Master de Mathématiques — Université J. Fourier
MAT4117 – EDO et EDP — 2014-2015

Examen, session 2

Lundi 22 juin 2015, durée : 3 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barême approximatif : exercice 1 sur 8 points ; exercice 2 sur 8 points ; exercice 3 sur 6 points.

On note $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 1. Méthode des caractéristiques.
Soit $T_-, T_+ > 0$, $d \in \mathbb{N}^\star$ et $v :]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$. Le but de cet exercice est de donner une solution classique $u :]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ au problème de transport

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + v(t,x)\cdot\partial_x u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d, \\ u_{|t=0} = \underline{u}, \end{cases}$$

lorsqu'on a une donnée initiale $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On fera l'hypothèse suivante sur le champ de vecteurs v : il existe une constante $C_v > 0$ telle que

$$(2) \qquad \forall (t,x) \in]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d, \quad |v(t,x)| \le C_v(1+|x|).$$

Étant donnés $t \in]-T_-, T_+[$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on notera $\gamma_{t,x}$ la courbe intégrale de v passant par x à l'instant t, c'est-à-dire la solution du système différentiel avec donnée initiale

$$(3) \qquad \begin{cases} {\gamma_{t,x}}'(s) = v(s, \gamma_{t,x}(s)), \\ \gamma_{t,x}(t) = x. \end{cases}$$

1) Justifier qu'il existe $\tau > 0$ et une unique solution $\gamma_{t,x} \in \mathcal{C}^1([t-\tau, t+\tau]\cap]-T_-, T_+[, \mathbb{R}^d)$ de (3).

2) Démontrer le lemme de Gronwall suivant :
Étant donnés $t \in]-T_-, T_+[$, $\varphi \in \mathcal{C}(]-T_-, T_+[, \mathbb{R}_+)$ et $C_1, C_2 > 0$ tels que

$$\forall s \in]-T_-, T_+[, \quad \varphi(s) \le C_1 + C_2\left|\int_t^s \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\right|,$$

on a

$$\forall s \in]-T_-, T_+[, \quad \varphi(s) \le C_1 e^{C_2|s-t|}$$

(on pourra se contenter de montrer cette assertion pour $s \ge t$, le cas $s \le t$ s'en déduisant par symétrie).

3) Montrer que la solution maximale de (3), encore notée $\gamma_{t,x}$, est globale, c'est-à-dire qu'elle est définie sur tout $]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d$ (on pourra poser $\varphi(s) := |\gamma_{t,x}(s)|$).

Dans ce qui suit, on écrira $X(s,t,x)$ pour $\gamma_{t,x}(s)$, et on admettra que X est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-T_-, T_+[\times]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.

4) Montrer que

$$(4) \qquad \forall t_1, t_2, t_3 \in]-T_-, T_+[, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x).$$

En déduire que pour tous $s, t \in]-T_-, T_+[$, $X(s,t,\cdot)$ est une bijection de $\mathbb{R}^d$ sur lui-même, d'inverse $X(t,s,\cdot)$.

5) a) En dérivant la relation (4) par rapport à t_2 et en choisissant convenablement t_1, t_2 et t_3, montrer que

$$\forall t \in]-T_-, T_+[, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (\partial_t X)(0,t,x) + v(t,x) \cdot (\partial_x X)(0,t,x) = 0.$$

b) En déduire que, si $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, alors $u : (t,x) \mapsto \underline{u}(X(0,t,x))$ est une solution classique (de classe $\mathcal{C}^1$) de (1).

Exercice 2.
On rappelle que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une bijection linéaire continue de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sur lui-même, définie par

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi) = (\mathcal{F} f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$:

$$\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\mathcal{F}^{-1} g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

et qu'elle se prolonge en une bijection linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sur lui-même. On rappelle le théorème de Parseval :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_{L^2}^2.$$

On considère le problème de Cauchy associé à l'équation d'Airy,

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x^3 u(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u_{|t=0} = \underline{u}. \end{cases}$$

1) On suppose que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ est solution de (1). Montrer qu'alors, la transformée de Fourier (partielle, par rapport à la variable d'espace) $\widehat{u}$ de u vérifie :

$$(2) \qquad \forall t, \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{u}(t,\xi) = e^{i\xi^3 t} \widehat{\underline{u}}(\xi).$$

2) On suppose que $\underline{u} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto e^{i\xi^3 t} \widehat{\underline{u}}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
b) Montrer que la formule

$$(3) \qquad \forall t, x \in \mathbb{R}, \quad u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{i\xi^3 t} \widehat{\underline{u}}(\xi)\right)(x)$$

définit une fonction $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ (on pourra évaluer $\|u(t) - u(s)\|_{L^2}^2$ grâce au théorème de Parseval).
c) Montrer que, si $\underline{u}$ appartient à l'espace de Sobolev $H^3(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (c'est-à-dire $(1+|\cdot|^2)^{3/2}\widehat{\underline{u}} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$), alors la formule précédente définit une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$, et que cette dernière est solution de (1).

3) On suppose que $\underline{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\widehat{u}(t, \cdot)$ définie par (2) appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
b) On considère la fonction u définie par (3), et on se donne $t, x > 0$. En remarquant que l'on a

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \partial_\xi \left(\xi \mapsto e^{i(x\xi + \xi^3 t)}\right) \frac{\widehat{\underline{u}}(\xi)}{i(x + 3\xi^2 t)}\,\mathrm{d}\xi,$$

et en utilisant une intégration par parties, montrer que $u(t,x) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 3.
On considère Ω, un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. On se donne des coefficients $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq d)$ vérifiant la condition d'ellipticité suivante,

$$\exists c > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq c|\xi|^2,$$

et on définit l'opérateur différentiel (elliptique) L par

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + u.$$

On rappelle la notion de *dérivée faible* dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$: on dit que $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ admet une dérivée faible (par rapport à x_j) $\partial_{x_j} u \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ si

$$\forall \chi \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}), \int_{\Omega} u \, \partial_{x_j} \chi = -\int_{\Omega} (\partial_{x_j} u) \chi,$$

où $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et à support compact inclus dans Ω.

Enfin, on rappelle le théorème de Lax-Milgram :
Soit H un espace de Hilbert réel, b une forme bilinéaire continue et coercive sur H, ℓ une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \quad b(u, v) = \ell(v).$$

1) Donner la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega, \mathbb{R})$ (et de sa norme $\| \cdot \|_{H^1}$).

On note $H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'adhérence dans $H^1(\Omega, \mathbb{R})$ de l'espace $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$ ($(H_0^1(\Omega, \mathbb{R}), \| \cdot \|_{H^1})$ est alors un espace de Hilbert).
2) Donner la définition d'une *solution faible* $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ du problème

$$(4) \qquad \begin{cases} Lu = f \text{ sur } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

lorsque $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$.
3) Soit $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique solution faible du problème (4).