connexes est donc d'étudier les torseurs sous une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ et leurs groupes de Picard.

Dans ce chapitre, on va tout d'abord faire des rappels sur les torseurs et sur les faisceaux linéarisés (section 6.1), ensuite on va présenter un outil important : le fibré associé (définition 6.1.5). Dans la section 6.2, on étudie les torseurs sous une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ et leur fibré associé. Dans la section 6.3, on va utiliser le fibré associé pour construire une complétion régulière d'un k-groupe algébrique unipotent connexe de dimension 2. Dans la section 6.4, on va utiliser une suite exacte de groupes de Picard de torseurs pour obtenir une majoration sur la torsion du groupe de Picard des groupes algébriques unipotents connexes. Enfin dans la section 6.5, on détermine explicitement le groupe de Picard d'une famille de groupes unipotents unirationnels.

6.1 Torseurs et linéarisations

Soit S un schéma, dans cette section tous les schémas sont des schémas sur S et les morphismes sont des S-morphismes. Soit G un schéma en groupe sur S, on note $\mu : G \times_S G \to G$ la multiplication et $e : S \to G$ l'unité.

Définition 6.1.1. Soit X un S-schéma, une action de G sur X est un S-morphisme, $a : X \times_S G \to X$ tel que pour tout S-schéma T, l'application induite

$$a(T) : X(T) \times G(T) \to X(T)$$

est une action du groupe $G(T)$ sur l'ensemble $X(T)$.

De façon équivalente, les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S X \arrow[r, "\mu \times Id_X"] \arrow[d, "Id_G \times a"'] & G \times_S X \arrow[d, "a"] \\ G \times_S X \arrow[r, "a"] & X \end{tikzcd}$$

(i.e. a est associative), et

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e\times Id_X"] \arrow[dr, "Id_X"'] & G \times_S X \arrow[d, "a"] \\ & X \end{tikzcd}$$

(i.e. e agit via l'identité).

Un schéma X muni d'une action de G est dit un G-schéma.

Définition 6.1.2. Soit X et Y deux G-schémas, on note a et b les actions de G. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On dit que f est G-équivariant si le diagramme

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "Id_G \times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G \times_S Y \arrow[r, "b"] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Si Y est muni de l'action triviale de G (i.e. si $b : G \times_k Y \to Y$ est la seconde projection) alors f est dit G-invariant.

Dans toute la suite on suppose que G est plat et de type fini sur S. C'est en particulier le cas si $S = \mathrm{Spec}(k)$ et G est un k-groupe algébrique. C'est aussi le cas pour le S-schéma en groupes $G = G' \times_{S'} S$ où G' est un S'-schéma en groupes plat de type fini et $S \to S'$ est un morphisme de schémas.

Définition 6.1.3. Soit X et Y deux G-schémas. Un morphisme de schémas $f : X \to Y$, est dit un G-torseur (ou un G-fibré principal homogène) s'il vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) f est G-invariant,

(ii) f est fidèlement plat et quasi-compact,

(iii) On a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

Remarque 6.1.4. Dans les remarques suivantes on utilise plusieurs fois des propriétés de descente fpqc rassemblées dans la proposition [EGAIV2, 2.7.1].

(i) Si $f : X \to Y$ est un G-torseur alors la topologie de Y est le quotient de la topologie de X par la relation d'équivalence définie par f [EGAIV2, Cor. 2.3.12].

(ii) Mieux, si $f : X \to Y$ est un G-torseur alors c'est un quotient géométrique au sens de [MFK94, Déf. 0.6], selon la proposition [MFK94, 0.1] c'est donc aussi un quotient catégorique (définition [MFK94, 0.5]).

(iii) La projection $p_2 : G \times_S Y \to Y$ est un G-torseur, un tel G-torseur est dit trivial.

(iv) Soient $f : X \to Y$ un G-torseur et $g : Y' \to Y$ un morphisme. Le morphisme $f' : X \times_Y Y' \to Y'$ (où G agit sur $X \times_Y Y'$ via l'action de G sur X) est aussi un G-torseur, il est dit tiré en arrière de f par g.

(v) Un morphisme G-invariant $f : X \to Y$ est un G-torseur si et seulement si il existe un morphisme fidèlement plat et quasi-compact $g : Y' \to Y$ tel que le tiré en arrière $f' : X \times_Y Y' \to Y'$ est le torseur trivial.

Définition 6.1.5. Soit $f : X \to Y$ un G-torseur et Z un G-schéma. Le fibré associé est un G-schéma $X \times^G Z$ muni d'un morphisme G-invariant $f' : X \times_S Z \to X \times^G Z$ et d'un morphisme $\psi : X \times^G Z \to Y$ tels que le carré

$$\begin{tikzcd} X \times_S Z \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \times^G Z \arrow[r, "\psi"] & Y \end{tikzcd} \tag{6.1.1}$$

est cartésien.

Remarque 6.1.6. Avec les notations de la définition ci-dessus :

(i) Le carré (6.1.1) est cartésien, donc f' est un G-torseur, c'est le tiré en arrière du G-torseur f par ψ.

(ii) Le triplet $(X \times^G Z, f', \psi)$ est uniquement déterminé par f et Z.

(iii) Si $S = \mathrm{Spec}(k)$, alors en chaque point $\overline{k}$-rationnel de Y, la fibre géométrique de ψ est isomorphe à $Z_{\overline{k}}$ car c'est le cas après changement de base par le morphisme fpqc f.

(iv) En général le fibré associé n'existe pas, mais nous allons montrer avec la proposition 6.1.12 qu'il existe sous des hypothèses assez faibles.

Définition 6.1.7. On considère un G-schéma X et un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X. On note $a : G \times_S X \to X$ l'action de G sur X, et $p_2 : G \times_S X \to X$ la seconde projection. Une G-linéarisation du faisceau $\mathcal{L}$ est un isomorphisme

$$\Phi : a^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} p_2^*\mathcal{L},$$

tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} (a \circ (Id_G \times a))^* \mathcal{L} \arrow[rr, "(Id_G \times a)^*\Phi"] \arrow[dd, equal] & & (p_2 \circ (Id_G \times a))^* \mathcal{L} \arrow[dl, equal] \\ & (a \circ p_{23})^* \mathcal{L} \arrow[r, "p_{23}^*\Phi"] & (p_2 \circ p_{23})^* \mathcal{L} \arrow[d, equal] \\ (a \circ (\mu \times Id_X))^* \mathcal{L} \arrow[rr, "(\mu \times Id_X)^*\Phi"] & & (p_2 \circ (\mu \times Id_X))^* \mathcal{L} \end{tikzcd} \tag{6.1.2}$$

où $p_{23} : G \times_S G \times_S X \to G \times_S X$.

Remarque 6.1.8. (i) Soient $S = \mathrm{Spec}(k)$ où k est un corps algébriquement clos, X est une k-variété réduite et G un k-groupe algébrique. Si $\pi : L \to X$ un fibré en droite, alors une G-linéarisation de L est une action de G sur L tel que π soit équivariant et l'action induite sur les fibres $L_x \to L_{g.x}$ (où $x \in X(k)$, $g \in G(k)$) est linéaire. Ce qui justifie la terminologie.

(ii) Pour simplifier on écrit la relation de co-cycle (6.1.2) de la façon suivante :

$$(\mu \times Id_X)^*\Phi = p_{23}^*\Phi \circ (Id_G \times a)^*\Phi.$$

(iii) Le produit tensoriel de deux faisceaux cohérents G-linéarisés est un faisceau cohérent G-linéarisé. De même le dual d'un faisceau cohérent G-linéarisé est un faisceau cohérent G-linéarisé.

Définition 6.1.9. On note $\mathrm{Pic}_G(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes des faisceaux inversibles G-linéarisés muni de la structure de groupe commutatif induite par le produit tensoriel.

Lemme 6.1.10. *Si $f : X \to Y$ un G-torseur, alors $f^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}_G(X)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Tout d'abord, f est un G-torseur, donc en particulier f est G-invariant, donc le tiré en arrière par f de tout faisceau inversible sur Y est muni d'une G-linéarisation.

Réciproquement, soit $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}_G(X)$, la G-linéarisation de $\mathcal{L}$ induit une donnée de descente, la relation de co-cycle étant exactement la relation (6.1.2). Donc $\mathcal{L}$ est l'image par f^* d'un unique élément de $\mathrm{Pic}(Y)$ [BLR90, Thm. 6.1.4]. □

Définition 6.1.11. On considère deux S-schémas X et X' et un morphisme quasi-compact $\varphi : X' \to X$. Un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X' est dit φ-ample si pour tout ouvert affine V de X, le tiré en arrière de $\mathcal{L}$ sur $\varphi^{-1}(V)$ est ample.

Proposition 6.1.12. *[MFK94, 7.1]*

Soient G un S-schéma en groupes plat de type fini, X' et X deux G-schémas de type fini et Y un G-schéma. On suppose que

(i) $f : X \to Y$ un G-torseur ;

(ii) $\varphi : X' \to X$ est un morphisme quasi-compact G-équivariant ;

(iii) X' est muni d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ qui est φ-ample et G-linéarisé.

Alors il existe un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "\psi"] & Y \end{tikzcd}$$

où Y' est un S-schéma, ψ est de type fini, et f' est un G-torseur. De plus il existe un faisceau inversible $\mathcal{M}$ qui est ψ-ample sur Y' et qui vérifie $\mathcal{L} = f'^*(\mathcal{M})$.

De plus, si S est un schéma quasi-compact et Y est S-quasi-projectif, alors Y' est aussi S-quasi-projectif.

Démonstration. On note a l'action de G sur X et a' l'action de G sur X'.

Montrons que X' vu comme un X-schéma via f est muni d'une donnée de descente pour le morphisme fidèlement plat et quasi-compact $f : X \to Y$. On peut voir $G \times_S X'$ comme le produit fibré au dessus de X de $G \times_S X$ et X' où $G \times_S X$ est vu comme un X-schéma via a et p_2. Le G-torseur f induit un isomorphisme $X \times_Y X \cong G \times_S X$ qui identifie $p_2 : X \times_Y X \to X$ et a. On obtient donc un isomorphisme

$$\Phi : (X \times_Y X) \times_X X' \xrightarrow{\sim} (X \times_Y X) \times_X X'$$

où $X \times_Y X$ est vu comme X-schéma via la première projection au départ et via la seconde projection à l'arrivée. Pour montrer que Φ constitue une donnée de descente, il reste à montrer qu'il satisfait à la condition de co-cycle $p_{13}^*\Phi = p_{23}^*\Phi \circ p_{12}^*\Phi$. Or, via l'isomorphisme $X \times_Y X \cong G \times_S X$, on a un isomorphisme $X \times_Y X \times_Y X \cong G \times_S G \times_S X$ qui identifie p_{12} avec $Id_G \times a$ et p_{13} avec $\mu \times Id_X$, la condition de co-cycle vient alors du fait que a est une action de groupe.

De plus, la G-linéarisation de $\mathcal{L}$ induit une donnée de descente, la relation de co-cycle étant exactement la relation (6.1.2). Selon le théorème [BLR90, 6.1.7] il existe un couple $(Y', \mathcal{M})$ où

$\mathcal{M}$ est un faisceau inversible φ-ample et Y' est un Y-schéma tel que le carré

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\varphi} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array}$$

est cartésien. De plus, le morphisme ψ est de type fini car φ est de type fini [EGAIV2, Pro. 2.7.1]. De plus f' est un G-torseur, c'est le tiré en arrière de f par ψ.

Enfin si Y est S-quasi-projectif alors Y' est Y-quasi-projectif et S est quasi-compact donc Y' est aussi S-quasi-projectif [EGAII, Pro. 5.3.4 (ii)]. □

Définition 6.1.13. On considère un G-schéma quasi-compact X sur S, alors X est dit G-quasi-projectif s'il existe un faisceau inversible S-ample G-linéarisé sur X.

Corollaire 6.1.14. *Soient S un schéma quasi-compact, G un S-schéma en groupes plat de type fini, X un S-schéma de type fini, et Y un S-schéma. On considère un G-torseur $f : X \to Y$, alors pour tout S-schéma G-quasi-projectif Z le fibré associé $\psi : X \times^G Z \to Y$ existe et consiste en un Y-schéma de type fini qui admet un faisceau inversible ψ-ample.*

Démonstration. Soit $\mathcal{L}'$ un faisceau inversible G-linéarisé S-ample sur Z. On considère le S-schéma $X' = X \times_S Z$, le morphisme $\varphi = p_1 : X \times_S Z \to X$ et le faisceau $\mathcal{L} = p_2^*(\mathcal{L}')$ où $p_2 : X \times_S Z \to Z$ est la seconde projection. Alors $\mathcal{L}$ est p_2-ample [EGAII, Pro. 4.6.13 (iii)], de plus le tiré en arrière par la projection $X \times_S Z \times_S G \to Z \times_S G$ de la linéarisation de $\mathcal{L}'$ est une linéarisation sur $\mathcal{L}$. On peut donc appliquer la proposition 6.1.12. □

6.2 Torseurs sur une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$

On considère un corps k de caractéristique $p > 0$, et G une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. On note C la complétion régulière de G. Soit $f : X \to Y$ un G-torseur où X est une k-variété algébrique, et Y est une k-variété quasi-projective.

La courbe C est une G-variété normale projective, donc il existe un faisceau inversible ample G-linéarisé sur C [Sum75, Thm. 1.6]. Donc selon le corollaire 6.1.14, le fibré associé $\psi : X \times^G C \to Y$ existe. Montrons que ψ est projectif : on remarque que $p_1 : X \times C \to X$ est propre (car $C \to \mathrm{Spec}(k)$ est projectif et les morphismes projectifs sont stables par changement de base) donc ψ aussi [EGAIV2, Pro. 2.7.1 (vii)]. Le morphisme ψ est propre et quasi-projectif, donc il est projectif [EGAII, Thm. 5.5.3 (ii)]. De plus ψ est un morphisme plat [EGAIV2, Cor. 2.2.13 (iii)].

Lemme 6.2.1. *Si X est lisse, alors $X \times^G C$ est régulier.*

Démonstration. Comme X est lisse, $X \times_k C$ est régulier [EGAIV2, Pro. 6.8.5]. De plus

$$X \times_k C \to X \times^G C$$

est fidèlement plat, donc $X \times^G C$ est régulier [EGAIV2, Cor. 6.5.2 (i)]. □

Remarque 6.2.2. Il y a une une immersion ouverte $X \to X \times^G C$, donc $X \times^G C$ est une complétion de X relativement à Y.

Si X est lisse, alors on peut identifier le groupe de Picard de X avec le groupe des diviseurs de Weil de X, et de même pour $X \times^G C$. On obtient donc une suite exacte de groupes abéliens :

$$0 \to \mathbb{Z}[X \times^G P_\infty] \to \mathrm{Pic}(X \times^G C) \to \mathrm{Pic}(X) \to 0,$$

où P_∞ désigne le point à l'infini de C et $[X \times^G P_\infty]$ est le diviseur de Weil associé à $X \times^G P_\infty = X \times^G C \setminus X$. Cette suite exacte motive l'étude de $\mathrm{Pic}_{X \times^G C/Y}$.

Soit $y \in Y$, la fibre géométrique de ψ en y est

$$\left(X \times^G C\right) \times_Y \mathrm{Spec}\left(\overline{\kappa(y)}\right) \cong C_{\overline{\kappa(y)}},$$

elle est donc réduite et irréductible. On peut donc appliquer le théorème 4.1.7 : $\mathrm{Pic}_{X \times^G C/Y}$ est représenté par un Y-schéma en groupes séparé localement de présentation finie. De plus les fibres géométriques de ψ étant isomorphes à des courbes projectives, selon la proposition 4.1.15, $\mathrm{Pic}_{X \times^G C/Y}$ est formellement lisse, donc lisse car localement de présentation finie.

Définition 6.2.3. Soit X un S-schéma quelconque, on suppose que $\mathrm{Pic}_{X/S}$ est représenté par un S-schéma. Dans ce cadre, on peut définir $\mathrm{Pic}^0_{X/S}$ comme l'union des $\mathrm{Pic}^0_{X_s/\kappa(s)}$ pour $s \in S$ (selon la proposition [Kle05, 4.17], $\mathrm{Pic}^0_{X_s/\kappa(s)}$ est un $\kappa(s)$-groupe algébrique).

Selon [Kle05, 4.4] pour tout point $y \in Y$,

$$\left(\mathrm{Pic}_{X \times^G C/Y}\right) \times_Y \mathrm{Spec}\left(\overline{\kappa(y)}\right) \cong \mathrm{Pic}_{C_{\overline{\kappa(y)}}/\overline{\kappa(y)}}.$$

Remarque 6.2.4. Dans le cas particulier de $\mathrm{Pic}_{X \times^G C/Y}$, alors $\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y}$ est un sous-schéma ouvert de $\mathrm{Pic}_{X \times^G C/Y}$ qui est de type fini sur Y et dont la fibre en $y \in Y$ est $\mathrm{Pic}^0_{C_{\kappa(y)}/\kappa(y)}$ [Kle05, Thm. 5.20].

Proposition 6.2.5. *Avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses que ci-dessus,* $\mathrm{Pic}_{X \times^G C/Y}$ *est représenté par un Y-schéma en groupes commutatif lisse, séparé, et localement de présentation finie.*

De plus, $\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y}$ *est un Y-schéma en groupes commutatif de type fini, lisse et séparé. Si Y est réduit, alors* $\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y}$ *est de $p^{n'(G)}$-torsion.*

Démonstration. Avec ce qui est fait ci-dessus la seule affirmation qui reste à démontrer est celle sur la torsion de $\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y}$. On rappelle que selon le théorème 5.2.4, le k-groupe algébrique $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$ est de $p^{n'(G)}$-torsion.

On note N le noyau de l'application $p^{n'(G)} : \mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y} \to \mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y}$, c'est un sous-$Y$-schéma en groupes de $\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y}$. Soit $y \in Y$, alors

$$\begin{aligned} N_y &= \mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y} \times_{\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y}} Y \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \\ &\cong \mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y} \times_{\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y}} \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \\ &\cong \left(\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y} \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))\right) \times_{\left(\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y} \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))\right)} \mathrm{Spec}(\kappa(y)), \end{aligned}$$

car la formation du noyau commute aux changements de base. De plus

$$\left(\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y} \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))\right) \times_{\left(\mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y} \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))\right)} \mathrm{Spec}(\kappa(y))$$

est le noyau de

$$p_y^{n'(G)} : \mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y} \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to \mathrm{Pic}^0_{X \times^G C/Y} \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)),$$

or $\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}\times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \cong \mathrm{Pic}^0_{C_{\kappa(y)}/\kappa(y)}$ est de $p^{n'(G)}$-torsion. On a donc un isomorphisme

$$N_y \cong \ \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}\times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y)).$$

Donc, le morphisme $i : N \to \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}$ de Y-schémas induit un isomorphisme sur chaque fibre.

Pour montrer que i est un isomorphisme, on va tout d'abord montrer que i est une immersion fermée. En effet $\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}\to Y$ est séparé donc

$$\Delta : \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}\to \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}\times_Y \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}$$

est une immersion fermée. Or on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y} \arrow[d, "(id{,}e)"] \\
\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y} \arrow[r, "\Delta"] & \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}\times_Y \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}.
\end{tikzcd}$$

Les immersions fermées sont stables par changement de base, donc $e : Y \to \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}$ est une immersion fermée. De plus, par définition de N, le carré

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "e"] \\
\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y} \arrow[r, "p^{n'(G)}"] & \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}
\end{tikzcd}$$

est cartésien. Donc i est bien une immersion fermée.

On va maintenant montrer que i est une bijection “ensembliste”. On note

$$f : \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}\to Y \quad \text{et} \quad g : N \to Y$$

les morphismes structuraux. Soit $y \in Y$, alors on a vu que

$$i_y : N_y \xrightarrow{\sim} \left(\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}\right)_y .$$

De plus la projection $N_y \to N$ induit un homéomorphisme $N_y \xrightarrow{\sim} f^{-1}(y)$, de même la projection

$$\left(\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}\right)_y \to \mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}$$

induit un homéomorphisme

$$\left(\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}\right)_y \xrightarrow{\sim} g^{-1}(y).$$

Donc i induit un homéomorphisme $g^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(y)$, et i est bien une bijection “ensembliste”.

Enfin i est dominant et c'est une immersion fermée, en particulier i est affine. Donc si U est un ouvert affine de $\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}$, alors $i_{|U} : i^{-1}(U) \to U$ est un morphisme dominant entre schémas affines avec U réduit (par hypothèse Y est réduit donc $\mathrm{Pic}^0_{X\times^G C/Y}$ est lisse). Donc ${i_{|U}}^{\#}$ est injective, donc bijective (car i est une immersion fermée), donc $i_{|U}$ est un isomorphisme. Donc i est un isomorphisme. $\square$

On note toujours k' le plus petit corps sur lequel G est déployé. Considérant le théorème 5.2.4 il est naturel de regarder comment $\mathrm{Pic}_{X\times^G C/Y}$ se comporte après extension à k'. Avant cela on va énoncer et prouver un lemme sur les $\mathbb{G}_{a,k}$-torseurs.

Lemme 6.2.6. *Soient $f : X \to Y$ un $\mathbb{G}_{a,k}$-torseur où Y est un k-schéma affine. Alors $f : X \to Y$ est le torseur trivial, en particulier X est isomorphe en tant que k-schéma à $Y \times_k \mathbb{G}_{a,k}$.*

Démonstration. Selon le théorème [Ros56, Thm. 10], le morphisme f admet des sections locales. Le $\mathbb{G}_{a,k}$-torseur f est donc localement trivial ; en fait, on va montrer qu'il est trivial. Les classes d'isomorphisme des $\mathbb{G}_{a,k}$-torseurs localement triviaux sont classifiées par $H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$, or Y est affine donc $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = \{0\}$. □

Proposition 6.2.7. *On considère toujours une forme G de $\mathbb{G}_{a,k}$ et $f : X \to Y$ un G-torseur. On suppose que Y est une k-variété affine ; alors*

$$\mathrm{Pic}_{X\times^G C/Y} \times_k \mathrm{Spec}(k') \cong \mathrm{Pic}_{C_{k'}/k'} \times_{k'} Y_{k'}.$$

Démonstration. $f : X \to Y$ est un G-torseur, donc après tiré en arrière par $\mathrm{Spec}(k') \to \mathrm{Spec}(k)$, $f_{k'} : X_{k'} \to Y_{k'}$ est un $G_{k'} \cong \mathbb{G}_{a,k'}$-torseur. Donc $X_{k'} \cong Y_{k'} \times_{k'} \mathbb{G}_{a,k}$ et cet isomorphisme identifie $f_{k'}$ à p_1 (lemme 6.2.6).

En utilisant [Kle05, 4.4] on obtient

$$\mathrm{Pic}_{X\times^G C/Y} \times_k \mathrm{Spec}(k') = \mathrm{Pic}_{(Y_{k'}\times_{k'}\mathbb{G}_{a,k})\times^{\mathbb{G}_{a,k}} C_{k'}/Y_{k'}}.$$

On remarque que $(Y_{k'} \times_{k'} \mathbb{G}_{a,k}) \times^{\mathbb{G}_{a,k}} C_{k'} \cong Y_{k'} \times_{k'} C_{k'}$ donc en utilisant à nouveau [Kle05, 4.4] on obtient :

$$\mathrm{Pic}_{X\times^G C/Y} \times_k \mathrm{Spec}(k') \cong \mathrm{Pic}_{C_{k'}\times_{k'} Y_{k'}/Y_{k'}} = \mathrm{Pic}_{C_{k'}/k'} \times_{k'} Y_{k'}.$$

□

6.3 Complétion équivariante relative d'un groupe unipotent de dimension 2

Soit G un k-groupe algébrique unipotent connexe de dimension 2. On considère une forme G_1 de $\mathbb{G}_{a,k}$ qui est un sous-groupe fermé distingué de G (proposition 2.6.5). Remarquons que le choix d'un tel groupe G_1 est non-canonique. Alors $f : G \to G/G_1 = G_2$ est un G_1-torseur. On note $\overline{G}_1$ (respectivement $\overline{G}_2$) la complétion régulière de G_1 (respectivement G_2).

Dans cette section, on va utiliser le fibré associé pour construire une complétion X' de G qui est régulière et G-équivariante. Cette complétion est la première étape pour faire une étude détaillée du groupe de Picard des k-groupes algébriques unipotents connexes de dimension 2.

On est dans un cas particulier de la situation étudiée dans la section 6.2, donc le fibré associé $\psi : G \times^{G_1} \overline{G}_1 \to G_2$ existe et $G \times^{G_1} \overline{G}_1$ est une k-variété algébrique quasi-projective régulière. On remarque que l'action de G sur lui-même par translation s'étend en une action de G sur $G \times^{G_1} \overline{G}_1$.

Dans cette section, on va montrer la proposition suivante :

Proposition 6.3.1. *Il existe une complétion régulière G-équivariante X' de G et un morphisme $\psi' : X' \to \overline{G}_2$ tel que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & G \times^{G_1} \overline{G}_1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\psi"] & X' \arrow[d, "\psi'"] \\ & G_2 \arrow[r, hook, "j"'] & \overline{G}_2, \end{tikzcd}$$

où ψ' est un morphisme projectif, de type fini, cohomologiquement plat en dimension 0 *et i est une immersion ouverte G-équivariante.*

Tout d'abord, il existe donc une complétion G-équivariante X de $G \times^{G_1} \overline{G}_1$ [Sum75, Cor. 2.6]. Comme G_2 est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$, il existe une complétion régulière canonique $\overline{G}_2$ de G_2. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & G \times^{G_1} \overline{G}_1 \arrow[r, hook, "I"] \arrow[d, "\psi"] & X \arrow[d, dotted, "g"] \\
& G_2 \arrow[r, hook, "j"'] & \overline{G}_2
\end{tikzcd}$$

où $g : X \dashrightarrow \overline{G}_2$ est une application rationnelle.

Remarque 6.3.2. Avant de continuer, on va faire quelques rappels sur l'image schématique [EGAI, Sec. 9.5].

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schémas. On suppose que f est quasi-compact et séparé ou que X est localement noethérien, alors $\mathcal{I} = \ker(\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X)$ est un faisceau quasi-cohérent sur Y. On note $f(X)$ le sous-schéma fermé de Y défini par $\mathcal{I}$, c'est *l'image schématique* de f. Alors f se factorise en $X \to f(X) \to Y$.

L'image schématique vérifie la propriété suivante : pour tout sous-schéma fermé Z de Y tel que f se factorise en $X \to Z \to Y$, il existe une unique immersion fermée $f(X) \to Z$.

On note Γ_g le graphe de g, i.e. l'image schématique du morphisme $G \times^{G_1} \overline{G}_1 \to X \times_k \overline{G}_2$ donnée par :

$$G \times^{G_1} \overline{G}_1 \xrightarrow{I \times \psi} X \times_k G_2 \xrightarrow{id \times j} X \times_k \overline{G}_2.$$

Par définition Γ_g est muni de deux morphismes $\overline{g}_X$ et $\overline{g}_2$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_g \arrow[r, "\overline{g}_X"] \arrow[dr, "\overline{g}_2"'] & X \arrow[d, dotted, "g"] \\
& \overline{G}_2
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

On va maintenant montrer que Γ_g est muni d'une action de G telle que le morphisme $\overline{g}_X : \Gamma_g \to X$ est G-équivariant. Pour cela on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 6.3.3. *Soit*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & Y_1 \arrow[d, "d"] \\
X_2 \arrow[r, "b"'] & Y_2
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de schéma. On suppose que a (respectivement b) est quasi-compact et séparé ou que X_1 (respectivement X_2) est localement noethérien. Alors, il existe une unique *application* $h : a(X_1) \to b(X_2)$ *tel que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] \arrow[rr, bend left, "a"] & a(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & Y_1 \arrow[d, "d"] \\
X_2 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "b"'] & b(X_2) \arrow[r] & Y_2.
\end{tikzcd}$$

Démonstration. $b(X_2) \times_{Y_2} Y_1$ est un sous-schéma fermé de Y_1 et par propriété universelle du produit cartésien il existe un unique morphisme $X_1 \to b(X_2) \times_{Y_2} Y_1$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d, "c"'] \arrow[rr, bend left, "a"] & b(X_2) \times_{Y_2} Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "p_1"'] & Y_1 \arrow[d, "d"] \\
X_2 \arrow[r] & b(X_2) \arrow[r] & Y_2.
\end{tikzcd}$$

Donc il existe une unique immersion fermée $\iota : a(X_1) \to b(X_2) \times_{Y_2} Y_1$ telle que la composé

$$a(X_1) \xrightarrow{\iota} b(X_2) \times_{Y_2} Y_1 \xrightarrow{p_2} Y_1$$

factorise $a : X_1 \to Y_1$. Alors $h = p_1 \circ \iota$ convient, et h est unique car il définit ι. $\square$

On note

$$a_1 : G \times_k G \times^{G_1} \overline{G}_1 \to G \times^{G_1} \overline{G}_1$$

l'action de G sur $G \times^{G_1} \overline{G}_1$, et

$$a_2 : G \times_k (X \times_k \overline{G}_2) \to X \times_k \overline{G}_2$$

l'action de G sur$X \times_k \overline{G}_2$.

On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G \times_k G \times^{G_1} \overline{G}_1 \arrow[r] \arrow[d, "a_1"'] & G \times_k (X \times_k \overline{G}_2) \arrow[d, "a_2"] \\
G \times^{G_1} \overline{G}_1 \arrow[r] & X \times_k \overline{G}_2.
\end{tikzcd}$$

Donc selon le lemme ci-dessus, il existe un unique morphisme $a : G \times_k \Gamma_g \to \Gamma_g$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G \times_k G \times^{G_1} \overline{G}_1 \arrow[r] \arrow[d, "a_1"'] & G \times_k \Gamma_g \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & G \times_k (X \times_k \overline{G}_2) \arrow[d, "a_2"'] \\
G \times^{G_1} \overline{G}_1 \arrow[r] & \Gamma_g \arrow[r] & X \times_k \overline{G}_2
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Remarque 6.3.4. Si Y est une k-variété algébrique de dimension 2 munie d'une action a d'un k-groupe algébrique G, alors Y admet une résolution des singularités G-équivariante. C'est-à-dire, il existe une k-variété régulière Z munie d'une action de G et un morphisme G-équivariant $\pi : Z \to Y$ qui est un isomorphisme au dessus du lieu régulier de Y.

En effet, Y admet une résolution des singularités donnée par une suite finie d'éclatements de points singuliers et de normalisations [Lip78].

Or si $\alpha : Y' \to Y$ est la normalisation de Y alors, par propriété universelle de la normalisation [Liu06, 4.2.19], il existe une unique application $a' : G \times_k Y' \to Y'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "\alpha"] & Y \\
G \times_k Y' \arrow[u, "a'"] \arrow[r, "id_G \times \alpha"'] & G \times_k Y \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif. De même, par propriété universelle de la normalisation, les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
G \times_k G \times_k Y' \arrow[r, "m \times Id_{Y'}"] \arrow[d, "Id_G \times a'"'] & G \times_k Y' \arrow[d, "a'"] \\
G \times_k Y' \arrow[r, "a'"] & Y',
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "e \times Id_{Y'}"] \arrow[dr, "Id_{Y'}"'] & G \times_k Y' \arrow[d, "a'"] \\
 & Y'
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Donc a' est une action de G sur Y' et la normalisation α est G-équivariante.

De même, si $\beta : Y'' \to Y$ est un éclatement, alors, par propriété universelle des éclatements [Liu06, Pro. 8.1.15], il existe une unique application $a'' : G \times_k Y'' \to Y''$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
G \times_k Y' \arrow[r, "a''"] \arrow[d, "id_G \times \beta"'] & Y'' \arrow[d, "\beta"] \\
G \times_k Y \arrow[r, "a"'] & Y
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Donc Y'' admet une action de G tel que β est G-équivariante.

Donc Γ_g admet une désingularisation G-équivariante $X' \to \Gamma_g$. On a alors un diagramme commutatif de morphismes de k-variétés algébriques :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & G \times^{G_1} \overline{G}_1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\psi"] & X' \arrow[d, "\psi'"] \\
 & G_2 \arrow[r, hook, "j"'] & \overline{G}_2,
\end{tikzcd}$$

où i est une immersion ouverte dominante G-équivariante, et ψ' est un morphisme projectif, de type fini, et plat [Liu06, Cor. 4.3.10].

Enfin, montrons que l'on a universellement $\psi'_*\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{\overline{G}_2}$. On a une factorisation de Stein [Sta17, Tag 03GX] pour $G \times^{G_1} \overline{G}_1 \to G_2$ et $X' \to \overline{G}_2$:

$$\begin{tikzcd}
G \times^{G_1} \overline{G}_1 \arrow[rr, "i"] \arrow[dd, "\psi"'] \arrow[dr] & & X' \arrow[dd, "\psi'"'] \arrow[dr] & \\
& Z \arrow[dl, "l"] & & Z' \arrow[dl, "l'"] \\
G_2 \arrow[rr, "j"'] & & \overline{G}_2. &
\end{tikzcd}$$

Les fibres du morphisme ψ sont géométriquement connexes, donc on a universellement $\psi_*\mathcal{O}_{G\times^{G_1}\overline{G}_1} = \mathcal{O}_{G_2}$ [EGAIII2, Pro. 7.8.6]. Donc, par construction de la factorisation de Stein $Z = G_2$, autrement dit l est un isomorphisme. Or, la factorisation de Stein commute aux changements de base plats, donc l' devient un isomorphisme après changement de base par $G_2 \to \overline{G}_2$. Donc l' est un isomorphisme [EGAIV2, Pro. 2.7.1] et on a l'égalité $\psi'_*\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{\overline{G}_2}$. Enfin comme $\psi_*\mathcal{O}_{G\times^{G_1}\overline{G}_1} = \mathcal{O}_{G_2}$ est vrai universellement, on peut refaire le raisonnement ci-dessus après n'importe quel changement de base, et donc $\psi'_*\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{\overline{G}_2}$ est vrai universellement.

Remarque 6.3.5. L'intérêt de cette construction est de relier le groupe de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{G\times^{G_1}\overline{G}_1/G_2}$, que l'on a étudié dans la section précédente, à $\mathrm{Pic}_{X'/\overline{G}_2}$. En effet, selon [Kle05, 4.4], on a :

$$\mathrm{Pic}_{G\times^{G_1}\overline{G}_1/G_2} = \mathrm{Pic}_{X'/\overline{G}_2} \times_{\overline{G}_2} G_2.$$

Ainsi, cette complétion régulière peut être utilisée pour étudier en détail le groupe de Picard des formes de $\mathbb{G}^2_{a,k}$.

Remarque 6.3.6. Plus généralement, on peut considérer un G_1-torseur $f : X \to Y$ où G_1 est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$, et Y est une forme de $\mathbb{A}^1_k$.

Alors, on peut utiliser les mêmes arguments pour construire une complétion régulière X' de X. De plus, X' est muni d'un morphisme $\psi' : X' \to \overline{Y}$ qui est projectif et cohomologiquement plat en dimension 0, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & X \times^{G_1} \overline{G}_1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\psi"] & X' \arrow[d, "\psi'"] \\
& Y \arrow[r, hook, "j"'] & \overline{Y}
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

6.4 Un dévissage naïf du groupe de Picard des groupes unipotents

Dans cette section, on va utiliser une suite exacte de groupes de Picard de torseurs pour obtenir une majoration de la torsion du groupe de Picard des k-groupes algébrique unipotents.

Soient G un k-groupe algébrique connexe, et X un G-schéma réduit séparé et localement noethérien. On note a l'action de G sur X.

Définition 6.4.1. On note $\widehat{G} = \mathrm{Hom}_{grp}(G, \mathbb{G}_{m,k})$ le groupe des caractères de G, on voit $\widehat{G}$ comme un faisceau étale de groupes abéliens libres de rang fini sur $\mathrm{Spec}(k)$.

On note $\widehat{G}(X)$ le groupe abélien des sections de $\widehat{G}$ sur le schéma X.

Lemme 6.4.2. *[Bri15, Lem. 2.6]*
L'application

$$\begin{array}{rccl} \mu : & \widehat{G}(X) \times \mathcal{O}(X)^* & \to & \mathcal{O}(G \times X)^* \\ & (\chi, f) & \mapsto & ((g,x) \mapsto \chi(x)(g)f(x)) \end{array}$$

est un isomorphisme.

On considère les morphismes suivants :

$\chi : f \in \mathcal{O}(X)^* \to \chi(f) \in \widehat{G}(X)$ où $\chi(f)$ est l'unique élément de $\widehat{G}(X)$ tel que $a^{\#}(f) = \mu(\chi(f), f)$. Le morphisme χ est bien défini [Bri15, Lem. 2.6].

$\gamma : \widehat{G}(X) \to \mathrm{Pic}^G(X)$ qui à $\chi \in \widehat{G}(X)$ associe la classe du faisceau $\mathcal{O}_X$ munie de la linéarisation associée à $\mu(\chi, 1)$. En effet, dans ce cas $a^*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{G\times_k X} \cong p_2^*\mathcal{O}_X$, la donnée d'une linéarisation est donc exactement la donnée d'un élément de $\mathcal{O}(G \times_k X)^*$.

Et $\varphi : \mathrm{Pic}^G(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ qui oublie la linéarisation.

Proposition 6.4.3. *[Bri15, Pro. 2.10]*
Soit $p_2 : G \times_k X \to X$ la seconde projection. Alors il y a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}(X)^{*G} \to \mathcal{O}(X)^* \xrightarrow{\chi} \widehat{G}(X) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Pic}^G(X) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{a^*-p_2^*} \mathrm{Pic}(G \times_k X).$$

Une application directe de cette proposition et du lemme 6.1.10 est que si $f : X \to Y$ est un G-torseur avec X réduit alors on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}(Y)^* \to \mathcal{O}(X)^* \xrightarrow{\chi} \widehat{G}(X) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Pic}(Y) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{a^*-p_2^*} \mathrm{Pic}(G \times_k X).$$

Si U est un k-groupe algébrique unipotent alors $\mathcal{O}(U)^* = k^*$ et $\widehat{U} = 0$. Donc si

$$1 \to G \to U \to V \to 1$$

est une suite exacte de k-groupes algébriques unipotents, alors la suite de groupes abéliens

$$0 \to \mathrm{Pic}(V) \to \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(G \times_k U)$$

est exacte.

De plus, on a le lemme suivant :

Lemme 6.4.4. *[Bri15, Lem. 2.13]*
On suppose que X est en plus normal et intègre de point générique η. Alors, on a une suite exacte :

$$\mathrm{Pic}^G(X) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Pic}\left(G_{\kappa(X)}\right),$$

où $\rho : \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{a^*} \mathrm{Pic}(G \times X) \xrightarrow{(id\times\eta)^*} \mathrm{Pic}\left(G_{\kappa(X)}\right)$.

On considère un k-groupe algébrique unipotent U et $G \subset U$ une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ distinguée dans U, alors on a une suite exacte

$$1 \to G \to U \to U/G \to 1.$$

Donc, la suite

$$0 \to \mathrm{Pic}(U/G) \to \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}\left(G_{\kappa(U)}\right) \tag{6.4.1}$$

est exacte.

Avant d'étudier la torsion du groupe de Picard d'un k-groupe algébrique unipotent connexe, on va d'abord montrer que l'on peut se contenter d'étudier le groupe de Picard des k-groupes algébriques unipotents connexes k-ployés.

Lemme 6.4.5. *Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe, on rappelle qu'il existe un unique sous-groupe distingué k-déployé $U_{dép}$ de U tel que le quotient $U_{pl} = U/U_{dép}$ est k-ployé (théorème 2.6.1).*

Alors $f : U \to U_{pl}$ est un $U_{dép}$-torseur trivial, en particulier U est isomorphe comme k-schéma au produit $U_{pl} \times_k U_{dép}$.

Démonstration. Selon le théorème [Ros56, Thm. 10], le morphisme f admet des sections locales. Le U-torseur f est donc localement trivial. Si $U_{\text{dép}} = \{0\}$, il n'y a rien à faire. Si $U_{\text{dép}}$ est de dimension 1, alors le résultat est vrai selon le lemme 6.2.6.

Sinon, $U_{\text{dép}}$ est de dimension $n \geqslant 1$, on va raisonner par récurrence. Comme $U_{\text{dép}}$ est déployé, il existe une suite exacte de groupes algébriques

$$1 \to U_1 \cong \mathbb{G}_{a,k} \to U_{\text{dép}} \to \frac{U_{\text{dép}}}{U_1} \to 1.$$

Alors $U/U_1 \to U_{pl}$ est un $U_{\text{dép}}/U_1$-torseur, or $U_{\text{dép}}/U_1$ est toujours k-déployé [Bor12, Thm. V.15.4] ; donc par hypothèse de récurrence le $U_{\text{dép}}/U_1$-torseur $U/U_1 \to U_{pl}$ est trivial. De plus $U \to U/U_1$ est un U_1-torseur, qui est trivial (lemme 6.2.6). Donc le $U_{\text{dép}}$-torseur $U \to U_{pl}$ est trivial. □

Remarque 6.4.6. Si U est un k-groupe algébrique unipotent k-déployé alors $\mathrm{Pic}(U) = 0$. En effet selon le théorème de Lazard 2.1.4 U est isomorphe en tant que schéma à $\mathbb{A}_k^d$ (où $d = \dim(U)$), donc $\mathrm{Pic}(U) \cong \mathrm{Pic}(\mathbb{A}_k^d) = 0$.

Si U est un k-groupe algébrique unipotent alors, avec les notations du lemme 6.4.5, on a un isomorphisme de k-schémas $U \cong U_{\text{dép}} \times_k U_{pl}$. Comme $U_{\text{dép}}$ est rationnel,

$$\mathrm{Pic}(U) = \mathrm{Pic}(U_{pl}) \times \mathrm{Pic}(U_{\text{dép}}) = \mathrm{Pic}(U_{pl}).$$

On s'est donc ramené à l'étude du groupe de Picard des k-groupes unipotents connexes k-ployés.

Proposition 6.4.7. *Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe, rappelons qu'il existe une suite de composition centrale*

$$\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_d = U$$

telle que $\forall i \in [\![1; d]\!]$, $U_i/U_{i-1} \cong G_i$ est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ (théorème 2.6.5). Alors $\mathrm{Pic}(U)$ *est de $p^{n(G_1)+\cdots+n(G_d)}$-torsion.*

Démonstration. Si U est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$, alors $\mathrm{Pic}(U)$ est de $p^{n(U)}$-torsion (théorème 3.6.1).

En général, on va raisonner par récurrence sur la dimension d de U. Si $d = 1$ alors U est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$, sinon $d > 1$ alors on note $V = U/U_1$ et pour $i \in [\![0; d-1]\!]$ on note $V_i = U_{i+1}/U_1$. La suite

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{d-1} = V$$

est une suite de composition centrale pour V telle que $\forall i \in [\![1; d-1]\!]$,

$$V_i/V_{i-1} \cong U_{i+1}/U_i \cong G_{i+1}.$$

La dimension de V est $d-1$, donc par hypothèse de récurrence $\mathrm{Pic}(V)$ est de $p^{n(G_2)+\cdots+n(G_d)}$-torsion.

Par définition de V, on a une suite exacte

$$1 \to U_1 \to U \to V \to 1$$

où $U_1 = G_1$ est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. On a donc la suite exacte (6.4.1) :

$$0 \to \mathrm{Pic}(V) \to \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}\left((U_1)_{\kappa(U)}\right),$$

selon le théorème 3.6.1 le groupe $\mathrm{Pic}\left((U_1)_{\kappa(U)}\right)$ est de $p^{n(G_1)}$-torsion, donc $\mathrm{Pic}(U)$ est de $p^{n(G_1)}.p^{n(G_2)+\cdots+n(G_d)} = p^{n(G_1)+\cdots+n(G_d)}$-torsion. □

Remarque 6.4.8. Si U est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$, alors il existe un plus petit corps k' tel que U est déployé sur k' [Rus70, Cor. 2.3.1]. L'exemple ci-dessous montre qu'un tel résultat ne s'étend pas aux groupes algébriques unipotents connexes en général.

On considère $k = \mathbb{F}_p(t_1, t_2)$ et U le k-groupe algébrique unipotent défini par le p-polynôme

$$t_1 y^{p^2} + t_2 z^p - x^p - x$$

alors on a deux suites exactes de groupes algébriques

$$0 \to G \to U \xrightarrow{p_z} \mathbb{G}_{a,k} \to 0$$

et

$$0 \to G' \to U \xrightarrow{p_y} \mathbb{G}_{a,k} \to 0$$

où $p_z : (x, y, z) \mapsto z$ et $p_y : (x, y, z) \mapsto y$ sont les projections par rapport à z et y. Alors le noyau de p_z, noté G, est la forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie par l'équation $y^{p^2} = x + t_1^{p-1}x^p$ et de même le noyau de p_y, noté G', est la forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie par l'équation $z^p = x + t_2^{p-1}x^p$. Le k-groupe algébrique unipotent U est donc déployé sur $k\left(t_1^{1/p^2}\right)$ et $k\left(t_2^{1/p}\right)$. S'il existait un plus petit corps tel que U est déployé, alors U serait déployé sur k or la partie principale du polynôme qui définit U n'a pas de zéro non trivial sur k donc U est k-ployé (lemme 2.2.6).

Dans la suite, on s'intéresse au cas particulier où U est un groupe algébrique unipotent connexe, commutatif et d'exposant p, alors selon le lemme 2.4.6 U est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}^d$ où $d = \dim(U)$.

On obtient la proposition suivante :

Proposition 6.4.9. *Si U est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}^d$, alors il existe une suite de composition*

$$\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_d = U$$

tel que pour tout $i > 0$, $U_{i+1}/U_i \cong \mathbb{G}_{a,k}$ et U_1/U_0 est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$.

En particulier $\mathrm{Pic}(U)$ *est de $p^{n(U_1)}$-torsion.*

Démonstration. On peut réaliser U comme un sous-groupe de $\mathbb{G}_{a,k}^{d+1}$ défini par un p-polynôme irréductible que l'on note P (proposition 2.3.3).

Si $d = 1$ alors U est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ et la proposition est évidente, supposons $d > 1$. Alors P est séparable, donc contient un monôme de degré 1. Quitte à effectuer un changement de variable linéaire on peut supposer que

$$P(x_1, \ldots, x_{d+1}) = x_1 + \sum_{i=1}^{d+1} P_i(x_i)$$

où les P_i sont des p-polynômes à une variable dont la valuation en 0 est supérieure ou égale à p. On considère la suite exacte

$$0 \to U' \to U \xrightarrow{p_{d+1}} \mathbb{G}_{a,k} \to 0$$

où $p_{d+1} : (x_1, \ldots, x_{d+1}) \mapsto x_{d+1}$ et $U' = \ker(p_{d+1})$. L'image de U par p_{d+1} est un sous-groupe connexe de $\mathbb{G}_{a,k}$, si elle est triviale alors $U \cong \mathbb{G}_{a,k}^d$, sinon cette image est $\mathbb{G}_{a,k}$. On a donc construit un sous-groupe U' de U qui est lisse, connexe, commutatif, d'exposant p, de dimension $d-1$ et qui vérifie $U/U' \cong \mathbb{G}_{a,k}$. On conclut par récurrence sur la dimension. □

Exemple 6.4.10. Si U est le k-groupe algébrique unipotent de la remarque 6.4.8 alors $\mathrm{Pic}(U)$ est de p-torsion.

6.5 Un cas particulier de groupe unipotent unirationnel

Soient k un corps de caractéristique p et k' une extension purement inséparable de k de degré p^n. On note $U = R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})/\mathbb{G}_{m,k}$ (où $R_{k'/k}$ désigne la restriction de Weil). J. Oesterlé a montré que U est un k-groupe algébrique unipotent unirationnel k-ployé [Oes84, Lem. VI 5.1].

Dans cette section, on va calculer le groupe de Picard de U et le groupe $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ des extensions commutatives de U par $\mathbb{G}_{m,k}$.

Cet exemple est particulièrement intéressant car J. Oesterlé a montré que si k est le corps des fonctions d'une courbe définie sur un corps fini, alors tout k-groupe algébrique unipotent connexe k-ployé de dimension strictement inférieure à $p-1$ n'est pas unirationnel. Or, si $[k' : k] = p$, alors U est un groupe algébrique unipotent k-ployé unirationnel de dimension $p-1$.

Deux questions naturelles se posent alors : est ce que tout k-groupe algébrique unipotent unirationnel k-ployé de dimension $p-1$ est de la forme $R_{k'/k}(T_{k'})/T$, où T est un tore de dimension 1 et k'/k est une extension purement inséparable de degré p ? Est ce que tout k-groupe algébrique unipotent unirationnel k-ployé admet un sous-groupe de la forme $R_{k'/k}(T_{k'})/T$, où T est un tore et k'/k est une extension purement inséparable ?

Tout d'abord, on peut voir $R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})$ comme l'ouvert principal de $\mathbb{A}_k^{p^n}$ défini par l'équation $N \neq 0$ où N est la norme de k'/k donc

$$\mathrm{Pic}(R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})) = \{0\}.$$

De plus, on a une suite exacte de k-groupes algébriques

$$0 \to \mathbb{G}_{m,k} \to R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}) \to U \to 0, \tag{6.5.1}$$

qui induit une suite exacte de groupes commutatifs :

$$0 \to \mathcal{O}(U)^* \to \mathcal{O}(R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}))^* \to \widehat{\mathbb{G}_{m,k}} \to \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})) = \{0\}$$

où $\widehat{\mathbb{G}_{m,k}}$ désigne le groupe des caractères de $\mathbb{G}_{m,k}$ [Bri15, Pro. 2.10]. Or $\mathcal{O}(R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'}))^*/k^*$ est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par la classe $[N]$ induite par la norme N, et $\widehat{\mathbb{G}_{m,k}} \cong \mathbb{Z}$. De plus, l'image de $[N]$ dans $\widehat{\mathbb{G}_{m,k}}$ est p^n. Donc

$$\mathrm{Pic}(U) = \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}.$$

De plus, B. Totaro a montré que pour tout k-groupe algébrique unipotent U connexe et commutatif $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ s'identifie au sous-groupe $\mathrm{Pic}(U)^U$ de $\mathrm{Pic}(U)$ des classes invariantes par translation [Tot13, Lem. 9.2]. Dans ce cas particulier, on vient de montrer que le groupe $\mathrm{Pic}(U)$ est engendré par $[N]$ qui induit naturellement l'extension de U par $\mathbb{G}_{m,k}$ donnée par la suite exacte (6.5.1).

On a donc obtenu le résultat suivant :

Proposition 6.5.1. *Soit k'/k une extension purement inséparable de k de degré p^n, on note $U = R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})/\mathbb{G}_{m,k}$. Alors on a les égalités suivantes :*

$$\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k}) = \mathrm{Pic}(U)^U = \mathrm{Pic}(U) = \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}.$$

Exemple 6.5.2. Si $p = 2$ et si $k' = k[a^{1/2}]$ où $a \in k \setminus k^2$, alors U est la forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ définie comme sous-groupe de $\mathbb{G}_{a,k}^2$ par l'équation

$$y^2 = x + ax^2.$$

Remarque 6.5.3. En fait, avec les arguments ci-dessus, on a montré que pour toute extension finie K/k

$$\mathrm{Pic}\left(\frac{R_{K/k}(\mathbb{G}_{m,K})}{\mathbb{G}_{m,k}}\right) = \frac{\mathbb{Z}}{[K:k]\mathbb{Z}}.$$

Par contre $\frac{R_{K/k}(\mathbb{G}_{m,K})}{\mathbb{G}_{m,k}}$ n'est pas forcément un k-groupe algébrique unipotent. Par exemple, si K/k est une extension séparable, alors $R_{K/k}(\mathbb{G}_{m,K})$ et $\frac{R_{K/k}(\mathbb{G}_{m,K})}{\mathbb{G}_{m,k}}$ sont des tores.

Remarque 6.5.4. Soit U un groupe algébrique unipotent connexe, alors le groupe de Picard de U peut être trivial [Tot13, Exe. 9.7]. Mais, si U admet un quotient qui est une forme non triviale de $\mathbb{G}_{a,k}$, alors le groupe de Picard de U est non trivial. En effet, le groupe de Picard d'une forme non triviale de $\mathbb{G}_{a,k}$ est toujours non trivial (théorème 3.6.1).

Par contre la réciproque est fausse en caractéristique $p > 2$. En effet si k'/k est une extension non triviale finie purement inséparable, alors le groupe de Picard de $U = R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k'})/\mathbb{G}_{m,k}$ est non trivial. Mais U n'admet pas de quotient G qui est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ non triviale. En effet, si G est un tel quotient de U, alors G est une courbe unirationnelle, donc rationnelle. Or en caractéristique différente de 2, la seule forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ qui est rationnelle est $\mathbb{G}_{a,k}$ (lemme 3.3.5).

Chapitre 7

Foncteur de Picard “restreint”

Dans ce chapitre, un k-schéma lisse signifie un k-schéma formellement lisse séparé et localement de type fini.

7.1 Motivation, définition et résultats

Soit X une forme de $\mathbb{A}_k^d$ ($d \geqslant 1$). Si $d = 1$, la complétion régulière C est un invariant important car le groupe de Picard de X est relié à celui de C. Et pour étudier le groupe de Picard de C on a un outil puissant : le foncteur de Picard relatif de C qui est représentable.

Si $d > 1$, il n'y a plus de complétion canonique, et pire l'existence d'une complétion régulière n'est assurée que si $d \leqslant 3$ [CP14, Thm. 1.1]. Dans ce cadre, on aimerait avoir un invariant qui remplace $\mathrm{Pic}_{C/k}$.

Afin d'obtenir un foncteur représentable, on va suivre une idée de M. Raynaud et restreindre le foncteur de Picard aux schémas lisses.

Définition 7.1.1. Soit X un k-schéma, on considère le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Pic}^+_{X/k} : & (\text{Schémas Lisses}/k)^\circ & \to & (\text{Groupes}) \\ & T & \mapsto & \dfrac{\mathrm{Pic}(X \times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)}, \end{array}$$

où $p_2 : X \times_k T \to T$ est la seconde projection. On appelle $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ le foncteur de Picard restreint de X.

On va supposer qu'il existe une complétion régulière $\overline{X}$ de X, c'est-à-dire on suppose qu'il existe une k-variété algébrique régulière, propre $\overline{X}$ munie d'une immersion ouverte $j : X \to \overline{X}$ d'image dense dans $\overline{X}$. On va se servir de $\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$ comme d'un intermédiaire pour montrer la représentabilité de $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ (qui ne dépend pas du choix de $\overline{X}$). Plus précisément, on va considérer (inspiré par la définition par P. Deligne des 1-motifs [Del74, 10.1]) le quotient de $\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$ par un groupe discret.

Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 7.1.2. *Soit X une forme de $\mathbb{A}_k^d$. On suppose qu'il existe une complétion régulière de X.*

Le foncteur $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est représenté par un k-groupe algébrique unipotent commutatif dont la composante neutre est k-ployée.

Ce théorème est démontré dans la section 7.3. Remarquons que l'on démontre quelque chose de légèrement plus fort : on montre que ${\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}$ n'admet pas de sous-groupe unirationnel non trivial. On va ensuite en déduire les deux conséquences suivantes. Le théorème 7.8.5 est la réinterprétation d'un résultat dû à B. Totaro [Tot13, Lem. 9.2] où il réalise le groupe $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ des extensions commutatives d'un k-groupe algébrique unipotent connexe, commutatif U par le groupe multiplicatif comme le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(U)$ formé des invariants par translation. Le théorème 7.8.5 est démontré dans la section 7.8.

Théorème (7.8.5)**.** *Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe, commutatif. On suppose que U admet une complétion régulière.*

Alors, l'action par translation de U dans lui-même induit une action sur $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$. On peut donc définir le foncteur

$$ {\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k} : \quad (\text{Schémas Lisses}/k)^\circ \quad \to \quad (\text{Groupes}) $$

des invariants de $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ sous l'action de U par : pour tout k-schéma lisse T, le groupe ${\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}(T)$ est le sous-groupe formé des éléments $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^+_{U/k}(T)$ tel que pour tout T-schéma lisse S, l'élément $\mathcal{L}_S$ induit par $\mathcal{L}$ dans $\mathrm{Pic}^+_{U/k}(S)$ est $U(S)$-invariant.

Alors ${\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}$ est représenté par un sous-groupe algébrique de $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$. De plus, pour toute extension séparable L/k,

$$ {\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}(L) = \mathrm{Ext}^1(U_L, \mathbb{G}_{m,L}). $$

On a aussi obtenu la proposition ci-dessous sur ${\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}$. Cette proposition généralise le lemme [Tot13, 9.4], et sa démonstration utilise exactement les mêmes arguments que ceux de la démonstration de [Tot13, Lem. 9.4].

Proposition. *7.8.6 Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe et commutatif qui admet une complétion régulière.*

Si le k-groupe algébrique $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est non trivial, alors le k-groupe algébrique ${\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}$ est non trivial.

En particulier, si le k-groupe algébrique $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est non trivial, alors le groupe abélien $\mathrm{Ext}^1(U_{k_s}, \mathbb{G}_{m,k_s})$ est non trivial.

Le théorème suivant est un résultat qui ouvre la voie à l'étude de la structure des k-groupes unipotents unirationnels. C'est une conséquence formelle du théorème 7.1.2 ; il est démontré dans la section 7.9.

Théorème (7.9.3)**.** *Soit X une forme unirationnelle de $\mathbb{A}^d_k$. On suppose que X admet une complétion régulière. Alors :*

(i) *Le k-groupe algébrique unipotent $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est étale.*

(ii) $\mathrm{Pic}(X)$ *est un groupe fini.*

7.2 Foncteur de Picard d'une complétion normale d'une forme de l'espace affine

Dans cette section, on considère une forme X de $\mathbb{A}^d_k$ avec un point k-rationnel. On va énoncer et prouver la proposition 7.2.3 sur le foncteur de Picard $\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$ où $\overline{X}$ est une complétion normale de X. Ce résultat va être utilisé dans la section 7.3 pour prouver le théorème 7.1.2.

Lemme 7.2.1. *Soit Y une k-variété normale propre géométriquement connexe et géométriquement réduite.*

Pour tout ouvert V de $\mathbb{A}^n_k$ ($n \in \mathbb{N}$) tel que $V(k) \neq 0$, les morphismes de schémas $V \to \mathrm{Pic}_{Y/k}$ sont constants d'image un point k-rationnel de $\mathrm{Pic}_{Y/k}$.

Démonstration. Tout d'abord, on peut supposer que $k = k_s$. Montrons que pour tout ouvert non vide V de $\mathbb{A}^n_k$ ($n \in \mathbb{N}$), les morphismes de schémas $V \to \mathrm{Pic}_{Y/k}$ dont l'image contient e, l'identité de $\mathrm{Pic}_{Y/k}$, sont constants d'image e.

On note $p_2 : Y \times_k V \to V$ et $p_1 : Y \times_k V \to Y$ les projections. Selon la proposition 4.1.1,

$$\mathrm{Pic}_{Y/k}(V) = \frac{\mathrm{Pic}(Y \times_k V)}{p_2^*\mathrm{Pic}(V)} = \mathrm{Pic}(Y \times_k V)$$

car $\mathrm{Pic}(V) = \{0\}$. De plus $\mathrm{Pic}(Y) \overset{p_1^*}{\to} \mathrm{Pic}(Y \times_k V)$ est un isomorphisme. En effet, le morphisme de groupes $p_1^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(Y \times_k V)$ est injectif car p_1 admet une section, et selon le corollaire [EGAIV4, 21.4.11] p_1^* est surjectif.

On considère un point k-rationnel a de V, qui induit un morphisme de groupes

$$a^* : \mathrm{Pic}_{Y/k}(V) \to \mathrm{Pic}_{Y/k}(k) = \mathrm{Pic}(Y).$$

Les morphismes de schémas $f : V \to \mathrm{Pic}_{Y/k}$ qui vérifient $f(a) = e$ sont exactement les éléments du noyau de a^*. Or

$$\ker(a^*) \cong \frac{\mathrm{Pic}(Y \times_k V)}{p_1^*\mathrm{Pic}(Y) \times p_2^*\mathrm{Pic}(V)}.$$

En effet, si on note x un point k-rationnel de Y (un tel point existe toujours car $k = k_s$) alors

$$a^* \times x^* : \mathrm{Pic}(Y \times_k V) \to \mathrm{Pic}(Y) \times \mathrm{Pic}(V)$$

est une rétraction de

$$p_1^* \times p_2^* : \mathrm{Pic}(Y) \times \mathrm{Pic}(V) \to \mathrm{Pic}(Y \times_k V).$$

Les morphismes de schémas $V \to \mathrm{Pic}_{Y/k}$ sont donc bien constants d'image un point de $\mathrm{Pic}_{Y/k}(k)$. □

Remarque 7.2.2. Sous les hypothèses du lemme 7.2.1, pour tout k-tore T, les morphismes de schémas $T \to \mathrm{Pic}_{Y/k}$ sont constants d'image un point k-rationnel de $\mathrm{Pic}_{Y/k}$.

En effet il suffit de montrer que c'est le cas pour $k = k_s$. Or, sur un corps séparablement clos tout tore est déployé. Il suffit donc de montrer que tout morphisme de k_s-schémas $\mathbb{G}_{m,k_s} \to \mathrm{Pic}_{Y_{k_s}/k_s}$ est constant. Ce qui est vrai selon le lemme 7.2.1.

Proposition 7.2.3. *Soit X une forme de $\mathbb{A}^d_k$ ayant un point k-rationnel, et $\overline{X}$ une complétion normale de X. Le foncteur de Picard fppf $\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$ est représenté par un k-groupe localement algébrique commutatif tel que $\mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}$ est une extension d'un k-schéma en groupes de type fini, unipotent et k-ployé par un groupe fini de type multiplicatif.*

Démonstration. Tout d'abord, $\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$ est représenté par un k-groupe localement algébrique (théorème 4.1.8)

On considère le k-schéma en groupes de type fini, commutatif $\mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}$ et une variété abélienne A. Alors, selon [Bri17, Pro. 3.3.4]

$$\mathrm{Hom}_{sch.\ grp.}\left(A, \mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}\right) \cong \mathrm{Hom}_{sch.\ pt.}\left(A, \mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}\right),$$

où $\mathrm{Hom}_{sch.\ grp.}(A, \mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k})$ désigne les morphismes de k-schémas en groupes de A dans $\mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}$ et $\mathrm{Hom}_{sch.\ pt.}(A, \mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k})$ désigne les morphismes de k-schémas de A dans $\mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}$ tels que l'image de l'identité de A soit l'identité de $\mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}$.

De plus

$$\mathrm{Hom}_{sch.\ pt.}\left(A, \mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}\right) \cong \mathrm{Hom}_{sch.\ pt.}\left(A, \mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}\right) \cong \frac{\mathrm{Pic}\left(\overline{X} \times_k A\right)}{p_1^*\mathrm{Pic}(\overline{X}) \times p_2^*\mathrm{Pic}(A)}$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{sch.\ pt.}\left(\overline{X}, \mathrm{Pic}_{A/k}\right) \cong \mathrm{Hom}_{sch.\ pt.}\left(\overline{X}, \mathrm{Pic}^0_{A/k}\right). \quad (7.2.1)$$

Et

$$\mathrm{Hom}_{sch.\ pt.}\left(\overline{X}, \mathrm{Pic}^0_{A/k}\right) \subseteq \mathrm{Hom}_{sch.\ pt.}\left(X, \mathrm{Pic}^0_{A/k}\right).$$

Or $X_{\overline{k}} \cong \mathbb{A}^d_{\overline{k}}$ et $\mathrm{Pic}^0_{A/k} \times_k \overline{k} = \mathrm{Pic}^0_{A_{\overline{k}}/\overline{k}}$, donc selon le lemme 7.2.1, les morphismes de $X_{\overline{k}}$ vers $\mathrm{Pic}^0_{A_{\overline{k}}/\overline{k}}$ sont constants. Donc en particulier $\mathrm{Hom}_{sch.\ pt.}\left(X, \mathrm{Pic}^0_{A/k}\right) = \{0\}$. On peut enfin conclure que $\mathrm{Hom}_{sch.\ grp.}\left(A, \mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}\right) = \{0\}$.

On rappelle qu'une k-variété semi-abélienne est par définition un k-schéma en groupes de type fini qui est extension d'une variété abélienne par un tore. Soit H la plus grande sous-variété semi-abélienne du k-schéma en groupe de type fini commutatif $\mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}$ [Bri17, Lem. 5.6.1 (1)]. Selon la remarque 7.2.2, H est une variété abélienne, or on vient de montrer qu'il n'y a pas de morphisme non trivial d'une variété abélienne dans $\mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}$. Donc $H = \{0\}$, et on en déduit que $\mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}$ est affine et que son plus grand sous-groupe de type multiplicatif est fini [Bri17, Lem. 5.6.2].

Donc $\mathrm{Pic}^0_{\overline{X}/k}$ est une extension d'un k-schéma en groupes de type fini, unipotent U par un groupe fini de type multiplicatif [Bri17, Thm. 5.3.1 (1)]. Enfin, en appliquant une fois de plus le lemme 7.2.1 on obtient que U est k-ployé. □

7.3 Preuve du théorème 7.1.2

On note $\overline{X}$ une complétion régulière de X.

Soit T un k-schéma lisse, alors T est l'union disjointe de ses composantes irréductibles. On écrit

$$T = \coprod_{i \in I} T_i,$$

où les T_i sont les composantes connexes ouvertes de T. Alors pour tout i, les k-schémas $\overline{X} \times_k T_i$ et $X \times_k T_i$ sont réguliers [EGAIV2, Pro. 6.8.5 (i)] et irréductibles [EGAIV2, Cor. 4.5.8 (i)]. On peut donc identifier le groupe des classes de $X \times_k T_i$ avec son groupe de Picard, et de même pour $\overline{X} \times_k T_i$ [Liu06, Pro. 7.2.16].

De plus $\overline{X} \setminus X$ est l'union d'un nombre fini de composantes irréductibles. On note

$$D = \overline{X} \setminus X = \bigcup_{j=1}^{n} D_j.$$

On munit D et les D_j de la structure de sous-schéma fermé réduit.

Étape 1 : Supposons, pour le moment, que k est séparablement clos. Alors les D_j sont géométriquement irréductibles. Pour tout i, on a une suite exacte :

$$0 \to \bigoplus_{j=0}^{n} \mathbb{Z}[D_j \times_k T_i] \to \mathrm{Cl}\left(\overline{X} \times_k T_i\right) \to \mathrm{Cl}\left(X \times_k T_i\right) \to 0.$$

En effet, l'application $\mathrm{Cl}\left(\overline{X} \times_k T_i\right) \to \mathrm{Cl}\left(X \times_k T_i\right)$ est la restriction des diviseurs de Weil de $\overline{X} \times_k T_i$ à $X \times_k T_i$, elle est donc surjective. Son noyau est engendré par les classes des diviseurs irréductibles de $\overline{X} \times_k T_i \setminus X \times_k T_i = D \times_k T_i$, ce sont les $D_j \times_k T_i$ pour $j \in [\![1, n]\!]$ (car D est pure de codimension 1 dans $\overline{X}$ [EGAIV4, Cor. 21.12.7]). De plus, le noyau de l'application $\bigoplus_{j=0}^{n} \mathbb{Z}[D_j \times_k T_i] \to \mathrm{Cl}\left(X \times_k T_i\right)$ est engendré par les diviseurs principaux de $\overline{X} \times_k T_i$ qui n'ont pas de zéro ou de pôle en dehors de $D \times_k T_i$, donc par l'image de div restreinte à $\mathcal{O}\left(X \times_k T_i\right)^*$. Or $\mathcal{O}\left(X \times_k T_i\right)^* = \mathcal{O}\left(T_i\right)^*$. En effet,

$$\mathcal{O}\left(T_i\right)^* \subseteq \mathcal{O}\left(X \times_k T_i\right)^* \subset \mathcal{O}\left(X_{\overline{k}} \times_{\overline{k}} T_{i\overline{k}}\right)^*.$$

Or $X_{\overline{k}} \cong \mathbb{A}^d_{\overline{k}}$, donc $\mathcal{O}\left(X_{\overline{k}} \times_{\overline{k}} T_{i\overline{k}}\right)^* = \mathcal{O}\left(T_{i\overline{k}}\right)^*$. Enfin $\mathcal{O}\left(T_i\right)^* = \mathcal{O}\left(X \times_k T_i\right)^*$ car on peut supposer que T_i est affine, or si R est un anneau intègre, $R^* = R[x_1, \ldots, x_n]^*$. Le noyau de $\bigoplus_{j=0}^{n} \mathbb{Z}[D_j \times_k T_i] \to \mathrm{Cl}\left(X \times_k T_i\right)$ est donc trivial.

On en déduit que la suite

$$0 \to \mathbb{Z}^n \xrightarrow{f} \mathrm{Cl}\left(\overline{X} \times_k T_i\right) \to \mathrm{Cl}\left(X \times_k T_i\right) \to 0$$

est exacte, où f est l'application qui au j-ème élément de la base canonique de $\mathbb{Z}^n$ associe la classe du diviseur de Weil $[D_j \times_k T_i]$.

En identifiant le groupe des classes et le groupe de Picard, on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Z}^n \to \mathrm{Pic}\left(\overline{X} \times_k T_i\right) \to \mathrm{Pic}\left(X \times_k T_i\right) \to 0.$$

En combinant toutes ces suites, pour $i \in I$, on obtient que la suite

$$0 \to \prod_{i \in I} \mathbb{Z}^n \to \mathrm{Pic}\left(\overline{X} \times_k T\right) \to \mathrm{Pic}\left(X \times_k T\right) \to 0$$

est exacte.

De plus, l'intersection de l'image de $p_2^* : \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}\left(\overline{X} \times_k T\right)$ avec l'image de $\prod_{i \in I} \mathbb{Z}^n \to \mathrm{Pic}\left(\overline{X} \times_k T\right)$ est triviale. Donc la suite

$$0 \to \prod_{i \in I} \mathbb{Z}^n \to \frac{\mathrm{Pic}\left(\overline{X} \times_k T\right)}{q_2^* \mathrm{Pic}(T)} \to \frac{\mathrm{Pic}\left(X \times_k T\right)}{p_2^* \mathrm{Pic}(T)} \to 0 \tag{7.3.1}$$

est exacte.

Or $k = k_s$, donc X a un point k-rationnel, et $\overline{X}$ aussi. Selon selon la proposition 4.1.1 :

$$\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}(T) = \frac{\mathrm{Pic}\left(\overline{X} \times_k T\right)}{q_2^* \mathrm{Pic}\left(T\right)}.$$

Pour tout j, le diviseur D_j définit un point k-rationnel de $\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$, on note $\mathbb{Z}_k^n$ le k-schéma constant $\mathbb{Z}^n$ au dessus de k. Le morphisme $\mathbb{Z}_k^n \to \mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$ induit par les diviseurs D_j est un monomorphisme entre deux k-groupes localement algébriques, donc une immersion fermée [SGA3I, VIB, Cor. 1.4.2].

Avec ces notations, on peut réécrire la suite (7.3.1) :

$$0 \to \mathbb{Z}_k^n(T) \to \mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}(T) \to \mathrm{Pic}^+_{X/k}(T) \to 0.$$

On note le lissifié de $\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$ par $\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}$ [CGP15, Lem. C.4.1] : c'est le plus grand sous-groupe fermé de $\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$ qui est lisse. Et pour tout k-schéma lisse T, on a

$$\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}(T) = \mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}(T).$$

Alors le morphisme $\mathbb{Z}_k^n \to \mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$ se factorise en

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_k^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}_{\overline{X}/k} \\
\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

De plus, $\mathbb{Z}_k^n \to \mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}$ est une immersion fermée, donc $\mathbb{Z}_k^n \to \mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}$ est aussi une immersion fermée. Le quotient fppf $\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}/\mathbb{Z}_k^n$ est représenté par un k-schéma en groupes localement algébrique [SGA3I, VIA Thm. 3.3.2]. Notons G ce quotient, alors G^0 est un k-groupe algébrique unipotent qui est k-ployé (proposition 7.2.3 et [Bri17, Lem. 5.6.2]).

On remarque que $\mathbb{Z}_k^n \cap \mathrm{Pic}^{+0}_{\overline{X}/k} = \{0\}$. En effet, $\mathrm{Pic}^{+0}_{\overline{X}/k}$ est un k-groupe algébrique unipotent, il est donc de p^m-torsion pour un certain $m > 0$, les points de $\mathbb{Z}_k^n \cap \mathrm{Pic}^{+0}_{\overline{X}/k}$ sont donc de p^m-torsion. Or $\mathbb{Z}_k^n \to \mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}$ est un monomorphisme, donc $\mathbb{Z}_k^n \cap \mathrm{Pic}^{+0}_{\overline{X}/k} = \{0\}$. On a donc un diagramme commutatif de k-groupes localement algébriques :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}^{+0}_{\overline{X}/k} \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] \arrow[d] & G^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_k^n \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_k^n \arrow[r] \arrow[d] & \pi_0\left(\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}\right) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_0(G) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0, &
\end{tikzcd}$$

où, les trois colonnes et la seconde ligne sont exactes. De plus, le morphisme φ est une immersion fermée (car c'est un monomorphisme) qui est fidèlement plat, c'est donc un isomorphisme. La troisième ligne est constituée de groupes constants. Pour montrer qu'elle est exacte, il suffit de voir que la suite induite sur les $\overline{k}$-points est exacte, ce qui est une conséquence du lemme du serpent. Donc $G^0 \cong \mathrm{Pic}^{+0}_{\overline{X}/k}$ est un k-groupe algébrique unipotent qui est k-ployé.

Montrons maintenant que pour tout k-schéma lisse T, on a $G(T) = \mathrm{Pic}^+_{X/k}(T)$. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe un morphisme de k-schémas qui est une section de $\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k} \to G$.

Choisir une telle section revient à choisir une section de $\pi_0\left(\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}\right) \to \pi_0(G)$. En effet, on considère $s : \pi_0(G) \to \pi_0\left(\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}\right)$ une telle section. Soit $\nu \in \pi_0(G)$, on note $\mu = s(\nu)$. Le morphisme $\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k} \to G$ induit alors un morphisme $f_\nu : \mathrm{Pic}^{+\mu}_{\overline{X}/k} \to G^\nu$ où G^ν désigne la fibre en ν de $G \to \pi_0(G)$ (et de même pour $\mathrm{Pic}^{+\mu}_{\overline{X}/k}$). Comme $\mathrm{Pic}^{+\mu}_{\overline{X}/k}$ est un $\mathrm{Pic}^{+0}_{\overline{X}/k}$-torseur, et G^ν est un G^0-torseur, le morphisme f_ν devient un isomorphisme après extension à $\overline{k}$, c'est donc un isomorphisme [EGAIV2, Pro. 2.7.1]. On a donc défini un morphisme $\coprod f_\nu^{-1} : G \to \mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}$ qui est une section de $\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k} \to G$. Enfin, choisir une section de $\pi_0\left(\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}\right) \to \pi_0(G)$ revient, via l'équivalence de catégories [DG70, II§5 1.7], à choisir une section de $\pi_0\left(\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k}\right)(k) \to \pi_0(G)(k)$ (comme $k = k_s$ toute section est équivariante pour $\mathrm{Gal}(k_s/k) = \{0\}$).

Enfin, montrons que G^+ est algébrique, pour cela il suffit de montrer que $\pi_0(G^+)(k)$ est fini. Tout d'abord, il existe une extension finie purement inséparable K de k tel que $X_K \cong \mathbb{A}^d_K$. Donc $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}^+_{X/k}(k) = G^+(k)$ est de p^m-torsion pour un certain $m \geqslant 0$ (voir [Bri15, Lem. 2.4] ou la proposition 3.6.3). De plus, par construction du lissifié, il y a une immersion fermée $G^+ \to G$. Par propriété universelle du schéma des composantes connexes, cette immersion induit un morphisme de groupes constants $\pi_0(G^+) \to \pi_0(G)$. Le noyau de ce morphisme correspond aux composantes connexes de G^+ qui sont des sous-schémas fermés de G^0, or celui-ci est de type fini sur k, le noyau est donc fini. Selon le théorème de Néron-Severi [SGA6, XIII Thm. 5.1], $\pi_0\left(\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k}\right)(k)$ est un groupe abélien de type fini, donc $\pi_0(G)(k)$ aussi. Donc $\pi_0(G^+)(k)$ est l'extension d'un groupe abélien de type fini par un groupe abélien fini, c'est aussi un groupe abélien de type fini. Or nous avons vu que $\pi_0(G^+)(k)$ est de p^m-torsion, il est donc fini. Donc $\pi_0(G^+)$ est un k-groupe algébrique unipotent fini [DG70, IV §2 Exe. 2.2b)].

Étape 2 : Sur un corps k quelconque. On va montrer la représentabilité de $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ en utilisant un argument de descente Galoisienne.

Tout d'abord, on va définir une action de $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ sur $\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}$. Tout $\sigma \in \Gamma$ induit un k-automorphisme $\mathrm{Spec}(k_s) \to \mathrm{Spec}(k_s)$ que l'on note toujours σ. Soit T un k_s-schéma lisse, on a un diagramme commutatif de k-morphismes :

$$\begin{tikzcd}
X_{k_s} \times_{k_s} T \arrow[r, "id_{X\times T}\times\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X_{k_s} \times_{k_s} T \arrow[d, "p_2"] \\
T \arrow[r, "id_T\times\sigma"] \arrow[d] & T \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(k_s) \arrow[r, "\sigma"'] & \mathrm{Spec}(k_s).
\end{tikzcd}$$

On obtient donc un diagramme commutatif de groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(X_{k_s} \times_{k_s} T) \arrow[r, "(id_{X\times T}\times\sigma)^*"] & \mathrm{Pic}(X_{k_s} \times_{k_s} T) \\
\mathrm{Pic}(T) \arrow[r, "(id_T\times\sigma)^*"'] \arrow[u, "p_2^*"] & \mathrm{Pic}(T). \arrow[u, "p_2^*"']
\end{tikzcd}$$

Donc σ induit un morphisme de groupes noté σ_T^* :

$$\sigma_T^* : \mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}(T) \to \mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}(T).$$

Enfin, selon le lemme de Yoneda, σ induit donc un k-morphisme entre k_s-groupes algébriques que l'on note σ^* :

$$\sigma^* : \mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s} \to \mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}.$$

Le groupe algébrique $\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}$ est un groupe affine. En effet $\mathrm{Pic}^{+0}_{X_{k_s}/k_s}$ est un groupe affine, donc $\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}$ est l'union d'un nombre fini de composantes irréductibles qui sont toutes affines. On note A la k_s-algèbre de type fini tel que $\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s} = \mathrm{Spec}(A)$, soit $V \subset A$ un k_s espace vectoriel de dimension finie tel que V engendre A comme k_s-algèbre, alors il existe un k_s-espace vectoriel de dimension finie W tel que $V \subset W \subset A$ et W est stable pour l'action de Γ (en effet chacun des éléments d'une base de W est stabilisé par un sous-groupe de Γ d'indice fini). Donc il existe un isomorphisme Γ-équivariant entre A et $\mathrm{Sym}(W)/I$ où I est un idéal Γ-stable de $\mathrm{Sym}(W)$. Or $\mathrm{Sym}(W) \cong \mathcal{O}(W^\vee)$ (où $W^\vee$ désigne le dual de W), donc le k_s-schéma $\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}$ s'identifie de façon Γ-équivariante au fermé de l'espace affine associé à $W^\vee$ défini par I. Donc il existe une extension algébrique finie séparable L/k et un L-schéma Y tel que

$$\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s} \cong Y \times_L \mathrm{Spec}(k_s)$$

est un isomorphisme Γ-équivariant de schémas sur k_s.

Et quitte à considérer la clôture normale de L, on peut supposer que L/k est une extension Galoisienne. On a donc une action de $\mathrm{Gal}(L/k)$ sur Y qui relève l'action de $\mathrm{Gal}(L/k)$ sur $\mathrm{Spec}(L)$. Cette action définit une donnée de descente sur Y [BLR90, 6.2 Exe. B]. De plus, comme Y est un L-schéma affine ($Y \times_L \mathrm{Spec}(k_s)$ est affine, donc Y l'est aussi) la descente est effective [BLR90, 6.1 Thm. 6]. On obtient donc un k-schéma Z tel que

$$Z \times_k \mathrm{Spec}(L) \cong Y.$$

On va maintenant montrer que pour tout k-schéma lisse de type fini T, on a

$$Z(T) = \left(\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}(T_{k_s})\right)^\Gamma.$$

Soit $f : T_{k_s} \to Z_{k_s}$ un morphisme Γ-équivariant. Alors, comme T est un k-schéma de type fini et Z est un k-schéma affine de type fini, il existe une extension finie séparable M/k et un morphisme $g : T_M \to Z_M$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T_{k_s} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Z_{k_s} \arrow[d, "q"] \\ T_M \arrow[r, "g"'] & Z_M \end{tikzcd}$$

est commutatif [EGAIV2, Pro. 4.8.13], où $p : T_{k_s} \to T_M$ et $q : Z_{k_s} \to Z_M$ sont les projections. Alors g est $\mathrm{Gal}(M/k)$-équivariant, donc par théorie de la descente il existe $h : T \to Z$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} T_M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z_M \arrow[d] \\ T \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

est commutatif. Et réciproquement, par définition de Z, on a

$$Z(T) \subset \left(\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}(T_{k_s})\right)^\Gamma.$$

Montrons maintenant que Z représente $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$. Pour cela, on considère un L-schéma lisse T. On a défini ci-dessus des actions de Γ sur $\mathrm{Pic}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s})$, sur $\mathrm{Pic}(T_{k_s})$ et sur $\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}(T_{k_s})$. De plus la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(T_{k_s}) \xrightarrow{p_2^*} \mathrm{Pic}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s}) \to \frac{\mathrm{Pic}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s})}{p_2^*\mathrm{Pic}(T_{k_s})} \to 0,$$

admet une rétraction qui est Γ-équivariante. En effet, on choisit un point $e \in X_{k_s}$, alors

$$p_2^* : \mathrm{Pic}(T_{k_s}) \to \mathrm{Pic}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s})$$

admet

$$(e \times id_T)^* : \mathrm{Pic}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s}) \to \mathrm{Pic}(T_{k_s})$$

comme rétraction qui est Γ-équivariante. Donc

$$\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}(T_{k_s})^\Gamma = \frac{\mathrm{Pic}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s})^\Gamma}{p_2^*\mathrm{Pic}(T_{k_s})^\Gamma}.$$

Considérons maintenant la suite exacte des termes de bas degré tirée de la suite spectrale de Hochschild-Serre [SGA4II, VIII Cor. 8.5] :

$$0 \to \mathrm{H}^1\left(k, \mathcal{O}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s})^*\right) \to \mathrm{Pic}(X \times_k T) \to \mathrm{Pic}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s})^\Gamma \to \mathrm{H}^2\left(k, \mathcal{O}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s})^*\right),$$

et

$$0 \to \mathrm{H}^1\left(k, \mathcal{O}(T_{k_s})^*\right) \to \mathrm{Pic}(T) \to \mathrm{Pic}(T_{k_s})^\Gamma \to \mathrm{H}^2\left(k, \mathcal{O}(T_{k_s})^*\right).$$

Or $\mathcal{O}(X_{k_s})^* \cong k_s^*$, donc $\mathcal{O}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s})^* \cong \mathcal{O}(T_{k_s})^*$. Donc

$$\mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}(T_{k_s})^\Gamma = \frac{\mathrm{Pic}(X_{k_s} \times_{k_s} T_{k_s})^\Gamma}{p_2^*\mathrm{Pic}(T_{k_s})^\Gamma} = \frac{\mathrm{Pic}(X \times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)} = \mathrm{Pic}^+_{X/k}(T).$$

Enfin, pour tout k-schéma T lisse de type fini,

$$Z(T) = \mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}(T_{k_s})^\Gamma = \mathrm{Pic}^+_{X/k}(T).$$

Or, si T est un k-schéma lisse quelconque, alors $T = \coprod_{i \in I} T_i$ où les T_i sont des k-schémas lisses de type fini. Et alors,

$$Z(T) = \prod_{i \in I} Z(T_i) = \prod_{i \in I} \mathrm{Pic}^+_{X/k}(T_i) = \mathrm{Pic}^+_{X/k}(T).$$

Donc Z représente le foncteur en groupes $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$, et Z est un k-schéma lisse (car $Z_{k_s} = \mathrm{Pic}^+_{X_{k_s}/k_s}$ est lisse). Donc selon le lemme de Yoneda, Z est un k-schéma en groupes. En conclusion, $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est représenté par un k-schéma en groupes de type fini, unipotent, lisse, commutatif, et dont la composante neutre est k-ployée.

7.4 Premières propriétés du foncteur de Picard restreint

Remarque 7.4.1. Le foncteur Pic^+ est contravariant, en effet, si X est une forme de $\mathbb{A}^d_k$ et Y est une forme de $\mathbb{A}^e_k$ alors un morphisme $f : X \to Y$ induit une transformation naturelle $f^* : \mathrm{Pic}^+_{Y/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X/k}$.

Si on suppose que X et Y admettent des complétions régulières, alors selon le lemme de Yoneda, f induit un morphisme de k-groupes algébriques toujours noté $f^* : \mathrm{Pic}^+_{Y/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X/k}$.

Lemme 7.4.2. *[Invariance par homotopie]*

Soit X une forme de $\mathbb{A}^d_k$. On considère la première projection $p_1 : X \times_k \mathbb{A}^1_k \to X$.

Alors, le morphisme p_1 induit un isomorphisme naturel p_1^* entre les foncteurs $\mathrm{Pic}^+_{X\times\mathbb{A}^1/k}$ et $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$.

De plus si X admet une complétion régulière, alors les foncteurs $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ et $\mathrm{Pic}^+_{X\times\mathbb{A}^1/k}$ sont représentables, et p_1 induit un isomorphisme de k-groupes algébriques :

$$p_1^* : \mathrm{Pic}^+_{X/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X\times\mathbb{A}^1/k}.$$

Démonstration. On considère un k-schéma lisse T, on note $p_T : X \times_k \mathbb{A}^1_k \times_k T \to X \times_k T$. On a un diagramme commutatif de groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(X \times_k T) \arrow[r, "p_T^*"] & \mathrm{Pic}(X \times_k \mathbb{A}^1_k \times_k T) \\
\mathrm{Pic}(T) \arrow[u] \arrow[r, "\sim"'] & \mathrm{Pic}(T) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

De plus p_T^* est injective, en effet elle admet une section

$$e^* : \mathrm{Pic}(X \times_k \mathbb{A}^1_k \times_k T) \to \mathrm{Pic}(X \times_k T)$$

induite par $e \in \mathbb{A}^1_k(k)$. Et p_T^* est surjective [EGAIV4, Cor. 21.4.11], donc p_T^* est une bijection.

Le morphisme $p_1 : X \times_k \mathbb{A}^1_k \to X$ induit donc une transformation naturelle bijective

$$p_1^* : \mathrm{Pic}^+_{X\times\mathbb{A}^1/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X/k}.$$

On considère une complétion régulière $\overline{X}$ de X, alors $\overline{X} \times_k \mathbb{P}^1_k$ est une complétion régulière de $X \times_k \mathbb{A}^1_k$. Les foncteurs $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ et $\mathrm{Pic}^+_{X\times\mathbb{A}^1/k}$ sont donc représentables (théorème 7.1.2).

Selon le lemme de Yoneda, p_1^* induit un isomorphisme de groupes algébriques (toujours noté p_1^*) entre $\mathrm{Pic}^+_{X\times\mathbb{A}^1/k}$ et $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$. □

On va maintenant étudier le foncteur de Picard restreint d'un produit. Le troisième point du lemme suivant généralise le lemme d'invariance par homotopie.

Lemme 7.4.3. *[Foncteur de Picard restreint et produits]*

Soit X une forme de $\mathbb{A}^d_k$ et Y une forme de $\mathbb{A}^e_k$.

(i) Alors $p_1 : X \times_k Y \to X$ et $p_2 : X \times_k Y \to Y$ induisent une transformation naturelle de foncteurs de la catégorie des k-schémas lisses dans la catégorie des groupes

$$p_1^* \times p_2^* : \mathrm{Pic}^+_{X/k} \times \mathrm{Pic}^+_{Y/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X\times Y/k}$$

dont le noyau est trivial, i.e. pour tout k-schéma lisse T, le morphisme de groupes abéliens

$$p_1^* \times p_2^*(T) : \mathrm{Pic}^+_{X/k}(T) \times \mathrm{Pic}^+_{Y/k}(T) \to \mathrm{Pic}^+_{X\times Y/k}(T)$$

est injectif.

(ii) Si X admet une complétion régulière et si Y admet une complétion lisse, alors p_1 et p_2 induisent un morphisme de k-groupes algébriques :

$$p_1^* \times p_2^* : \mathrm{Pic}^+_{X/k} \times_k \mathrm{Pic}^+_{Y/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X\times Y/k}$$

qui est une immersion fermée.

(iii) Si X admet une complétion régulière et si Y admet $\mathbb{P}^e_k$ comme complétion, alors

$$p_1^* \times p_2^* : \mathrm{Pic}^+_{X/k} \times_k \mathrm{Pic}^+_{Y/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X\times Y/k}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La première affirmation est évidente en regardant les points. Montrons la seconde. On note $\overline{X}$ une complétion régulière de X et $\overline{Y}$ une complétion lisse de Y. Alors $\overline{X} \times_k \overline{Y}$ est une complétion régulière de $X \times_k Y$ [EGAIV2, Pro. 6.8.5].

On note $\overline{p}_1 : \overline{X} \times_k \overline{Y} \to \overline{X}$ et $\overline{p}_2 : \overline{X} \times_k \overline{Y} \to \overline{Y}$ les deux projections. Alors $\overline{p}_1$ et $\overline{p}_2$ induisent un morphisme de k-groupes localement algébriques :

$$\overline{p}_1^* \times \overline{p}_2^* : \mathrm{Pic}_{\overline{X}/k} \times_k \mathrm{Pic}_{\overline{Y}/k} \to \mathrm{Pic}_{\overline{X}\times\overline{Y}/k}.$$

qui est un monomorphisme de groupes localement algébriques, donc une immersion fermée [SGA3I, VIB Cor. 1.4.2].

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}_{\overline{X}/k} \times_k \mathrm{Pic}_{\overline{Y}/k} \arrow[r, "\overline{p}_1^*\times\overline{p}_2^*"] & \mathrm{Pic}_{\overline{X}\times\overline{Y}/k} \\
\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k} \times_k \mathrm{Pic}^+_{\overline{Y}/k} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\overline{p}_1^+\times\overline{p}_2^+"'] & \mathrm{Pic}^+_{\overline{X}\times\overline{Y}/k}, \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

où i et j sont des immersions fermées, et $\overline{p}_1^+ \times \overline{p}_2^+$ existe par propriété universelle des lissifiés [CGP15, Lem. C.4.1], c'est aussi une immersion fermée.

On peut supposer que $k = k_s$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
\mathbb{Z}^m_k \arrow[d] & \times_k \mathbb{Z}^n_k \arrow[d] \arrow[rr, "\sim"] & & \mathbb{Z}^{m+n}_k \arrow[d] \\
\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k} \arrow[d] & \times_k \mathrm{Pic}^+_{\overline{Y}/k} \arrow[d] \arrow[rr, "\overline{p}_1^+\times\overline{p}_2^+"] & & \mathrm{Pic}^+_{\overline{X}\times\overline{Y}/k} \arrow[d] \\
\mathrm{Pic}^+_{X/k} \arrow[d] & \times_k \mathrm{Pic}^+_{Y/k} \arrow[d] \arrow[rr, "p_1^*\times p_2^*"] & & \mathrm{Pic}^+_{X\times Y/k} \arrow[d] \\
0 & 0 & & 0,
\end{tikzcd}$$

dont les colonnes sont exactes (comme on l'a vu dans la preuve du théorème 7.1.2). Le morphisme $p_1^* \times p_2^*$ est un monomorphisme de groupes algébriques, c'est donc une immersion fermée, d'où (ii).

Montrons (iii), comme pour (ii), on peut supposer que $k = k_s$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathbb{Z}_k^m \arrow[d] & \times_k \mathbb{Z}_k \arrow[d] \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{Z}_k^{m+1} \arrow[d] \\
\mathrm{Pic}^+_{\overline{X}/k} \arrow[d] & \times_k \mathbb{Z}_k \arrow[d] \arrow[r, "\overline{p}_1^+ \times \overline{p}_2^+"] & \mathrm{Pic}^+_{\overline{X}\times\overline{Y}/k} \arrow[d] \\
\mathrm{Pic}^+_{X/k} \arrow[d] & \times_k \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}_k \arrow[d] \arrow[r, "p_1^* \times p_2^*"] & \mathrm{Pic}^+_{X\times Y/k} \arrow[d] \\
0 & 0 & 0,
\end{tikzcd}$$

dont les colonnes sont exactes. De plus $\overline{p}_1^+ \times \overline{p}_2^+$ est un isomorphisme, donc $p_1^* \times p_2^*$ est aussi un isomorphisme. □

Remarque 7.4.4. Sur un corps non parfait k, il existe des k-groupes unipotents non lisses de dimension strictement positive dont le lissifié est trivial.

En effet, soit G le sous-groupe fermé de $\mathbb{G}_{a,k}^2$ défini par l'équation $x^p = ay^p$ où p est la caractéristique de k et $a \in k \setminus k^p$. Alors G est réduit mais n'est pas géométriquement réduit. De plus $G(k_s) = \{0\}$, donc le lissifié G^+ de G est trivial mais $\dim(G) = 1$.

On ne peut donc pas déduire directement la seconde affirmation du lemme 7.4.3 de la première.

Le lemme suivant généralise la remarque 6.4.6, c'est une conséquence du lemme 7.4.3 (iii).

Lemme 7.4.5. *[Restriction au cas ployé]*

Soit U un k-groupe algébrique unipotent. On rappelle qu'il existe un plus grand sous-groupe distingué k-déployé $U_{dép}$ de U tel que le quotient $U/U_{dép} = U_{pl}$ est k-ployé (théorème 2.6.1).

Alors les foncteurs $\mathrm{Pic}^+_{U_{pl}/k}$ et $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ sont naturellement isomorphes.

De plus, si U_{pl} admet une complétion régulière, alors $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ et $\mathrm{Pic}^+_{U_{pl}/k}$ sont représentables par des k-schémas en groupes algébriques isomorphes.

Démonstration. Selon le lemme 6.4.5, le $U_{\text{dép}}$-torseur $U \to U_{pl}$ est trivial. On rappelle que tout k-groupe algébrique unipotent k-déployé de dimension n est isomorphe comme k-schéma à $\mathbb{A}_k^n$ (théorème 2.1.4). Donc U est isomorphe en tant que k-schéma à $\mathbb{A}_k^n \times_k U_{pl}$ (où $n = \dim(U_{\text{dép}})$). Le résultat voulu est alors une conséquence directe du lemme 7.4.3 (iii). □

Enfin, on s'intéresse au foncteur de Picard restreint d'un torseur sous un groupe algébrique unipotent. Remarquons que dans le dernier point du lemme ci-dessous, si U est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k}$, alors f^* est un isomorphisme (c'est une conséquence du lemme 7.4.3 (iii)).

Lemme 7.4.6. *[Foncteur de Picard restreint et torseurs]*

Soient $f : X \to Y$ un U-torseur, où U est un groupe algébrique unipotent, Y une forme de $\mathbb{A}_k^d$ et X est une forme de $\mathbb{A}_k^e$. On note $a : U \times_k X \to X$ l'action de U sur X et $p_2 : U \times_k X \to X$ la seconde projection.

On a alors une suite exacte de foncteurs en groupes :

$$0 \to \mathrm{Pic}^+_{Y/k} \xrightarrow{f^*} \mathrm{Pic}^+_{X/k} \xrightarrow{a^*-p_2^*} \mathrm{Pic}^+_{U\times X/k},$$

i.e. pour tout k-schéma lisse T, la suite induite sur les T-points est une suite exacte de groupes abéliens.

De plus, si on suppose que U est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$ et que X est une forme de $\mathbb{A}^1_k$, alors f induit un morphisme de groupes algébriques

$$f^* : \mathrm{Pic}^+_{Y/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X/k},$$

qui est une immersion fermée.

Démonstration. La première affirmation est une conséquence de [Bri15, Pro. 2.10].

Montrons la seconde affirmation ; pour cela on peut supposer que $k = k_s$. On note $\overline{Y}$ la complétion régulière de Y. Dans la section 6.3, on a construit une complétion régulière X' de X munie d'un morphisme $\psi' : X' \to \overline{Y}$ tel que $\psi'_*\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_{\overline{Y}}$. Alors $\psi'^* : \mathrm{Pic}_{\overline{Y}/k} \to \mathrm{Pic}_{X'/k}$ est un monomorphisme, c'est donc une immersion fermée [SGA3I, VIA Pro. 2.5.2 (c)]. Donc le morphisme $\psi'^+ : \mathrm{Pic}^+_{\overline{Y}/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X'/k}$ induit par ψ'^* est aussi une immersion fermée. Ainsi, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}^n_k \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}^+_{\overline{Y}/k} \arrow[r] \arrow[d, "\psi'^+"'] & \mathrm{Pic}^+_{Y/k} \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}^m_k \arrow[r] & \mathrm{Pic}^+_{X'/k} \arrow[r] & \mathrm{Pic}^+_{X/k} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

dont les deux lignes sont exactes (voir la preuve du théorème 7.1.2). Donc selon le lemme du serpent, le noyau du morphisme $\mathrm{Pic}^+_{Y/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est un k-groupe algébrique étale. En particulier il est lisse, or son lissifié est trivial. Donc f^* est bien une immersion fermée. □

7.5 $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ et limites projectives

Dans cette section, on note $\lim\limits_{\leftarrow}$ pour désigner une limite projective et $\lim\limits_{\rightarrow}$ pour désigner une limite inductive.

Proposition 7.5.1. *Soit X une forme de $\mathbb{A}^d_k$ qui vérifie les hypothèses du théorème 7.1.2. On considère $(T_i, f_{ij})_I$ un système projectif de k-schémas lisses de type fini sur k tel que pour tout $i \leqslant j \in I$, le morphisme de k-schémas $f_{ij} : T_i \to T_j$ est affine. Alors :*

(i) $T = \lim\limits_{\leftarrow i} T_i$ *existe dans la catégorie des k-schémas,*

(ii) $\mathrm{Pic}(T) = \lim\limits_{\rightarrow i} \mathrm{Pic}(T_i)$ *et* $\mathrm{Pic}(X \times_k T) = \lim\limits_{\rightarrow i} \mathrm{Pic}(X \times_k T_i)$*,*

(iii) $\mathrm{Pic}^+_{X/k}(T) = \frac{\mathrm{Pic}(X\times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)}$.

Démonstration. (*i*) et (*ii*) sont des conséquences de [Sta17, Tag 01YX] et [Sta17, Tag 0B8W].

Montrons (*iii*) : tout d'abord, le foncteur $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est représenté par un k-groupe algébrique (théorème 7.1.2). Donc $\mathrm{Pic}^+_{X/k}(T)$ est bien défini et

$$\mathrm{Pic}^+_{X/k}(T) = \lim_{\rightarrow i} \mathrm{Pic}^+_{X/k}(T_i) = \lim_{\rightarrow i} \frac{\mathrm{Pic}(X \times_k T_i)}{q_i^*\mathrm{Pic}(T_i)} = \frac{\lim\limits_{\rightarrow i} \mathrm{Pic}(X \times_k T_i)}{p_2^* \lim\limits_{\rightarrow i} \mathrm{Pic}(T_i)} = \frac{\mathrm{Pic}(X \times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)}.$$

Pour la première égalité voir [Sta17, Tag 01ZC], la seconde est la définition de $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$, la troisième est une conséquence du fait qu'une limite inductive de suites exactes est toujours exacte, enfin la dernière égalité vient de (ii). $\square$

Remarque 7.5.2. On considère une forme X de $\mathbb{A}^d_k$ ($d \geqslant 0$) qui vérifie les hypothèses du théorème 7.1.2.

(i) On a $k_s = \lim_{\to \lambda} k_\lambda$ où k_λ parcourt les extensions séparables finies de k. Donc selon la proposition 7.5.1 :

$$\mathrm{Pic}^+_{X/k}(k_s) = \mathrm{Pic}(X_{k_s}).$$

(ii) Plus généralement, si F/k est une extension séparable quelconque, alors $F = \lim_{\to \lambda} k_\lambda$ où $F/k_\lambda/k$ parcourt les extensions séparables de type fini de k. Donc selon la Proposition 7.5.1 :

$$\mathrm{Pic}^+_{X/k}(F) = \mathrm{Pic}(X_F).$$

Remarque 7.5.3. (i) On sait que les formes non triviales de $\mathbb{A}^1_k$ ne se déploient pas sur une extension séparable ; T. Kambayashi a montré que les formes non triviales de $\mathbb{A}^2_k$ ne se déploient pas non plus sur une extension séparable [Kam75, Thm. 3]. Et si $d \geqslant 3$, je conjecture que toute forme de $\mathbb{A}^d_k$ qui devient triviale après une extension séparable est triviale sur k. Ce résultat est connu pour les groupes unipotents. Mais pour le moment, il n'y a même pas de preuve que $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ est la seule forme réelle de $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ [Kra95, Rem. 5.4].

(ii) Si X est une forme de $\mathbb{A}^d_k$ qui admet une complétion régulière, alors pour toute extension séparable L/k, le groupe $\mathrm{Pic}(X)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(X_L)$. On peut voir cette propriété comme une conséquence du théorème 7.1.2, mais il est aussi possible de la démontrer directement via la suite spectrale de Hochschild-Serre.

(iii) Si X est une forme de $\mathbb{A}^d_k$ qui admet une complétion régulière et telle que $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est non trivial, alors X ne se déploie pas sur une extension séparable. En effet, si X se déploie sur une extension séparable L/k, alors $\mathrm{Pic}^+_{X_L/L}$ est trivial. Or $\mathrm{Pic}^+_{X_L/L} = \mathrm{Pic}^+_{X/k} \times_k \mathrm{Spec}(L)$ est non trivial.

7.6 Exemples

Exemple 7.6.1. On considère la forme X de $\mathbb{A}^1_k$ définie comme le complémentaire dans $\mathbb{P}^1_k$ d'un point P_∞ dont le corps résiduel est une extension purement inséparable de k.

Alors $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est représenté par le groupe constant $(\mathbb{Z}/[\kappa(P_\infty) : k]\mathbb{Z})_k$.

Exemple 7.6.2. Soit X une forme de $\mathbb{A}^1_k$. On note C sa complétion régulière. Alors $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est représenté par un k-groupe algébrique unipotent de composante neutre $\mathrm{Pic}^0_{C/k}$.

De plus, si X a un point k-rationnel, alors

$$0 \to \mathrm{Pic}^0_{C/k} \to \mathrm{Pic}^+_{X/k} \to \left(\frac{\mathbb{Z}}{p^{r(G)}\mathbb{Z}}\right)_k \to 0.$$

est une suite exacte de groupes algébriques (où $r(G)$ est l'entier défini en 3.1.3). Autrement dit le groupe des composantes irréductibles de $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est le k-groupe constant $\left(\mathbb{Z}/p^{r(G)}\mathbb{Z}\right)_k$.

Exemple 7.6.3. On considère $k = \mathbb{F}_p(a, b)$.

B. Totaro a montré que le k-groupe algébrique unipotent k-ployé U qui est défini, comme sous-groupe de $\mathbb{G}^3_{a,k}$, par l'équation

$$x + ax^p + by^p + z^p = 0$$

vérifie $\mathrm{Pic}(U_L) = \{0\}$ pour toute extension algébrique séparable L/k [Tot13, Exe. 9.7].

Pour cela, il utilise le fait que

$$X = \left\{[x, y, z, w] \in \mathbb{P}^3_k \mid xw^{p-1} + ax^p + by^p + z^p = 0\right\}$$

est une complétion régulière de U. Alors U vérifie les hypothèses du théorème 7.1.2, donc $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est un k-groupe algébrique tel que $\mathrm{Pic}^+_{U/k}(k_s) = \{0\}$. Par densité des points k_s-rationnels, $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est trivial.

Si $p = 2$ alors U est un k-groupe algébrique unipotent rationnel (donc unirationnel).

Supposons $p > 2$, on va montrer que U n'admet pas de sous-groupe unirationnel non trivial. On note $k' = k[b^{1/p}]$, alors $U_{k'}$ est k'-isomorphe à $\mathbb{G}_{a,k'} \times_{k'} G$ où G est le sous-groupe de $\mathbb{G}^2_{a,k'}$ définit par l'équation $x + ax^p + y^p = 0$. Par l'absurde, si U est unirationnel, alors G est aussi unirationnel. Or G est une forme de $\mathbb{G}_{a,k'}$ non triviale, ce n'est pas une courbe rationnelle (lemme 3.3.5), donc ce n'est pas une courbe unirationnelle. De plus, U n'admet aucun sous-groupe unirationnel de dimension 1. En effet, U est k-ployé donc, selon la proposition 2.5.2, un tel sous-groupe est une forme H de $\mathbb{G}_{a,k}$ qui est non triviale. Comme on vient de le voir H n'est pas une courbe rationnelle (lemme 3.3.5), donc H n'est pas une courbe unirationnelle.

Exemple 7.6.4. On a vu dans la section 6.5 que, si k'/k est une extension finie purement inséparable, alors $U = R_{k'/k}(\mathbb{G}_{m,k})/\mathbb{G}_{m,k}$ est un k-groupe algébrique unipotent unirationnel k-ployé tel que

$$\mathrm{Pic}(U) = \mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k}) = \frac{\mathbb{Z}}{[k' : k]\mathbb{Z}}.$$

En fait, U admet une complétion régulière qui est lisse. En effet $U = \mathbb{P}^n_k \backslash V(N)$ est rationnel où $n = [k' : k] - 1$, et $V(N)$ désigne le sous-schéma des zéros de la norme N de k'/k. Donc

$$\mathrm{Pic}^+_{U/k} = \left(\frac{\mathbb{Z}}{[k' : k]\mathbb{Z}}\right)_k.$$

7.7 Torsion du foncteur de Picard restreint

Dans cette section, on va traduire des résultats obtenus précédemment dans le cadre des foncteurs de Picard "restreint".

La proposition suivante est une conséquence des théorèmes 3.6.1 et 5.2.4 et de la densité des points k_s-rationnels dans un k-schéma lisse :

Proposition 7.7.1. *Si X est une forme de $\mathbb{A}^1_k$, alors $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est représentable par un k-groupe algébrique de $p^{n(X)}$-torsion dont la composante neutre est de $p^{n'(X)}$-torsion.*

Si X est une forme non triviale, alors $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est non trivial.

De même, on a la conséquence suivante de la proposition 6.4.7 :

Proposition 7.7.2. *Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe commutatif, qui admet une complétion régulière. Rappelons que selon la proposition 2.6.5 il existe une suite de composition*

$$\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_d = U$$

telle que $\forall i \in [\![1; d]\!]$, $U_i/U_{i-1} \cong G_i$ est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$.

Alors $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est de $p^{n(G_1)+\cdots+n(G_d)}$-torsion.

7.8 Application à $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$

Si A est une variété abélienne, il est bien connu que le groupe $\mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_{m,k})$ des extensions commutatives de A par $\mathbb{G}_{m,k}$ s'identifie avec le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(A)$ des classes d'isomorphismes des faisceaux primitifs (voir [Ser12, VII §3.16 Thm. 6] sur un corps algébriquement clos et [Oor66, Thm. 18.1] sur un corps quelconque). Récemment B. Totaro a démontré l'analogue suivant de ce résultat en remplaçant A par un k-groupe algébrique unipotent commutatif.

Lemme 7.8.1. *[Tot13, Lem. 9.2]*

Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe commutatif. Alors le groupe des extensions commutatives de U par $\mathbb{G}_{m,k}$, noté $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ est le sous-groupe des éléments $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(U)$ tel que la translation $T_a\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{L}$ pour toute extension séparable F/k (pas nécessairement algébrique) et tout $a \in U(F)$.

De plus, $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ peut aussi être décrit comme le noyau du morphisme de groupes

$$m^* - q_1^* - q_2^* : \mathrm{Pic}(U) \to \mathrm{Pic}(U \times_k U),$$

où m désigne la loi de groupe de U et $q_1, q_2 : U \to U \times_k U$ désignent les deux projections.

Ensuite, B. Totaro a utilisé ce lemme pour montrer le résultat suivant sur $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$.

Lemme 7.8.2. *[Tot13, Lem. 9.4]*

Soit U une forme de $\mathbb{G}_{a,k}$. Si k est séparablement clos, alors $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k}) \neq 0$.

Dans cette section, on va interpréter les lemmes [Tot13, Lem. 9.2 et 9.4] en terme du foncteur de Picard restreint.

Dans toute la suite, on considère un k-groupe algébrique unipotent U qui est connexe et commutatif. Et on suppose que U admet une complétion régulière. Alors $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est représenté par un k-groupe algébrique dont la composante neutre est k-ployée (théorème 7.1.2).

On va tout d'abord définir l'action par translation de U sur $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$. Pour cela, on note $m : U \times_k U \to U$ la loi de groupe de U. On considère un k-schéma lisse T, on a alors un diagramme commutatif de k-schémas :

$$\begin{tikzcd}
U \times_k U \times_k T \arrow[r, "m \times id_T"] \arrow[d, "p_{23}"'] & U \times_k T \arrow[d, "p_2"] \\
U \times_k T \arrow[r, "p_2"'] & T.
\end{tikzcd}$$

De plus, si $f \in U(T)$, alors f induit un morphisme de k-schémas $F : T \to U \times_k T$ défini par propriété universelle du produit cartésien :

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "F"] \arrow[drr, bend left, "id_T"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& U \times_k T \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\
& U \arrow[r] & \mathrm{Spec}(k).
\end{tikzcd}$$

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
U \times_k T \arrow[r, "id_U \times F"] \arrow[d, "p_2"'] & U \times_k U \times_k T \arrow[r, "m \times id_T"] \arrow[d, "p_{23}"] & U \times_k T \arrow[d, "p_2"] \\
T \arrow[r, "F"'] \arrow[rr, bend right, "id_T"'] & U \times_k T \arrow[r, "p_2"'] & T.
\end{tikzcd}$$

Donc $(m \times id_T) \circ (id_U \times F)$ induit par tiré en arrière un morphisme de groupes abéliens

$$A_T(f) : \frac{\mathrm{Pic}(U \times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)} \to \frac{\mathrm{Pic}(U \times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)}.$$

Or, par définition de $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$, on a

$$\frac{\mathrm{Pic}(U \times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)} = \mathrm{Pic}^+_{U/k}(T).$$

On a donc obtenu pour tout k-schéma lisse T une application

$$A_T : U(T) \times \mathrm{Pic}^+_{U/k}(T) \to \mathrm{Pic}^+_{U/k}(T). \tag{7.8.1}$$

Montrons que A_T est une action de groupe de $U(T)$ sur $\mathrm{Pic}^+_{U/k}(T)$. On considère f et G dans $U(T)$, alors $f.g$ est le morphisme :

$$f.g : T \xrightarrow{(f,g)} U \times_k U \xrightarrow{m} U.$$

On note $F.G$ le morphisme de k-schémas $T \to U \times_k T$ induit par $f.g$. On a alors le diagramme commutatif (7.8.2). Donc, $A_T(g) \circ A_T(f) = A_T(g.f)$, et A_T est bien une action de groupe abstrait.

La définition de A_T est fonctorielle en T, on a donc obtenu une transformation naturelle A entre le foncteur des points lisses des k-schémas lisses $U \times_k \mathrm{Pic}^+_{U/k}$ et $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$. Comme $U \times_k \mathrm{Pic}^+_{U/k}$ et $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ sont représentables par des k-schémas lisses, selon le lemme de Yoneda, il existe un morphisme de k-schémas

$$A : U \times_k \mathrm{Pic}^+_{U/k} \to \mathrm{Pic}^+_{U/k}.$$

De plus, les deux diagrammes

$$\begin{tikzcd}
U \times_k U \times_k \mathrm{Pic}^+_{U/k} \arrow[r, "m \times id^+"] \arrow[d, "id_U \times A"'] & U \times_k \mathrm{Pic}^+_{U/k} \arrow[d, "A"] \\
U \times_k \mathrm{Pic}^+_{U/k} \arrow[r, "A"] & \mathrm{Pic}^+_{U/k},
\end{tikzcd}$$

et,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}^+_{U/k} \arrow[r, "e \times id^+"] \arrow[dr, "id^+"'] & U \times_k \mathrm{Pic}^+_{U/k} \arrow[d, "A"] \\
& \mathrm{Pic}^+_{U/k},
\end{tikzcd}$$

sont des diagrammes de k-schémas lisses qui induisent des diagrammes commutatifs sur tout k-schéma lisse T. Selon le lemme de Yoneda, ce sont donc des diagrammes commutatifs de k-schémas. Donc A est une action du groupe algébrique U sur $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$.

$$
\begin{tikzcd}
U \times_k T \arrow[r, "id_U \times F"] \arrow[d, equal] & U \times_k U \times_k T \arrow[r, "m \times id_T"] \arrow[d, equal] & U \times_k T \arrow[r, "id_U \times G"] & U \times_k U \times_k T \arrow[r, "m \times id_T"] \arrow[d, equal] & U \times_k T \arrow[d, equal] \\
U \times_k T \arrow[r, "id_U \times F"] \arrow[d, equal] & U \times_k U \times_k T \arrow[r, "id_{U \times U} \times G"] \arrow[d, equal] & U \times_k U \times_k U \times_k T \arrow[r, "m \times id_{U \times T}"] \arrow[d, equal] & U \times_k U \times_k T \arrow[r, "m \times id_T"] & U \times_k T \arrow[d, equal] \\
U \times_k T \arrow[r, "id_U \times F"] \arrow[d, equal] & U \times_k U \times_k T \arrow[r, "id_{U \times U} \times G"] & U \times_k U \times_k U \times_k T \arrow[r, "id_U \times m \times id_T"] & U \times_k U \times_k T \arrow[r, "m \times id_T"] \arrow[d, equal] & U \times_k T \arrow[d, equal] \\
U \times_k T \arrow[rrr, "id_U \times F.G"] \arrow[d, "p_2"'] & & & U \times_k U \times_k T \arrow[r, "m \times id_T"] & U \times_k T \arrow[d, "p_2"'] \\
T \arrow[rrrr, "id_T"'] & & & & T.
\end{tikzcd}
\tag{7.8.2}
$$

Définition 7.8.3. On définit deux foncteurs :

$$\mathrm{Pic^+}^U_{U/k} : \quad (\text{Schémas Lisses}/k)^\circ \quad \to \quad (\text{Groupes})$$

des invariants de $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ sous l'action de U comme suit : pour tout k-schéma lisse T, le groupe $\mathrm{Pic^+}^U_{U/k}(T)$ est le sous-groupe formé des éléments $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^+_{U/k}(T)$ tel que pour tout T-schéma lisse S, l'élément $\mathcal{L}_S$ induit par $\mathcal{L}$ dans $\mathrm{Pic}^+_{U/k}(S)$ est $U(S)$-invariant.

Ensuite

$$\mathrm{Pic}^U_{U/k} : \quad (\text{Schémas}/k)^\circ \quad \to \quad (\text{Groupes})$$

est défini comme le foncteur des invariants du k-schéma $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ pour l'action A du groupe algébrique U (voir [DG70, II §1 Def 3.4d)]).

Pour montrer que $\mathrm{Pic^+}^U_{U/k}$ est représentable, on va utiliser le fait que $\mathrm{Pic}^U_{U/k}$ est représentable [DG70, II §1 Thm. 3.6].

Lemme 7.8.4. *Pour tout schéma lisse T, on a $\mathrm{Pic}^U_{U/k}(T) = \mathrm{Pic^+}^U_{U/k}(T)$.*

Démonstration. On note $\mathrm{Hom}_k\left(U, \mathrm{Pic}^+_{U/k}\right)$ le foncteur :

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Hom}_k\left(U, \mathrm{Pic}^+_{U/k}\right) & (\text{Schémas}/k) & \to & (\text{Groupes}) \\ & T & \mapsto & \mathrm{Hom}_{k-\mathrm{sch}}\left(U \times_k T, \mathrm{Pic}^+_{U/k} \times_k T\right). \end{array}$$

On va définir deux transformations naturelles

$$\mu, \lambda : \mathrm{Pic}^+_{U/k} \to \mathrm{Hom}_k\left(U, \mathrm{Pic}^+_{U/k}\right).$$

Pour tout k-schéma T, et $f \in \mathrm{Pic}^+_{U/k}(T)$, on définit $\lambda(f)$ par propriété universelle du produit cartésien :

$$\begin{tikzcd} U \times_k T \arrow[dr, dotted, "\lambda(f)"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] \arrow[ddr, bend right, "A\circ(id_U\times f)"'] & & \\ & \mathrm{Pic}^+_{U/k} \times_k T \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ & \mathrm{Pic}^+_{U/k} \arrow[r] & \mathrm{Spec}(k). \end{tikzcd}$$

De même pour $\mu(f)$:

$$\begin{tikzcd} U \times_k T \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, dotted, "\mu(f)"] \arrow[drr, bend left, "p_2"] & & \\ T \arrow[dr, bend right, "f"'] & \mathrm{Pic}^+_{U/k} \times_k T \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ & \mathrm{Pic}^+_{U/k} \arrow[r] & \mathrm{Spec}(k). \end{tikzcd}$$

Avec ces notations, selon [DG70, II §1 Pro. 3.5] on a le carré cartésien (de foncteurs de la catégorie des k-schémas dans celle des groupes) suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}^U_{U/k} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_k\left(U, \mathrm{Pic}^+_{U/k}\right) \arrow[d, "\mathrm{diag}"] \\
\mathrm{Pic}^+_{U/k} \arrow[r, "(\lambda,\mu)"] & \mathrm{Hom}_k\left(U, \mathrm{Pic}^+_{U/k}\right) \times \mathrm{Hom}_k\left(U, \mathrm{Pic}^+_{U/k}\right).
\end{tikzcd}$$

Soit T un k-schéma lisse, on considère $f \in {\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}(T)$. Alors $\lambda(f)$ et $\mu(f)$ sont deux morphismes entre deux T-schémas lisses : $U \times_k T \to \mathrm{Pic}^+_{U/k} \times_k T$ qui coïncident sur les S-points pour tout T-schéma lisse S. On peut voir $\lambda(f)$ et $\mu(f)$ comme deux transformations naturelles entre les foncteurs des points :

$$\begin{array}{rccl} U \times_k T : & (\text{Schémas Lisse}/T)^\circ & \to & (\text{Ensembles}) \\ & S & \mapsto & (U \times_k T)(S), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Pic}^+_{U/k} \times_k T : & (\text{Schémas Lisse}/T)^\circ & \to & (\text{Ensembles}) \\ & S & \mapsto & \left(\mathrm{Pic}^+_{U/k} \times_k T\right)(S). \end{array}$$

Par hypothèse, ces deux transformations naturelles sont les mêmes, et les k-schémas $U \times_k T$ et $\mathrm{Pic}^+_{U/k} \times_k T$ sont lisses. Donc, selon le lemme de Yoneda $\lambda(f) = \mu(f)$, on peut donc conclure que $f \in \mathrm{Pic}^U_{U/k}(T)$. Réciproquement, par définition les éléments de $\mathrm{Pic}^U_{U/k}(T)$ sont $U(S)$-invariants pour tout T-schéma lisse S. $\square$

Théorème 7.8.5. *Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe et commutatif. On suppose que U admet une complétion régulière.*

Le foncteur ${\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}$ est représenté par un sous-groupe algébrique de $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$. De plus pour toute extension séparable L/k,

$$ {\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}(L) = \mathrm{Ext}^1(U_L, \mathbb{G}_{m,L}). \tag{7.8.3}$$

Démonstration. Tout d'abord, le foncteur $\mathrm{Pic}^U_{U/k}$ est représenté par un sous-schéma fermé de $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ [DG70, II §1 Thm. 3.6 d)] que l'on note toujours $\mathrm{Pic}^U_{U/k}$. Alors selon le lemme 7.8.4 ${\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}$ est représenté par le lissifié de $\mathrm{Pic}^U_{U/k}$.

Il reste à montrer (7.8.3). Soit L/k une extension séparable, comme

$$ {\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}(L) = {\mathrm{Pic}^+}^{U_L}_{U_L/L}(L),$$

on est ramené au cas où $L = k$. On a vu que ${\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}(k)$ est l'ensemble des éléments $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(U)$ tel que pour k-schéma lisse T, la classe de $\mathcal{L}_T \in \frac{\mathrm{Pic}(U \times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)}$ est $U(T)$-invariante. Soit $f : T \to U$ un morphisme de k-schémas, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
U \times_k T \arrow[r, "id_U \times F"] \arrow[d, equal] & U \times_k U \times_k T \arrow[r, "m \times id_T"] & U \times_k T \arrow[d, "p_1"] \\
U \times_k T \arrow[r, "id_U \times f"'] & U \times_k U \arrow[r, "m"'] & U.
\end{tikzcd}$$

Le morphisme induit par le composé des deux morphismes de la première ligne définit l'action de f sur $\mathrm{Pic}(U \times_k T)$, le morphisme de la seconde ligne est la translation par f notée t_f. Par hypothèse $\mathcal{L}_T = p_1^*\mathcal{L}$ est égal à $A(f, \mathcal{L}_T)$ dans $\frac{\mathrm{Pic}(U\times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)}$. Or selon le diagramme ci-dessus $A(f, \mathcal{L}_T) = t_f^*\mathcal{L}$. Donc $\mathcal{L}$ est invariant par translation par f. Donc selon [Tot13, Lem. 9.2] $\mathcal{L}$ définit bien un élément de $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$.

Réciproquement, soit $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(U)$ qui vérifie $m^*\mathcal{L} = q_1^*\mathcal{L} + q_2^*\mathcal{L}$ où q_1 et q_2 sont les projections $U \times_k U \to U$. Soit T un k-schéma lisse et $f : T \to U$ un morphisme de k-schémas, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
U \times_k T \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, dotted, "id_U \times f"] & T \arrow[dr, bend left, "f"] & \\
U \arrow[dr, bend right, "id_U"'] & U \times_k U \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "q_1"] & U \arrow[d] \\
& U \arrow[r] & \mathrm{Spec}(k).
\end{tikzcd}$$

Donc
$$(id_U \times f)^* m^*\mathcal{L} = (id_U \times f)^* q_1^*\mathcal{L} + (id_U \times f)^* q_2^*\mathcal{L} = p_1^*\mathcal{L} + p_2^* f^*\mathcal{L}$$
dans $\mathrm{Pic}(U \times_k T)$. Donc $A(f, \mathcal{L}) = t_f^*\mathcal{L} = p_1^*\mathcal{L}$ dans $\frac{\mathrm{Pic}(U\times_k T)}{p_2^*\mathrm{Pic}(T)} = \mathrm{Pic}^+_{U/k}(T)$. □

La proposition suivante est une généralisation du lemme [Tot13, 9.4], les arguments de cette démonstration sont les mêmes que ceux de la démonstration de [Tot13, Lem. 9.4].

Proposition 7.8.6. *Soit U un k-groupe algébrique unipotent commutatif qui admet une complétion régulière.*

Si le groupe algébrique $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est non trivial, alors le groupe algébrique $\mathrm{Pic}^{+U}_{U/k}$ est non trivial.

En particulier, si le k-groupe algébrique $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est non trivial, alors le groupe abélien $\mathrm{Ext}^1(U_{k_s}, \mathbb{G}_{m,k_s})$ est non trivial.

Démonstration. Tout d'abord, on considère le cas où $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est un k-groupe algébrique étale. Alors, comme U est connexe, l'action de U sur $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ est triviale, donc $\mathrm{Pic}^{+U}_{U/k} = \mathrm{Pic}^+_{U/k}$.

Sinon, $\mathrm{Pic}^{+0}_{U/k}$ est non trivial [DG70, II §5 Pro. 1.4]. Et l'action de U sur $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ induit une action de U sur $\mathrm{Pic}^{+0}_{U/k}$. On peut donc considérer le produit semi-direct $U \ltimes \mathrm{Pic}^{+0}_{U/k}$, c'est un k-groupe algébrique unipotent. C'est donc un groupe nilpotent, et l'action de U sur $\mathrm{Pic}^{+0}_{U/k}$ est donc nilpotente.

Si F est une extension de k, et si $u \in U(F)$ et $q \in \mathrm{Pic}^{+0}_{U/k}$. On note $(u-1)q$ pour $uq - q$ où uq désigne l'action de u sur q et la loi de groupe de U est notée additivement. Pour tout entier naturel $n > 0$, on note P^n le sous-groupe fermé de $\mathrm{Pic}^{+0}_{U/k}$ engendré par les éléments $(u_1 - 1)\dots(u_n - 1)q$ où $u_i \in U(k_s)$ et $q \in \mathrm{Pic}^{+0}_{U/k}(k_s)$. Alors P^n est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Pic}^{+0}_{U/k}$ qui est lisse et connexe [SGA3I, VIB Pro. 7.1 et Cor. 7.2.1]. On a donc une suite décroissante de sous-groupes $\mathrm{Pic}^{+0}_{U/k} \supset P^1 \supset P^2 \dots$ qui deviennent nuls à partir d'un certain rang. De plus U agit trivialement sur P^n/P^{n+1}.

En particulier, le dernier P^n non trivial est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Pic}^{+0}_{U/k}$ qui est lisse et sur lequel U agit trivialement. Donc $P(k_s)$ est non trivial, et $P(k_s) \subset \mathrm{Pic}^{+U}_{U/k}(k_s)$. Ce qui implique la première affirmation.

La seconde affirmation est une conséquence immédiate de la première affirmation et du théorème 7.8.5. □

Enfin, on étudie la torsion de $\mathrm{Ext}^1(U_k, \mathbb{G}_{m,k})$.

Lemme 7.8.7. *[restriction au cas ployé]*
Soit U un k-groupe algébrique unipotent connexe commutatif. On rappelle qu'il existe un sous-groupe distingué k-déployé $U_{dép}$ de U tel que $U_{pl} = U/U_{dép}$ est k-ployé.
Le morphisme $q : U \to U_{pl}$ induit un morphisme $q^* : \mathrm{Ext}^1(U_{pl}, \mathbb{G}_{m,k}) \to \mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ qui est un isomorphisme.

Démonstration. On a une suite exacte de groupes algébriques

$$0 \to U_{\text{dép}} \to U \to U_{pl} \to 0,$$

qui induit une suite exacte de Ext^1 :

$$\mathrm{Hom}(U_{\text{dép}}, \mathbb{G}_{m,k}) \to \mathrm{Ext}^1(U_{pl}, \mathbb{G}_{m,k}) \xrightarrow{q^*} \mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k}) \to \mathrm{Ext}^1(U_{\text{dép}}, \mathbb{G}_{m,k}).$$

Or $\mathrm{Hom}(U_{\text{dép}}, \mathbb{G}_{m,k}) = \{0\}$ et $\mathrm{Ext}^1(U_{\text{dép}}, \mathbb{G}_{m,k}) = \{0\}$ [SGA3II, Thm. 6.1.1], d'où l'isomorphisme voulu. □

Soit U un groupe algébrique unipotent, on rappelle que U est de p^n-torsion pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand.

Définition 7.8.8. On note $t(U)$ le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que U est de p^n-torsion.

Proposition 7.8.9. *Soit U un groupe algébrique unipotent connexe et commutatif, alors $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ est de $p^{t(U)}$-torsion.*

Démonstration. Soit

$$0 \to \mathbb{G}_{m,k} \to E \xrightarrow{g} U \to 0$$

une extension de U par $\mathbb{G}_{m,k}$. Alors $p^{t(U)}.[E] = \left[\left(p^{t(U)} Id_U\right)^* E\right]$ où $p^{t(U)} Id_U : U \to U$. Or

$$\left(p^{t(U)}\right)^* E = \ker\left(U \times_k E \xrightarrow{p^{t(U)} Id_U - g} U\right) \cong U \times_k \mathbb{G}_{m,k}.$$

Donc $p^{t(U)}.[E] = 0$ dans $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$. □

Exemple 7.8.10. Soit U une forme non triviale de $\mathbb{G}_{a,k}$, alors $\mathrm{Pic}^{+U}_{U/k}$ est représenté par un k-groupe algébrique unipotent dont les points k_s-rationnels sont de p-torsion. Donc, par densité des points k_s-rationnels, $\mathrm{Pic}^{+U\,0}_{U/k}$ est une forme de $\mathbb{G}_{a,k}^n$ (avec $n > 0$ si $p > 2$).

Remarque 7.8.11. Si U est un groupe algébrique unipotent connexe, commutatif et k-ployé, alors $t(U) \leqslant n(U)$. En effet $p^{n(U)} : U \to U$ se factorise en

$$U \xrightarrow{F_U^{n(U)}} U^{p^{n(U)}} \xrightarrow{V^{n(U)}} U$$

où $F_U^{n(U)}$ est le $n(U)$-ème morphisme de Frobenius et $V^{n(U)}$ est le $n(U)$-ème morphisme de décalage [DG70, IV §3 4.10]. Alors $V^{n(U)}$ est un morphisme d'un k-groupe algébrique unipotent k-déployé dans un k-groupe algébrique unipotent k-ployé, il est donc trivial, donc $t(U) \leqslant n(U)$.

Donc si U est un groupe algébrique unipotent connexe, commutatif et k-ployé, alors $\mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ est de $p^{n(U)}$-torsion.

7.9 Application aux formes unirationnelles de l'espace affine

Soient A et B deux foncteurs de la catégorie des k-schémas lisses dans la catégorie des ensembles, on suppose A et B sont munis d'une transformation naturelle $e : \mathrm{Spec}(k) \to A$ et $f : \mathrm{Spec}(k) \to B$. On note $\mathrm{Nat}_{pt}(A, B)$ l'ensemble des transformations naturelles η de A dans B qui vérifient $\eta \circ f = e$.

Lemme 7.9.1. *Soit X une forme de $\mathbb{A}_k^d$ tel que $X(k) \neq 0$. Alors pour tout k-schéma lisse W qui a un point k-rationnel,*

$$\mathrm{Nat}_{pt}\left(W, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right) \cong \frac{\mathrm{Pic}\,(X \times_k W)}{p_1^*\mathrm{Pic}(X) \times p_2^*\mathrm{Pic}\,(W)}.$$

En particulier, si Y est une forme de $\mathbb{A}_k^c$ tel que $Y(k) \neq 0$, alors

$$\mathrm{Nat}_{pt}\left(Y, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right) \cong \mathrm{Nat}_{pt}\left(X, \mathrm{Pic}^+_{Y/k}\right).$$

Démonstration. Tout d'abord, comme W est lisse, selon le lemme de Yoneda :

$$\mathrm{Nat}\left(W, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right) = \mathrm{Pic}^+_{X/k}(W) = \frac{\mathrm{Pic}(X \times_k W)}{p_2^*\mathrm{Pic}(W)}.$$

Soit e un point k-rationnel de W, e induit un morphisme $e^* : \mathrm{Pic}^+_{X/k}(W) \to \mathrm{Pic}(X)$. Et de même pour f, un point k-rationnel de X. Alors $\mathrm{Nat}_{pt}\left(W, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right)$ est le noyau de e^*.

Or $\ker(e^*) = \ker\left(\frac{\mathrm{Pic}(X \times_k W)}{p_2^*\mathrm{Pic}(W)} \to \mathrm{Pic}(X)\right)$, et $p_1^* \times p_2^* : \mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(W) \to \mathrm{Pic}(X \times_k W)$ admet pour rétraction $e^* \times f^* : \mathrm{Pic}(X \times_k W) \to \mathrm{Pic}(X) \times \mathrm{Pic}(W)$.

Donc $\mathrm{Nat}_{pt}\left(W, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right)$ est isomorphe à

$$\frac{\mathrm{Pic}\,(X \times_k W)}{p_1^*\mathrm{Pic}(X) \times p_2^*\mathrm{Pic}\,(W)}.$$

□

Remarque 7.9.2. On a déjà vu dans l'introduction de la section 7.8 qu'il y a des analogies entre les groupes unipotents et les variétés abéliennes. L'idée du lemme 7.9.1 vient aussi d'une analogie avec les variétés abéliennes.

En effet, si A et B sont deux k-variétés abéliennes, alors $\mathrm{Pic}^0_{A/k}$ et $\mathrm{Pic}^0_{B/k}$ sont deux variétés abéliennes et avec les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 7.9.1 on peut montrer que

$$\mathrm{Hom}_{pt}\left(A, \mathrm{Pic}^0_{B/k}\right) \cong \mathrm{Hom}_{pt}\left(B, \mathrm{Pic}^0_{A/k}\right).$$

Dans le cas des variétés abéliennes, on a en plus un résultat de rigidité (voir par exemple [Bri17, Pro. 3.3.4]) qui implique que

$$\mathrm{Hom}_{pt}\left(A, \mathrm{Pic}^0_{B/k}\right) = \mathrm{Hom}_{sch-grp}\left(A, \mathrm{Pic}^0_{B/k}\right).$$

On obtient donc un isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{sch-grp}\left(A, \mathrm{Pic}^0_{B/k}\right) \cong \mathrm{Hom}_{sch-grp}\left(B, \mathrm{Pic}^0_{A/k}\right).$$

Il est intéressant de voir si l'analogie se poursuit plus loin. En général, il n'y a pas de rigidité des k-groupes algébriques unipotents. Par exemple il n'y a jamais de rigidité pour les k-groupes algébriques unipotents k-déployés de dimension strictement supérieure à 1. Pour les k-groupes algébriques unipotent k-ployés commutatifs la question semble complexe.

On va maintenant appliquer le lemme 7.9.1 à l'étude du foncteur de Picard restreint des formes unirationnelles de $\mathbb{A}_k^d$.

Théorème 7.9.3. *Soit X une forme unirationnelle de $\mathbb{A}_k^d$. On suppose que X admet une complétion régulière. Alors :*

(i) $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ *est un k-groupe algébrique unipotent étale.*

(ii) $\mathrm{Pic}(X)$ *est un groupe fini.*

Démonstration. Pour montrer (i), on peut supposer que $k = k_s$, donc que X a un point k-rationnel. Tout d'abord, selon le théorème 7.1.2, $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est représenté par un k-groupe algébrique unipotent, donc ${\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}$ est une forme de $\mathbb{A}_k^e$. Selon le lemme 7.9.1,

$$\mathrm{Nat}_{pt}\left(X, \mathrm{Pic}^+_{{\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}/k}\right) \cong \mathrm{Nat}_{pt}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right).$$

Or pour tout ouvert W de $\mathbb{A}_k^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il n'y a pas de transformation naturelle de W (vu comme son foncteur des points) dans $\mathrm{Pic}^+_{{\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}/k}$ non constante. En effet, selon le lemme 7.9.1

$$\mathrm{Nat}_{pt}\left(W, \mathrm{Pic}^+_{{\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}/k}\right) \cong \frac{\mathrm{Pic}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k} \times_k W\right)}{p_1^*\mathrm{Pic}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}\right) \times p_2^*\mathrm{Pic}(W)}.$$

Or $\mathrm{Pic}(W) = \{0\}$, et

$$p_1^* : \mathrm{Pic}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}\right) \to \mathrm{Pic}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k} \times_k W\right)$$

est un isomorphisme. En effet le morphisme de groupes p_1^* est injectif car p_1 admet une section donnée par un point rationnel de W, et p_1^* est surjectif [EGAIV4, Cor. 21.4.11].

On obtient que $\mathrm{Nat}_{pt}\left(W, \mathrm{Pic}^+_{{\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}/k}\right) = \{0\}$. Donc $\mathrm{Nat}_{pt}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right)$ est trivial, or selon le lemme de Yoneda

$$\mathrm{Nat}_{pt}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right) = \mathrm{Hom}_{sch-pt}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right),$$

où $\mathrm{Hom}_{sch-pt}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right)$ désigne les morphismes de k-schémas de ${\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}$ dans $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ tel que l'image de l'élément neutre ${\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}$ est l'élément neutre de $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$.

Enfin

$$\mathrm{Hom}_{sch-pt}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}, \mathrm{Pic}^+_{X/k}\right) = \mathrm{Hom}_{sch-pt}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}, {\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}\right).$$

Donc $\mathrm{Hom}_{sch-pt}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}, {\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}\right) = \{0\}$, or si ${\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}$ est non trivial il y a au moins deux morphismes différents dans $\mathrm{Hom}_{sch-pt}\left({\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}, {\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}\right)$: l'identité de ${\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}$ et le morphisme qui envoie ${\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}$ sur le neutre de ${\mathrm{Pic}^+}^0_{X/k}$. On en déduit que $\mathrm{Pic}^+_{X/k}$ est un k-groupe algébrique étale [DG70, II §5 Pro. 1.4], d'où (i). Enfin (ii) est une conséquence immédiate de (i). □

Corollaire 7.9.4. *Soit U un k-groupe algébrique unipotent commutatif et unirationnel. On suppose que U admet une complétion régulière. Alors :*

(i) Le k-groupe algébrique unipotent $\mathrm{Pic}^+_{U/k}$ *est étale.*

(ii) $\mathrm{Pic}^+_{U/k} = {\mathrm{Pic}^+}^U_{U/k}$.

(iii) $\mathrm{Pic}(U) = \mathrm{Ext}^1(U, \mathbb{G}_{m,k})$ *et ce groupe est fini et de* $p^{t(U)}$*-torsion.*

Démonstration. Tout d'abord, (i) est un cas particulier du théorème 7.9.3.

Ensuite, (ii) est une conséquence du fait que toute action d'un k-groupe algébrique connexe sur un k-schéma étale est triviale, et de la définition de $\mathrm{Pic}^{+U}_{U/k}$.

Enfin, (iii) est une conséquence de (i), (ii), du théorème 7.8.5 et de la proposition 7.8.9. $\square$

Chapitre 8

Bibliographie

[Ach17] R. Achet : The Picard group of the forms of the affine line and of the additive group. *J. of Pure and Applied Algebra*, 221(11):2838 – 2860, 2017.

[Art69] M. Artin : Algebraization of formal moduli I. *In Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira*, volume 29 de *Princeton Mathematical Series*, pages 21–71. University of Tokyo Press, Princeton University Press, 1969.

[Asa05] T. Asanuma : Purely inseparable k-forms of affine algebraic curves. *In Affine algebraic geometry. Contributions of the special session on affine algebraic geometry at the 1st joint AMS-RSME meeting, Seville, Spain, June 18–21, 2003*, pages 31–46. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 2005.

[AV96] D. Abramovich et J. F. Voloch : Lang's Conjectures, Fibered Powers, and Uniformity. *New York J. Math.*, 2:20–34, 1996.

[Bas68] H. Bass : *Algebraic K-theory.* Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, 1968.

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud : *Néron models*, volume 21 de *Ergeb. Math. Grenzgeb.* Springer-Verlag, 1990.

[Bor12] A. Borel : *Linear algebraic groups*, volume 126 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, 2012.

[Bou62] N. Bourbaki : *Algèbre commutative. Chapitres 1 à 4.* Éléments de mathématique. Paris : Hermann, 1961-1962.

[Bou06] N. Bourbaki : *Algèbre commutative. Chapitres 5 à 7.* Éléments de mathématique. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006. Réimpression de l'original de 1985.

[Bou07] N. Bourbaki : *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4 à 6.* Éléments de mathématique. Berlin : Springer, 2007. Réimpression de l'original de 1968.

[Bri14] M. Brion : Which algebraic groups are Picard varieties ? *Science China Math.*, 58:461–478, 2014.

[Bri15] M. Brion : On linearization of line bundles. *J. Math. Sci., Tokyo*, 22(1):113–147, 2015.

[Bri17] M. Brion : Some structure theorems for algebraic groups. *In Algebraic Groups : Structure and Actions*, volume 94 de *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, pages 53–125. Amer. Math. Soc., 2017.

[CGP15] B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad : *Pseudo-reductive groups*, volume 26 de *New Mathematical Monographs.* Cambridge University Press, seconde édition, 2015.

[CP14] V. Cossart et O. Piltant : Resolution of singularities of arithmetical threefolds ii. *arXiv :1412.0868*, 2014.

[CP16] B. Conrad et G. Prasad : *Classification of pseudo-reductive groups.* Princeton, NJ : Princeton University Press, 2016.

[CS87] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc : Principal homogeneous spaces under flasque tori ; applications. *J. Algebra*, 106:148–205, 1987.

[Del74] P. Deligne : Théorie de Hodge : III. *Publ. Math. de l'IHÉS*, 44:5–77, 1974.

[DG70] M. Demazure et P. Gabriel : *Groupes algébriques Tome 1.* Masson et Cie / North Holland, Paris/Amsterdam, 1970.

[Dol82] I. Dolgachev : *"Weighted projective varieties", Group actions and vector fields (Vancouver, B.C., 1981)*, volume 956 de *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, 1982.

[EGAI] A. Grothendieck et J. Dieudonné : *Éléments de Géométrie Algébrique I*, volume 166 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1971.

[EGAII] A. Grothendieck et J. Dieudonné : *Éléments de géomètrie algébrique II, Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, volume 8 de *Publications Mathématiques.* Institut des hautes études scientifiques, 1961.

[EGAIII2] A. Grothendieck et J. Dieudonné : *Éléments de géomètrie algébrique III, Étude cohomologique des faisceaux cohérents seconde partie*, volume 17 de *Publications Mathématiques.* Institut des hautes études scientifiques, 1963.

[EGAIV2] A. Grothendieck et J. Dieudonné : *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie*, volume 24 de *Publications Mathématiques.* Institut des hautes études scientifiques, 1965.

[EGAIV4] A. Grothendieck et J. Dieudonné : *Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie*, volume 32 de *Publications Mathématiques.* Institut des hautes études scientifiques, 1967.

[Eis95] D. Eisenbud : *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, volume 150 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[EKM08] R. S. Elman, N. Karpenko et A. Merkurjev : *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, volume 56 de *Colloquium Publications.* Amer. Math. Soc., 2008.

[Fer03] D. Ferrand : Conducteur, descente et pincement. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 131 (4):553–585, 2003.

[FH97] C. Faith et D. Herbera : Endomorphism rings and tensor products of linearly compact modules. *Comm. Algebra*, 25(4):1215–1255, 1997.

[Gre86] C. Greither : Forms of the affine line and their genus. *J. of Pure and Applied Algebra*, 39:105–118, 1986.

[Gro58] A. Grothendieck : Torsion homologique et sections rationnelles. *Séminaire Claude Chevalley 3*, 1958. exposé n°5.

[Gro62] A. Grothendieck : *Fondements de la géométrie algébrique.* Secrétariat mathématique, 1962. Extraits du Séminaire Bourbaki, 1957-1962.

[GW10] U. Görtz et T. Wedhorn : *Algebraic geometry I. Schemes. With examples and exercises.* Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg+Teubner Verlag, 2010.

[Har13] R. Hartshorne : *Algebraic geometry*, volume 52 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, 2013. Réimpression de l'original de 1977.

[How12] S. Howe : Higher genus conterexamples to relative Manin-Mumford. `http://algant.eu/documents/theses/howe.pdf`, 2012. Mémoire de Master dirigé par S. J. Edixhoven.

[Hur16] M. Huruguen : Special reductive groups over an arbitrary field. *Transformation Groups*, 21(4):1079–1104, 2016.

[Kam75] T. Kambayashi : On the absence of nontrivial separable forms of the affine plane. *J. of algebra*, 35:449–456, 1975.

[KKLV89] F. Knop, H. Kraft, D. Luna et T. Vust : Local properties of algebraic group actions. Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, DMV Semin. 13, 63-75, 1989.

[Kle05] S. L. Kleiman : The Picard scheme. *In Fundamental Algebraic Geometry : Grothendieck's FGA Explained*, volume 123 de *Math. Survey Monogr.* Amer. Math. Soc., Providence, 2005.

[KM77] T. Kambayashi et M. Miyanishi : *On forms of the affine line over a field.*, volume 10 de *Lectures in Mathematics. Dept. of Mathematics, Kyoto University.* Tokyo : Kinokuniya Book-Store Co., Ltd., 1977.

[KMT74] T. Kambayashi, M. Miyanishi et M. Takeuchi : *Unipotent Algebraic groups*, volume 414 de *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, 1974.

[Kra95] H. Kraft : Challenging problems on affine n-space. *Séminaire Bourbaki*, 37:295–317, 1994-1995.

[Lip78] J. Lipman : Desingularization of two-dimensional schemes. *Ann. Math. (2)*, 107:151–207, 1978.

[Liu06] Q. Liu : *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, volume 6 de *Oxford graduate texts in mathematics.* Oxford University Press, seconde édition, 2006.

[MFK94] D. Mumford, J. Fogarty et F. Kirwan : *Geometric invariant theory*, volume 34 de *Ergeb. Math. Grenzgeb.* Springer, troisième édition, 1994.

[Mil71] J. Milnor : *Introduction to Algebraic K-Theory*, volume 72 de *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1971.

[Mur64] J. P. Murre : On contravariant functors from the category of preschemes over a field into the category of abelian groups. *Publ. Math. IHES*, 23:5–43, 1964.

[Ngu11] D. T. Nguyễn : On Galois cohomology of unipotent algebraic groups over local fields. *J. Algebra*, 344(1):47–59, 2011.

[Ngu13] D. T. Nguyễn : On the essential dimension of unipotent algebraic groups. *J. of Pure and Applied Algebra*, 217(3):432 – 448, 2013.

[Ngu16] D. T. Nguyễn : A note on special unipotent groups. Unpublished note, 2016.

[Oes84] J. Oesterlé : Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p. *Invent. math.*, 78:13–88, 1984.

[Oor62] F. Oort : Sur le schéma de Picard. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 90:1–14, 1962.

[Oor66] F. Oort : *Commutative group schemes*, volume 15 de *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, première édition, 1966.

[Ray70] M. Raynaud : Spécialisation du foncteur de Picard. *Publ. Math. de l'I.H.E.S.*, 38:27–76, 1970.

[Ros55] M. Rosenlicht : Automorphisms of function fields. *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 79(1):1–11, 1955.

[Ros56] M. Rosenlicht : Some basic theorems on algebraic groups. *Amer. J. of Math.*, 78(2):401–443, 1956.

[Ros63] M. Rosenlicht : Questions of rationality for solvable algebraic groups over non-perfect fields. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 62(1):97–120, 1963.

[Rus70] P. Russell : Forms of the affine line and its additive group. *Pacific J. of Math.*, 32:527–539, 1970.

[San81] J.-J. Sansuc : Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres. *J. für die reine und angewandte Mathematik*, 327:12–80, 1981.

[Ser58] J.-P. Serre : Espaces fibrés algébriques. *Séminaire Claude Chevalley 3*, 1958. exposé n°1.

[Ser12] J.-P. Serre : *Algebraic groups and class fields*, volume 117 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Science & Business Media, 2012.

[SGA3I] A. Grothendieck et M. Demazure : *Schémas en groupes. Tome I, Propriétés générales des schémas en groupes*, volume 7 de *Documents mathématiques*. Société mathématique de France, 2011. Actes du 3e séminaire de géométrie algébrique tenu au Domaine du Bois-Marie, Bures-sur-Yvette, de 1962 à 1964.

[SGA3II] A. Grothendieck et M. Demazure : *Schémas en groupes. Tome II, Groupes de type multiplicatif et structure des schémas en groupes généraux*, volume 152 de *Lecture notes in mathematics*. Springer, 1970. Actes du 3e séminaire de géométrie algébrique tenu au Domaine Du Bois Marie, Bures-sur-Yvette, de 1962 à 1964.

[SGA4II] M. Artin, A. Grothendieck, J. L. Verdier, P. Deligne et B. Saint-Donat, éditeurs. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas Tome 2.*, volume 270 de *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1972. Actes du 4e séminaire de géométrie algébrique tenu au Domaine du Bois-Marie, Bures-sur-Yvette, de 1963 à 1964.

[SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie, éditeurs. *Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch*, volume 225 de *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1971. Actes du 6e séminaire de géométrie algébrique tenu au Domaine Du Bois Marie, Bures-sur-Yvette, de 1966 à 1967. Avec la collaboration de D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussilia, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P. Serre.

[Sta17] The Stacks Project Authors : *Stacks Project*. `http://stacks.math.columbia.edu`, 2017.

[Sum75] H. Sumihiro : Equivariant completion II. *J. Math. Kyoto Univ.*, 15(3):573–605, 1975.

[Tit67] J. Tits : *Lectures on algebraic groups*. Yale University, Department of Mathematics, 1966-1967. Mimeographed Notes.

[Tot13] B. Totaro : Pseudo-abelian varieties. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 46(5):693–721, 2013.