Université Joseph Fourier – Grenoble I

L3 : Licence Sciences et Technologies

UE Fonctions Holomorphes : examen, 21 juin 2012, 9–12 h.

Durée 3h. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

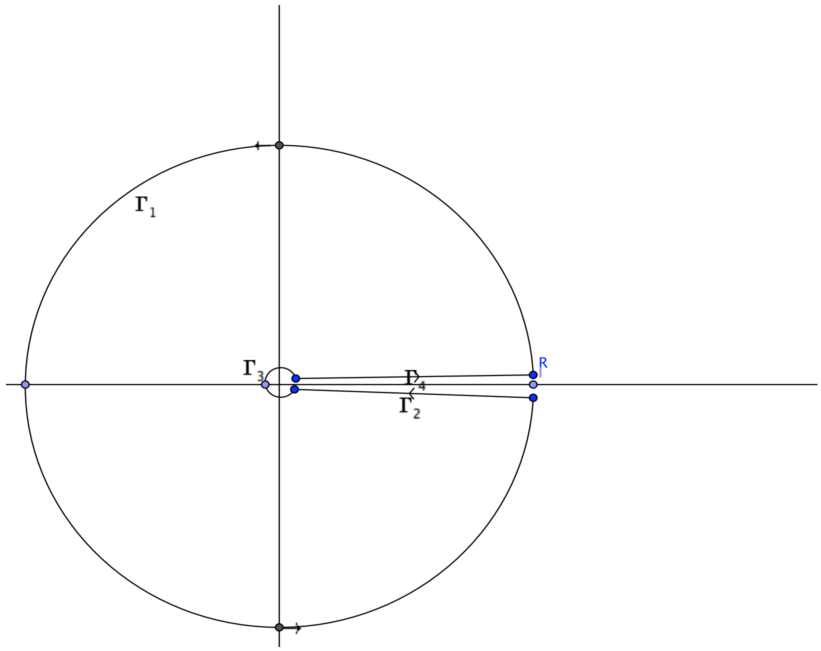
Autour du cours

1. Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses :
   (a) $z \mapsto \sqrt{z}$ est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$.
   (b) Une fonction holomorphe est conforme.
   (c) Une fonction entière est entièrement déterminée par ses zéros (avec leurs multiplicités.)
   (d) La partie réelle d'une fonction holomorphe est une fonction harmonique.
2. Énoncer le principe du maximum.
3. Montrer : chaque fonction holomorphe a une primitive dans un voisinage de chaque point de son domaine de définition. Est-ce que cela reste vrai globalement ?

Exercices

1. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine D. On suppose que f est non-constante et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$. Montrer : $|f(z)|$ n'atteint pas son minimum dans D.
2. Montrer que la fonction $\dfrac{1}{\sin(z)}$ est méromorphe. Déterminer ses singularités (sa nature, et si c'est un pôle, son ordre).

3. Par la suite on utilise la détermination de $\sqrt{z}$ dans le domaine $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$. telle que $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$. On considère le contour Γ suivant :



Le chemin Γ_1 est un cercle incomplet de rayon R ; et Γ_3 est un cercle incomplet de rayon ϵ ; les chemins Γ_2 et Γ_4 sont les deux segments manquants puis sur les demi-droites d'angles $2\pi - \eta$ et η. On pose

$$I_k := \int_{\Gamma_k} \frac{\sqrt{z}}{1+z^2} dz.$$

(a) Montrer que $\lim_{R\to\infty} I_1 = 0$ et que $\lim_{\epsilon\to 0} I_3 = 0$.

(b) Déterminer la constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $I_2 + I_4 \to C \int_\epsilon^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ lorsque l'angle η tend vers zéro. Attention : il faut justifier l'interversion de limite.

(c) Calculer les résidus en $\pm\mathrm{i}$ de $\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}$.

(d) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$