Master de Mathématiques — Université J. Fourier
MAT4117 – EDO et EDP — 2014-2015

Examen, session 1

Mardi 6 janvier 2015, durée : 3 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barême approximatif : exercice 1 sur 8 points ; exercice 2 sur 8 points ; exercice 3 sur 4 points.

Exercice 1.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, telle que $f(0) = f(1) = 0$, et pour tout $y \in]0,1[$, $f(y) < 0$. On se donne $\underline{x} \in]0,1[$, et on considère le système ("équation différentielle et condition initiale")

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = \underline{x}. \end{cases}$$

1) Justifier qu'il existe une unique solution maximale $x \in \mathcal{C}^1(]-T_{\min}, T_{\max}[,\mathbb{R})$ à (1), avec $T_{\min}, T_{\max} \in]0,\infty]$. Dans toute la suite, x désigne cette solution maximale.

2) Montrer que pour tout $t \in]-T_{\min}, T_{\max}[$, $x(t) \in]0,1[$. En déduire que $T_{\min} = T_{\max} = \infty$.

3) Montrer que x est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et que $x(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

4) On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$, et que $f'(0) = -\alpha$, pour un $\alpha > 0$.
Ainsi, il existe $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(y) = -\alpha y + g(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et $g(0) = g'(0) = 0$.
Pour tous $t, \beta \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_\beta(t) = x(t)\, e^{\beta t}$.
a) Soit $\beta \in]0,\alpha[$. Montrer qu'il existe $c_\beta > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, $\quad x(t) \leq c_\beta e^{-\beta t}$ (on pourra étudier les variations de φ_β).
b) Justifier qu'il existe une constante $C_g > 0$ telle que pour tout $y \in]0,1[$, $\quad |g(y)| \leq C_g\, y^2$.
c) Montrer que φ_α vérifie le critère de Cauchy suivant en $+\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T > 0, \forall s,t \geq T, \quad |\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(s)| \leq \varepsilon$$

(on pourra écrire $\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(s) = \int_s^t \varphi'_\alpha(r)\,\mathrm{d}r$). En déduire que $\varphi_\alpha(t)$ a une limite $\gamma \geq 0$ lorsque t tend vers $+\infty$.
d) Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\dfrac{x'(t)}{\alpha x(t) + C_g\, x(t)^2} \geq -1$. En intégrant cette inégalité différentielle, montrer que $\gamma > 0$. On en conclut que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \gamma e^{-\alpha t}$.

Exercice 2.
Dans cet exercice, l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^d)$ et l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^d)$ désignent des espaces de (classes de) fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\underline{u} \in H^2(\mathbb{R}^d)$. On considère le problème de Cauchy suivant (associé à une équation de Schrödinger, avec $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$) :

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - i\varepsilon\Delta u_\varepsilon = 0, \quad (t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d), \\ {u_\varepsilon}_{|t=0} = \underline{u}. \end{cases}$$

1) Montrer qu'en posant (avec $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$)

$$(3) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad u_\varepsilon(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\varepsilon t|\cdot|^2}\widehat{\underline{u}}\right),$$

a) on définit pour tout $t \in \mathbb{R}$ une fonction u_ε appartenant à $H^2(\mathbb{R}^d)$, et de plus, $u_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^d))$;

b) on a aussi $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$, et u_ε est solution de (2) au sens faible.

2) Montrer qu'il y a unicité de la solution de (2) dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$.

3) On considère à présent $k \in \mathbb{R}^d$, $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et une donnée initiale $\underline{u}$ définie par

$$(4) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \underline{u}(x) = a(x)\, e^{i(k\cdot x)/\varepsilon}.$$

a) Justifier qu'on a $\underline{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

b) En déduire que la fonction u_ε donnée par (3) s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad u_\varepsilon(t,x) = (2\pi)^{-d} e^{i(k\cdot x - t|k|^2)/\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-2tk)\cdot\eta} e^{-i\varepsilon t|\eta|^2}\widehat{a}(\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

c) On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad v_\varepsilon(t,x) = a(x-2tk)\, e^{i(k\cdot x - t|k|^2)/\varepsilon}.$$

Montrer qu'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\widehat{u_\varepsilon}(t) - \widehat{v_\varepsilon}(t)\|_{L^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 3.

On considère Ω, un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, ainsi que $b \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$, et on définit l'opérateur différentiel (elliptique) L par

$$Lu = -\Delta u + b\cdot\nabla u = -\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 u + \sum_{j=1}^d b_j \partial_{x_j} u.$$

Le but de cet exercice est de montrer le *principe du maximum faible* :
si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ vérifie $Lu \leq 0$ sur Ω, alors le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ (noté $\max_{\overline{\Omega}} u$) est en fait atteint sur le bord $\partial\Omega$ (donc $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$).

On se donne donc $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue, et de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω.

1) On suppose tout d'abord que Lu est strictement négatif sur Ω, et que $\max_{\overline{\Omega}} u = u(\underline{x})$ pour un certain $\underline{x} \in \Omega$. On rappelle qu'on a alors $\nabla u(\underline{x}) = 0$, et que la matrice hessienne de u en $\underline{x}$, $\mathrm{Hess}(u)(\underline{x}) = \left(\partial_{x_i}\partial_{x_j} u(\underline{x})\right)_{1\leq i,j\leq d}$, est une matrice symétrique négative.

a) Montrer que pour tout $j \in \{1,\dots,d\}$, on a $\partial_{x_j}^2 u(\underline{x}) \leq 0$.

b) En déduire une contradiction.

2) On suppose à présent que $Lu \leq 0$ sur Ω. Pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \quad u_n(x) = u(x) + \frac{1}{n} e^{\lambda x_1}.$$

a) Montrer que lorsque $\lambda > \|b_1\|_{L^\infty}$, on a pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \Omega$: $Lu_n(x) < 0$.

Pour ce qui suit, on fixe un tel λ, et on sait par ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x^{(n)} \in \partial\Omega$ tel que $\max_{\partial\Omega} u_n = u_n(x^{(n)})$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge uniformément (sur $\overline{\Omega}$) vers u, et que la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ admet une sous-suite (encore notée $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$) convergeant vers un certain $\underline{x} \in \partial\Omega$.

c) Conclure.