Université Joseph Fourier
Année universitaire 2013/2014

L3 - Parcours A

EXAMEN GGMAT36e

21 mai 2015

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer les inégalités de Cauchy.
2. Enoncer le théorème de Montel.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. En intégrant e^{2iaz-z^2} le long du rectangle de sommets 0, R, $R+ia$, ia, et en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(2ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2}.$$

(On admettra la formule $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2$.)

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière vérifiant $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on note $g(z) = f(1/z)$.

1. Montrer que la singularité de g au point 0 est nécessairement un pôle. En déduire l'existence d'une fonction polynôme P tel que la fonction $h : z \mapsto f(1/z) - P(1/z)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que f est une fonction polynôme. Indication : on regardera le comportement de $f - P$.

Exercice 4

1. Montrer que la formule
$$F(z) = \prod_{k=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{2^k}\right)$$
définit une fonction entière.
2. Pourquoi F est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est le rayon de convergence ?
3. Donner une formule récursive pour les coefficients du développement en série entière en remarquant que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = (1-z)F(z/2)$.

T.S.V.P.

Problème
Soit D le disque unité ouvert $D = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}$ et C le cercle unité : $C = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$.

1. **(Démonstration du lemme de Schwarz)** Soit h une fonction holomorphe sur D, telle que $h(0) = 0$ et $|h(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$. En considérant $g : z \mapsto h(z)/z$ de $D^* = D \backslash \{0\}$ dans $\mathbb{C}$ et en utilisant le principe du maximum, montrer les inégalités $|h(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D^*$ et $|h'(0)| \leq 1$. Montrer que s'il existe $z \in D^*$ tel que $|h(z)| = |z|$ ou si $|h'(0)| = 1$, alors il existe $\lambda \in C$ tel que pour tout $z \in D$, $h(z) = \lambda z$.

2. Pour $a \in D$, on considère l'application homographique Φ_a :
$$\Phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$
Montrer que Φ_a est partout définie sur $\overline{D}$, que $\Phi_a(C) \subset C$, puis que Φ_a est une bijection de D sur lui-même, de réciproque Φ_{-a}.

3. Soit f une fonction holomorphe de D dans lui-même. Quelle est l'image de 0 par $h = \Phi_{f(a)} \circ f \circ (\Phi_a)^{-1}$? En déduire que pour tout z de D,
$$\left|\frac{f(z) - f(a)}{1 - \overline{f(a)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right|$$
puis
$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |f(a)|^2}{1 - |a|^2}$$
(lemme de Schwarz-Pick).

4. Soit E une fonction continue de $\overline{D}$ dans $\mathbb{C}$ et holomorphe sur D. On dira que E est unitaire si $|E(z)| = 1$ pour tout $z \in C$.
   (a) Montrer qu'une fonction unitaire n'a qu'un nombre fini de zéros.
   (b) Montrer qu'une fonction unitaire sans zéro est une constante.
   (c) Montrer qu'une fonction unitaire ayant pour zéros $a_1, \ldots, a_n$, (chacun étant répété avec son ordre de multiplicité) s'écrit
   $$E = c \prod_{j=1}^{n} \Phi_{a_j},$$
   où $c \in C$ est une constante.

5. Soit f holomorphe bornée sur D, non identiquement nulle et $M = \sup\{|f(z)|\ ;\ z \in D\}$. Soit $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ sur D.
   (a) Montrer que si $E : \overline{D} \to \mathbb{C}$ est une fonction unitaire telle que f/E se prolonge en une fonction holomorphe sur D, alors
   $$\forall z \in D,\ |f(z)| \leq M|E(z)|.$$
   (b) Dans la suite, on suppose que f a une infinité de zéros, et on note $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ la suite des zéros de f dans D, chacun étant répété avec son ordre de multiplicité. Montrer que
   $$\forall n \geq 1,\ |f(0)| \leq M|a_1||a_2| \cdots |a_n|.$$
   (c) En déduire que si $f(0) \neq 0$, la série $\sum_{n \geq 1}(1 - |a_n|)$ converge.
   (d) Montrer que ce dernier résultat reste vrai si $f(0) = 0$.