Université Joseph Fourier – Grenoble I

L3 : Licence Sciences et Technologies

UE Fonctions Holomorphes : examen, 22 mai 2012, 9–12 h.

Durée 3h. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Autour du cours

1. Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses :
   (a) $z \mapsto \log(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$.
   (b) Une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est différentiable (aus sens réel) est holomorphe.
   (c) Une fonction entière est méromorphe.
   (d) La fonction $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ est harmonique.
2. Soit $f(z)$ une fonction rationnelle. Décrire le sous-domaine maximal de $\mathbb{C}$ sur lequel f est holomorphe ; sous quelle condition f est-elle holomorphe en ∞ ?
3. Rappeler le théorème sur les développements de Laurent. Discuter la nature des singularités de $\dfrac{1}{z^n - 1}$, $e^{1/z}$ et $\dfrac{\sin z}{z}$.
4. Soit $S \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble dénombrable sans points d'accumulation dans $\mathbb{C}$. Supposons que f_1 et f_2 sont deux fonctions entières ayant des zéros d'ordre 1 dans tout point $s \in S$ et nulle part ailleurs. Que peut-on dire de la relation entre f_1 et f_2 ? Donner une indication de la preuve de votre assertion.

Exercices

1. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f(z) = u + \mathrm{i}v$ telles que

$$u = 3 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

   Ici $z = x + \mathrm{i}y$. Indication : on pourra utiliser que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

2. (a) Rappeler le théorème de Rouché ;

   (b) Soit f holomorphe dans un domaine contenant le disque unité $D := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ et tel que $|f(z)| < 1$ sur D. Montrer que $f(z) = z$ a une unique solution dans D ;

3. Soit $f(z)$ méromorphe avec unique pôle d'ordre 1 en $z = 0$ avec résidu r. On pose $g(z) = f(z) + f(-z)$. Soit $\gamma_\rho = \rho e^{2\pi \mathrm{i} t}$, $0 \leq t \leq 1$ le cercle de rayon ρ et de centre 0 et $\gamma_\rho^\pm$ les demi-cercles correspondants (avec même orientation) dans les demiplans supérieur/inférieur.

   (a) Montrer que $g(z)$ est une fonction entière. Déduire que

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho^\pm} g(z)dz = 0;$$

   (b) Montrer que $\int_{\gamma_\rho^+} f dz = -\int_{\gamma_\rho^-} f(-z)dz$. Utiliser (a) pour en déduire que

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\gamma_\rho^+} f(z)dz = \lim_{\rho \to 0} \int_{\gamma_\rho^-} f(z)dz = \pi \mathrm{i} r;$$

   (c) On suppose qu'il y a des constantes $\alpha > 1$ et $M > 0$ telles que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^\alpha}, \quad |z| \gg 0.$$

   Montrer que

$$\int_0^\infty (f(x) + f(-x))dx = \pi \mathrm{i} r.$$

   Indication : utiliser le contour ci-dessous (Fig. 1).

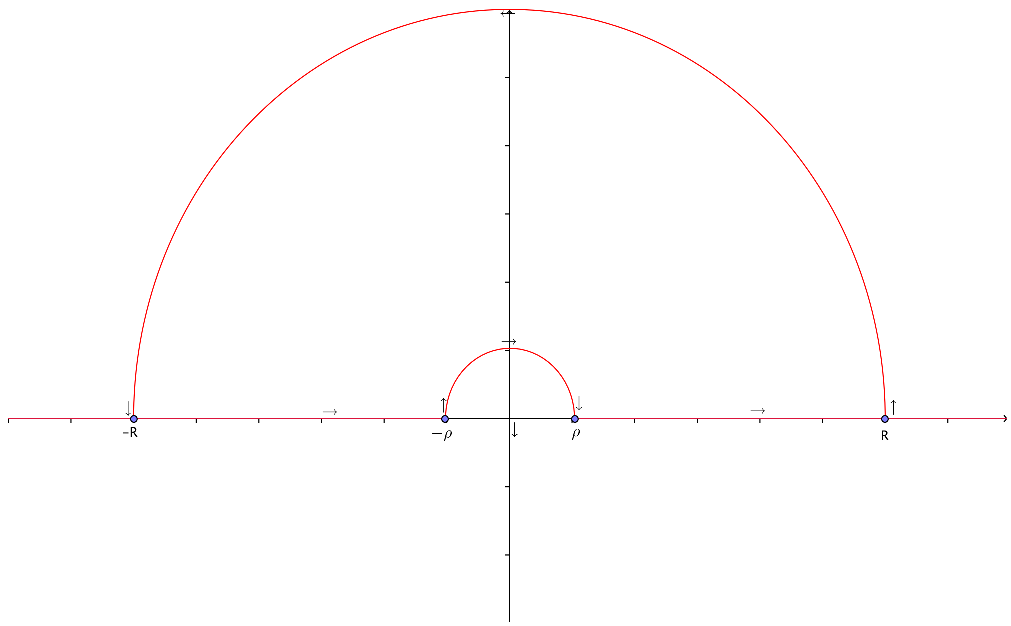

FIGURE 1 – Contour pour 3(c)

(d) Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ on a

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2ax) - \cos(2bx)}{x^2} = \pi(b-a).$$

Indication : appliquer ce qui précède avec les fonctions $f(z) = \frac{e^{2iaz}-1}{z^2}$, resp. $f(z) = \frac{e^{2ibz}-1}{z^2}$.