TER

Dérivabilité de fonctions définies par des séries lacunaires

Kieran McShane

Encadré par
Emmanuel Russ

12 mai 2022

Table des matières

1 Introduction

On appelle série lacunaire une série de fonction

$$f(t) = \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n e^{i\lambda_n t}$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de complexes telle que $\sum_{n\geq 1} |\varepsilon_n| < +\infty$, et $(\lambda)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que $dist(\lambda_n, \{\lambda_p, p \neq n\} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. La fonction f définie par cette série est continue. Ce TER est dédié à l'étude de la dérivabilité de telles fonctions.

En particulier, nous étudierons la fonction de Weierstrass :

$$\mathscr{W}(t) = \sum_{n\geq 1} B^n \cos(A^n t) \qquad (0 < B < 1,\ A > 1),$$

et la fonction de Riemann :

$$R(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{sin(\pi n^2 t)}{n^2},$$

qui sont toutes deux des séries lacunaires, et constituent historiquement les premiers exemples de fonctions continues mais nulle part (ou presque nulle part) dérivables.

Nous verrons dans un cadre plus général la fonction de Weierstrass $\mathscr{W}$ n'est nulle part dérivable à condition que $AB \geq 1$. Nous complèterons l'étude de la fonction de Weierstrass par le calcul de son exposant de Hölder, pour lequel seront introduits des résultats sur les ondelettes.

L'étude de la fonction R de Riemann est beaucoup plus délicate. En effet, nous verrons que R est dérivable en les rationnels $\frac{p}{q}$ où p et q sont impairs, mais n'est dérivable nulle part ailleurs. Pour l'étude de la dérivabilité fonction de Riemann en les rationnels, nous suivrons une méthode élémentaire, qui exploite notamment l'équation fonctionnelle :

$$\theta(z) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{z}}\theta\left(\frac{-1}{z}\right),$$

où θ est la fonction de Jacobi définie par $\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 z}$ qui apparaît dans la dérivée du prolongement de la fonction R au demi-plan complexe supérieur. Cette équation fonctionnelle et la 2-périodicité nous permettent de traiter le cas de tous les rationnels $\frac{p}{q}$ où p et q sont impairs passant d'un rationnel à l'autre.
C'est pour l'étude des points où la fonction de Riemann n'est pas dérivable que nous utiliserons des ondelettes. Plus précisément nous utiliserons l'ondelette de Lusin :

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi(x+i)^2}.$$

Les résultats que nous établirons permettront de calculer ou de majorer l'exposant de Hölder de la fonction de Riemann par des estimations de sa transformée en ondelettes :

$$W_R(a,b) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} R(x)\overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx, \qquad a>0, b\in\mathbb{R}.$$

Pour cela nous nous estimerons d'abord $W_R(a,b)$ lorsque $b = \frac{p}{q}$ est un rationnel avec p et q de parités différentes et $a \to 0$. Puis lorsque x_0 est un irrationnel, nous prendrons une suite de rationnels $b_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n et q_n de parités différentes qui converge "rapidement" vers x_0 et nous estimerons $W_R(a_n, b_n)$ où (a_n) est une certaine suite de réels positifs qui tend vers 0.

2 Fonctions définies par des séries lacunaires

Cette partie présente d'abord un critère pour la dérivabilité des séries lacunaires, puis présente quelques propriétés de ces fonctions.

Définition 2.1 *On dit qu'une suite $(\lambda_n)_n$ de réels tous distincts est lacunaire si $\mu_n := dist(\lambda_n, \{\lambda_p, p \neq n\}) \to +\infty$.*

Théorème 2.2 *Soit $(\varepsilon_n)_n$ une série de complexes tels que $\sum_{n\geq 1}|\varepsilon_n| < +\infty$ et soit $(\lambda_n)_n$ une suite lacunaire de réels. On note $f(t) = \sum_{n\geq 1}\varepsilon_n e^{i\lambda_n t}$. Si f est dérivable en un point alors $\varepsilon_n = o({\mu_n}^{-1})$.*

Preuve : On suppose dans un premier temps que f est dérivable en 0 et que $f(0) = f'(0) = 0$.

Soit $\varphi \in \mathscr{S}$ tel que $\hat{\varphi}(0) = 1$ $\hat{\varphi}(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. On note $\varphi_n(x) = \mu_n \varphi(\mu_n x)$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_n(t)e^{-i\lambda_n t}dt = \int_{\mathbb{R}} \sum_{p\geq 1} \varepsilon_p \varphi_n(t) e^{-i(\lambda_n-\lambda_p)t}dt = \sum_{p\geq 1} \varepsilon_p \hat{\varphi}_n(\lambda_n - \lambda_p)$$

car $\sum_{p\geq 1}\int_{\mathbb{R}} |\varepsilon_p| \cdot |\varphi_n(t)|dt = \sum_{p\geq 1}|\varepsilon_p| \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|dt < +\infty$.

De plus : $\hat{\varphi}_n(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu_n \varphi(\mu_n t) e^{-itx}dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-itx/\mu_n}dt = \hat{\varphi}(x/\mu_n)$
Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi_n(t)e^{-i\lambda_n t}dt = \sum_{p\geq 1} \varepsilon_p \hat{\varphi}\left(\frac{\lambda_n - \lambda_p}{\mu_n}\right) = \varepsilon_n$$

car : $|\lambda_n - \lambda_p| \geq \mu_n$ si $p \neq n$.

Ainsi : $|\varepsilon_n| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \cdot |\varphi_n(t)|dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t/\mu_n)| \cdot |\varphi(t)|dt$.

De plus, il existe $C > 0$ tel que pour tout t : $|f(t)| \leq C|t|$. En effet, il existe $\delta > 0$ tel que : $|t| \leq \delta \implies |f(t)| \leq |t|$ et comme $|f|$ est bornée par $S := \sum_{n\geq 1} |\varepsilon_n|$, on a aussi : $|t| > \delta \implies |f(t)| \leq S\frac{|t|}{\delta}$. On prend alors $C = max(1, S/\delta)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\mu_n f(t/\mu_n)| \cdot |\varphi(t)| = \mu_n o(1/\mu_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ car $f(0) = f'(0) = 0$.

De plus, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $|\mu_n f(t/\mu_n)| \cdot |\varphi(t)| \leq C|t| \cdot |\varphi(t)| \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ car $\varphi \in \mathscr{S}$.

Par théorème de convergence dominée :

$$|\varepsilon_n \mu_n| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t/\mu_n)| \cdot |\varphi(t)|dt \to 0$$

lorsque $n \to \infty$.

Traitons maintenant le cas général. Supposons que f est dérivable en un réel a. On pose $g(t) = f(t+a) - \alpha e^{i\lambda_1 t} - \beta e^{i\lambda_2 t}$. On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ de sorte que $g(0) = g'(0) = 0$. Cela nous donne le système d'équations : $\begin{cases} \alpha + \beta = f(a) \\ i\lambda_1 \alpha + i\lambda_2 \beta = f'(a) \end{cases}$
qui admet une solution puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Maintenant g s'écrit : $g(t) = \sum_{n\geq 1} \tilde{\varepsilon}_n e^{i\lambda_n t}$.

Et par la première partie de la démonstration on a $\tilde{\varepsilon}_n = o(\mu_n^{-1})$. Comme on a $|\tilde{\varepsilon}_n| = |\varepsilon_n|$ si $n \geq 3$, on a aussi $\varepsilon_n = o(\mu_n^{-1})$. $\square$

Remarque 2.3 *Ceci entraine que* $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{i2^n t}}{2^n}$ *n'est dérivable en aucun point. De même, en prenant* $\varepsilon_{2n} = \frac{1}{2^{n+1}}$, $\varepsilon_{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$, $\lambda_{2n} = 2^n$ *et* $\lambda_{2n+1} = -2^n$*, on obtient que* $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(2^n t)}{2^n}$ *n'est dérivable en aucun point.*

Corollaire 2.4 *Supposons que pour tout* $n > 0$, $\lambda_n > 0$ *et qu'il existe* $c > 1$ *tel que pour tout* $n > 0$, $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > c$ *et que la fonction* f *définie ci-dessus est dérivable en un point alors* $\varepsilon_n = o(1/\lambda_{n-1})$.

Preuve : On a $\mu_n = dist(\lambda_n, \{\lambda_p, p \neq n\}) = \lambda_n - \lambda_{n-1} > (c-1)\lambda_{n-1} > 0$ Ainsi $\mu_n^{-1} < \frac{1}{c-1}\lambda_{n-1}^{-1}$. Comme par le théorème $\varepsilon_n = o(1/\mu_n)$ on a aussi $\varepsilon_n = o(\lambda_{n-1}^{-1})$. $\square$

Définition 2.5 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *où* $I \subset \mathbb{R}$ *est un intervalle. On dit que* $f \in \Lambda_*$ *si* f *est continue et s'il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $x, h \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq M|h|.$$

On dit que $f \in \lambda_*$ *si* f *est continue et s'il existe* $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $\alpha(h) \to 0$ *lorsque* $h \to 0$ *et pour tout* $x, h \in \mathbb{R}$ *:*

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq \alpha(h) \cdot |h|.$$

Théorème 2.6 *Soit* $b > 1$ *et* $f(x) = \sum_{n\geq 1} b^{-n} \cos(b^n x)$ *alors* $f \in \Lambda_*$.

Preuve : Soit $1/b > h > 0$ et N le plus grand entier tel que $b^N h \leq 1$ de sorte que $b^{N+1}h > 1$. On a :

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = -\sum_{n\geq 1} 4b^{-n} \cos(b^n x) \sin^2(b^n h/2) = -\sum_{1}^{N} - \sum_{N+1}^{\infty} = R + T.$$

Maintenant

$$|R| \leq h^2 \sum_{1}^{N} b^n = h^2 O(b^N) = h^2 O(1/h) = O(h)$$

$$|T| \leq \sum_{N+1}^{\infty} b^{-n} = O(b^{-N}) = O(h)$$

D'où $R + T = O(h)$. Comme de plus f est continue, $f \in \Lambda_*$. $\square$

Théorème 2.7 *Soit* $b > 1$, $\varepsilon_n \to 0$ *et*

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n b^{-n} \cos(b^n x)$$

alors $g \in \lambda_*$.

Preuve : Soit $1/b > h > 0$ et N le plus grand entier tel que $b^N h \leq 1$ de sorte que $b^{N+1}h > 1$. On a :

$$g(x+h)+g(x-h)-2g(x) = -\sum_{n\geq 1} 4\varepsilon_n b^{-n}\cos(b^n x)\sin^2(b^n h/2) = -\sum_{1}^{N} - \sum_{N+1}^{\infty} = R+T.$$

Maintenant

$$|R| \leq h^2 \sum_{1}^{N} \varepsilon_n b^n$$

Or $\sum_1^N \varepsilon_n b^n = o(b^N) = o(1/h)$. En effet, soit $\alpha > 0$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que :

$$n \geq n_0 \implies |\varepsilon_n| < \alpha$$

alors

$$\forall N \geq n_0, \quad \left|\sum_{1}^{N} \varepsilon_n b^n\right| \leq \left|\sum_{1}^{n_0-1} \varepsilon_n b^n\right| + \alpha \sum_{n_0}^{N} b^n = C + \alpha \frac{b^{N+1}-b^{n_0}}{b-1} \leq 2\alpha b^N$$

pour N assez grand.

Ainsi

$$|R| \leq h^2 o(b^N) = h^2 o(1/h) = o(h)$$

D'autre part :

$$|T| \leq (\sup_{n>N} |\varepsilon_n|) \sum_{N+1}^{\infty} b^{-n} = o(1)O(b^{-N}) = o(1)O(h) = o(h)$$

Comme de plus g est continue, $g \in \lambda_*$. $\square$

Théorème 2.8 *Si $I \neq \emptyset$ et $f : I \to \mathbb{R}$ appartient à λ_* alors l'ensemble des points où f est dérivable est de même cardinal que $\mathbb{R}$.*

Preuve : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $a < y < b$. Soit $l(x) = px + q$ de sorte que $l(a) = f(a)$ et $l(y) = f(y)$ alors $g = f - l$ vaut 0 en a et y.
La fonction g est continue donc g atteint un extremum sur $]a, y[$ en un point $m = m(y)$.
Quitte à remplacer g par $-g$ on peut supposer que c'est un minimum.
Alors on a, pour $h > 0$:

$$\frac{g(m+h)-g(m)}{h} \geq 0$$

et

$$\frac{g(m-h)-g(m)}{h} \geq 0$$

Ainsi :

$$0 \leq \frac{g(m+h)-g(m)}{h} \leq \frac{g(m+h)-g(m)}{h} + \frac{g(m-h)-g(m)}{h}$$

$$= \frac{g(m+h)+g(m-h)-2g(m)}{h} \to 0$$

de même : $\frac{g(m-h)-g(m)}{h} \to 0$ ainsi g est dérivable en m et $g'(m) = 0$ et donc $f = g + l$ est aussi dérivable en m et $f'(m) = l'(m) = p = \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$.

Si $y \mapsto \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$ n'est pas constante sur $]a,b[$, alors comme c'est une fonction continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, son image contient un intervalle ouvert non vide et est donc de même cardinal que $\mathbb{R}$.

De plus, si $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \neq \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ pour $y,z \in]a,b[$, alors a fortiori $m(y) \neq m(z)$ car la dérivée de f en ces points prend deux valeurs distinctes.

Ainsi si $y \mapsto \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$ n'est pas constante alors l'ensemble des points où f est dérivable est de même cardinal que $\mathbb{R}$.
Si $y \mapsto \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$ est constante sur $]a,b[$, alors f est une fonction affine et le résultat reste vrai. $\square$

Remarque 2.9 *Notons $g(x) = \sum_{n\geq 1} c_n \cos(b^n x)$ où $b > 0$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels tels que $\sum_{n\geq 1} |c_n| < +\infty$.*

Alors si $c_n = o(b^{-n})$, l'ensemble des points où g est dérivable est de même cardinal que $\mathbb{R}$. Sinon, g n'est nulle part dérivable.

3 Fonction de Weierstrass

Pour $0 < B < 1$ et $A > 1$, notons :

$$\mathscr{W}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} B^n \cos(A^n t)$$

La convergence normale de la série définissant $\mathscr{W}$ entraîne :

Proposition 3.1 *La fonction $\mathscr{W}$ est bien définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.*

Le théorème 2.2 nous donne immédiatement la proposition suivante :

Proposition 3.2 *Si $AB \geq 1$ alors $\mathscr{W}$ n'est nulle part dérivable.*

Réciproquement, comme il en a déjà été discuté dans la remarque 2.9 :

Proposition 3.3 *Si $AB < 1$ alors l'ensemble des points où $\mathscr{W}$ est dérivable est de même cardinal que $\mathbb{R}$.*

Preuve : Si $AB < 1$ alors $B^n = o(A^{-n})$ donc par le théorème 2.7, $\mathscr{W} \in \lambda_*$. Par le théorème 2.8, ceci implique que l'ensemble des points où $\mathscr{W}$ est dérivable est de même cardinal que $\mathbb{R}$. $\square$

3.1 Fonctions hölderiennes et ondelettes

Définition 3.4 *Soit $\alpha > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue.*

1) On dit que f est hölderienne d'ordre α s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$$

On note alors $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R})$.

2) On dit que f est hölderienne d'ordre α en x_0 si :

$$f(x) - f(x_0) = O(|x - x_0|^{\alpha})$$

lorsque $x \to x_0$. On note alors $f \in C^{\alpha}(x_0)$.

On note $\alpha(f, x_0)$ la borne supérieure des $\alpha \geq 0$ tels que $f \in C^{\alpha}(x_0)$. Cette borne s'appelle l'exposant de Hölder de f en x_0.

Remarque 3.5 — *Si f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $\alpha(f, x_0) \geq 1$. Déterminer un exposant de Hölder peut donc permettre de conclure sur la non-dérivabilité d'une fonction.*

— *Il peut arriver que $\alpha = +\infty$.*

La théorie qui va suivre permet de déterminer des exposants de Hölder.

Définition 3.6 *Soit $\psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\psi(x)| \leq C(1 + |x|^2)^{-1}$ et $\int \psi(x)dx = 0$. On appelle ψ une ondelette.*

Définition 3.7 *On définit la transformée en ondelettes d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et bornée par :*

$$\forall a > 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad W_f(a, b) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi} \left(\frac{x - b}{a} \right) dx.$$

Lemme 3.8 *Soit $0 < \alpha < 1$. Si f est une fonction continue, bornée et α-hölderienne en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors il existe $C > 0$ tel que si $a \leq 1$ et $|b - x_0| \leq 1$ alors*

$$|W(a, b)| \leq C(a^{\alpha} + |b - x_0|^{\alpha}).$$

Preuve du lemme 3.8 : Comme on a $\int \psi(x)dx = 0$, on peut écrire :

$$W(a,b) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} [f(x) - f(x_0)]\overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx.$$

Il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq C|x-x_0|^\alpha$.

En effet, comme $f \in C^\alpha(x_0)$ il existe $\delta > 0$ et $B > 0$ tels que :

$$|x-x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq B|x-x_0|^\alpha.$$

Alors on a aussi, puisque f est bornée :

$$|x-x_0| \geq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq 2\|f\|_\infty \frac{|x-x_0|^\alpha}{\delta^\alpha}.$$

On peut donc prendre $C := \max(B, 2\|f\|_\infty \delta^{-\alpha})$.

D'où :

$$\begin{aligned}
|W(a,b)| &\leq \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x_0)| \left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right| dx \\
&\leq \frac{C}{a}\int_{\mathbb{R}} |x-x_0|^\alpha \left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right| dx.
\end{aligned}$$

Par changement de variable $u = \frac{x-b}{a}$:

$$\begin{aligned}
|W(a,b)| &\leq C\int_{\mathbb{R}} |au + b - x_0|^\alpha\, |\psi(u)|\, du \\
&\leq Ca^\alpha \int_{\mathbb{R}} |u|^\alpha\, |\psi(u)|\, du + C|b-x_0|^\alpha \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)|\, du.
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(u)| du \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{D}{1+u^2} du < +\infty,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^\alpha |\psi(u)| du \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{D|u|^\alpha}{1+u^2} du < +\infty$$

car $0 < \alpha < 1$.

Si on note

$$C' = C\left(\int_{\mathbb{R}} |u|^\alpha |\psi(u)| du + \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)| du\right),$$

on a :

$$|W(a,b)| \leq C'(a^\alpha + |b-x_0|^\alpha). \qquad \square$$

Définition 3.9 *Soit f une fonction continue et bornée, on définit pour tout $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,*

$$(\Delta_a f)(x) = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} W(a,b) \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) db.$$

Lemme 3.10 *Supposons que $|\psi(x)| + |\psi'(x)| \leq C_1 (1 + |x|^2)^{-1}$. Soit $0 < \alpha' < \alpha < 1$. Si on a*

$$|W(a,b)| \leq C_2 a^{\alpha} \left(1 + \frac{|b - x_0|}{a} \right)^{\alpha'}$$

alors

$$|(\Delta_a f)(x)| \leq C a^{\alpha} \left(1 + \left| \frac{x - x_0}{a} \right|^{\alpha'} \right),$$

et $(\Delta_a f)$ est dérivable et :

$$|(\Delta_a f)'(x)| \leq C a^{\alpha - 1} \left(1 + \left| \frac{x - x_0}{a} \right|^{\alpha'} \right).$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
|(\Delta_a f)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |W(a,b)| \left| \psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \right| \frac{db}{a} \\
&\leq C_1 C_2 a^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + \left| \frac{b - x_0}{a} \right|^{\alpha'}}{1 + \left| \frac{x-b}{a} \right|^2} \frac{db}{a} \\
&\leq C_1 C_2 a^{\alpha} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + \left| u + \frac{x - x_0}{a} \right|^{\alpha'}}{1 + u^2} du \qquad \text{par changement de variable } b - x = au, \\
&\leq C_1 C_2 a^{\alpha} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |u|^{\alpha'}}{1 + u^2} du + \left| \frac{x - x_0}{a} \right|^{\alpha'} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + u^2} du \right].
\end{aligned}$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + u^2} du =: L < +\infty,$$

et comme $\alpha' < 1$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |u|^{\alpha'}}{1 + u^2} du =: K < +\infty.$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
|(\Delta_a f)(x)| &\le C_1C_2a^{\alpha}\left[K+L\left|\frac{x-x_0}{a}\right|^{\alpha'}\right]\\
&\le C_1C_2a^{\alpha}\left[(K+L)+(K+L)\left|\frac{x-x_0}{a}\right|^{\alpha'}\right]\\
&\le C_1C_2(K+L)a^{\alpha}\left[1+\left|\frac{x-x_0}{a}\right|^{\alpha'}\right].
\end{aligned}
$$

Il suffit alors de poser $C=C_1C_2(K+L)$ pour obtenir la première inégalité.

Maintenant, on a :

$$
(\Delta_a f)'(x)=\frac{1}{a^2}\int_{\mathbb{R}} W(a,b)\psi'\left(\frac{x-b}{a}\right)db.
$$

En effet, ψ est de classe C^1 et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$
\int_{\mathbb{R}} |W(a,b)|\left|\psi'\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|db \le C_1C_2a^{\alpha}\int_{\mathbb{R}}\frac{1+\left|\frac{b-x_0}{a}\right|^{\alpha'}}{1+\left|\frac{x-b}{a}\right|^2}du<+\infty
$$

d'après les calculs qui précèdent.
On peut donc dériver sous l'intégrale dans l'expression :

$$
(\Delta_a f)(x)=\frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} W(a,b)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)db
$$

.

Ainsi

$$
\begin{aligned}
|(\Delta_a f)'(x)| &= \frac{1}{a^2}\left|\int_{\mathbb{R}} W(a,b)\psi'\left(\frac{x-b}{a}\right)db\right|\\
&\le \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}}\left|W(a,b)\psi'\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|\frac{db}{a}\\
&\le C_1C_2(K+L)a^{\alpha-1}\left[1+\left|\frac{x-x_0}{a}\right|^{\alpha'}\right]
\end{aligned}
$$

d'après les calculs qui précèdent. Ce qui démontre la seconde inégalité. □

Dans cette partie, on prend pour ψ une ondelette vérifiant les conditions suivantes :
(a) $\hat{\psi}(\xi)=0$ si $\xi\le A^{-1}$,

(b) $\hat{\psi}(\xi) = 0 \quad$ si $\xi \geq A$,
(c) $\hat{\psi}(1) = 1$.

On peut supposer que $\hat{\psi} \in C^\infty$.

Remarque 3.11 *La fonction $\hat{\psi}$ est à support compact et en particulier $\hat{\psi}$ appartient à la classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et par conséquent $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.*

Pour cette ondelette, on a la formule de reconstruction donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.12 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :*

$$f(x) = \int_{a>0} \left(\int_{b\in\mathbb{R}} W(a,b)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{db}{a} \right) \frac{da}{a}$$

On ne fera pas la preuve de ce résultat qui peut être trouvée dans [Jaf] (Appendice B, Th. B.2.1). On en déduit cependant les deux théorèmes suivants qui seront également utilisés dans la partie 4. sur la fonction de Riemann (où la formule de reconstruction sera démontrée dans le cas de l'ondelette utilisée).

Théorème 3.13 *Soit $0 < \alpha' < \alpha < 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est une fonction bornée et s'il existe $a_0, b_0 > 0$ tels que :*

$$0 < a < a_0, |b - x_0| < b_0 \implies |W_f(a,b)| \leq Ca^\alpha \left(1 + \frac{|b-x_0|}{a}\right)^{\alpha'}$$

alors $f \in C^\alpha(x_0)$.

Preuve du Théorème 3.13 :
Par la formule de reconstruction de la proposition 3.12, on peut écrire :

$$f(x) - f(x_0) = \int_{a>0} [(\Delta_a f)(x) - (\Delta_a f)(x_0)] \frac{da}{a}.$$

Pour $a \geq |x - x_0|$, on a par le lemme 3.10 :

$$|(\Delta_a f)'(x)| \leq Ca^{\alpha-1} \left(1 + \left|\frac{x-x_0}{a}\right|^{\alpha'}\right) \leq 2Ca^{\alpha-1}.$$

Par le théorème des accroissements finis :

$$|(\Delta_a f)(x) - (\Delta_a f)(x_0)| \leq 2Ca^{\alpha-1}|x - x_0|,$$

ainsi :

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{a\geq|x-x_0|}[(\Delta_a f)(x)-(\Delta_a f)(x_0)]\frac{da}{a}\right| &\leq 2C|x-x_0|\int_{a\geq|x-x_0|}a^{\alpha-1}\frac{da}{a}\\
&\leq 2C|x-x_0|\left[\frac{1}{\alpha-1}a^{\alpha-1}\right]_{a=|x-x_0|}^{+\infty}\\
&=\frac{2C}{\alpha-1}|x-x_0|.|x-x_0|^{\alpha-1}\\
&=D|x-x_0|^{\alpha},
\end{aligned}
$$

où on note $D=\frac{2C}{\alpha-1}$.
Si $a<|x-x_0|$,

$$
\begin{aligned}
|(\Delta_a f)(x)-(\Delta_a f)(x_0)| &\leq |(\Delta_a f)(x)|+|(\Delta_a f)(x_0)|\\
&\leq 2Ca^{\alpha}\left(1+\left|\frac{x-x_0}{a}\right|^{\alpha'}\right)\\
&\leq 4Ca^{\alpha-\alpha'}|x-x_0|^{\alpha'}
\end{aligned}
$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{a<|x-x_0|}[(\Delta_a f)(x)-(\Delta_a f)(x_0)]\frac{da}{a}\right| &\leq 4C\int_{a<|x-x_0|}a^{\alpha-\alpha'}|x-x_0|^{\alpha'}\frac{da}{a}\\
&\leq 4C\int_{a<|x-x_0|}|x-x_0|^{\alpha-1}da\\
&\leq 8C|x-x_0|^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Ainsi, en posant $E=max(D,8C)$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$|f(x)-f(x_0)|\leq E|x-x_0|^{\alpha} \qquad \square$$

Théorème 3.14 *Supposons que f est une fonction bornée et β-hölderienne sur $\mathbb{R}$ $(0<\beta<1)$. Alors pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, l'exposant de Hölder $\alpha(f,x_0)$ est donné par*

$$\alpha(f,x_0)=\liminf_{a\searrow 0,b\to x_0}\frac{log|W(a,b)|}{log(a+|b-x_0|)}$$

Preuve du théorème 3.14 :
Soit $0 < \alpha < 1$ tel que $f \in C^\alpha(x_0)$, par le lemme 3.8, il existe $C > 0$ tel que :

$$|W(a,b)| \leq C(a^\alpha + |b - x_0|^\alpha)$$

Par concavité de la fonction $x \mapsto x^\alpha$, on a pour $x, y \geq 0$:

$$\frac{1}{2}(x^\alpha + y^\alpha) \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^\alpha$$

Ainsi :

$$|W(a,b)| \leq 2^{1-\alpha} C(a + |b - x_0|)^\alpha$$

Notons $D = 2^{1-\alpha}C$, alors :

$$\log|W(a,b)| \leq \log(D) + \alpha \log(a + |b - x_0|)$$

Pour $a < \frac{1}{2}$ et $|b - x_0| < \frac{1}{2}$, on a :

$$\log(a + |b - x_0|) < 0$$

donc :

$$\frac{\log|W(a,b)|}{\log(a + |b - x_0|)} \geq \frac{\log(D)}{\log(a + |b - x_0|)} + \alpha$$

ainsi :

$$\liminf_{a \searrow 0, b \to x_0} \frac{\log|W(a,b)|}{\log(a + |b - x_0|)} \geq \alpha$$

Ceci est vrai pour tout $0 < \alpha < \alpha(f, x_0)$ donc :

$$\liminf_{a \searrow 0, b \to x_0} \frac{\log|W(a,b)|}{\log(a + |b - x_0|)} \geq \alpha(f, x_0)$$

Supposons par l'absurde que cette inégalité n'est pas une égalité, alors il existe un α tel que :

$$\alpha(f, x_0) < \alpha < \liminf_{a \searrow 0, b \to x_0} \frac{\log|W(a,b)|}{\log(a + |b - x_0|)} \qquad (*)$$

Il existe $0 < a_0, b_0 < \frac{1}{2}$ de sorte que :

$$\begin{cases} 0 \le a < a_0 \\ |b-x_0| < b_0 \end{cases} \implies \alpha < \frac{\log|W(a,b)|}{\log(a+|b-x_0|)}$$
$$\implies \alpha \log(a+|b-x_0|) > \log|W(a,b)|$$
$$\implies (a+|b-x_0|)^\alpha > |W(a,b)|$$

Comme $f \in C^\beta(\mathbb{R})$, on a : $\beta \le \alpha(f,x_0) < \alpha$.

D'après le lemme 3.8, il existe $E > 1$ tel que : $|W(a,b)| \le E(a+|b-x_0|)^\beta$

Ainsi, si $0 < t < 1$, on a :

$$\begin{aligned} |W(a,b)| &= |W(a,b)|^t |W(a,b)|^{(1-t)} \\ &\le E(a+|b-x_0|)^{t\alpha} a^{(1-t)\beta} \\ &= E a^{\gamma(t)} \left(1+\frac{|b-x_0|}{a}\right)^{t\alpha} \end{aligned}$$

où $\gamma(t) := t\alpha + (1-t)\beta > t\alpha$.

Ainsi par le théorème 3.13, f est $\gamma(t)$-hölderienne en x_0. Ceci est vrai pour tout $0 < t < 1$ donc $\alpha \ge \alpha(f,x_0)$, ce qui contredit $(*)$. □

3.2 Application : détermination de l'exposant de Hölder

On garde toujours la même ondelette ψ qui vérifie :
(a) $\hat{\psi}(\xi) = 0$ si $\xi \le A^{-1}$,
(b) $\hat{\psi}(\xi) = 0$ si $\xi \ge A$,
(c) $\hat{\psi}(1) = 1$.

Proposition 3.15 *La fonction $\mathscr{W}$ a pour exposant de Hölder $-\frac{log(B)}{log(A)}$ en tout point de $\mathbb{R}$.*

Preuve :

$$\begin{aligned} W_{\mathscr{W}}(a,b) &= \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} \mathscr{W}(x)\overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \\ &= \frac{1}{2a}\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B^n(e^{iA^n x}+e^{-iA^n x})\right)\overline{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} B^n(e^{iA^n b}e^{iA^n ay}+e^{-iA^n b}e^{-iA^n ay})\right)\overline{\psi}(y)dy \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} B^n e^{iA^n b}\int_{\mathbb{R}}\overline{\psi}(y)e^{iA^n ay}dy + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} B^n e^{-iA^n b}\int_{\mathbb{R}}\overline{\psi}(y)e^{-iA^n ay}dy \end{aligned}$$

L'inversion série-intégrale de la quatrième ligne est permise car la série converge normalement puisque $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Maintenant on a :

$$\begin{aligned}
W_{\mathscr{W}}(a,b) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} B^n e^{iA^n b}\hat{\overline{\psi}}(-A^n a) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} B^n e^{-iA^n b}\hat{\overline{\psi}}(A^n a) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} B^n e^{iA^n b}\overline{\hat{\psi}}(A^n a) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} B^n e^{-iA^n b}\overline{\hat{\psi}}(-A^n a) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} B^n e^{iA^n b}\overline{\hat{\psi}}(A^n a) \qquad \text{car } \hat{\psi} \text{ est à support dans } \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, on a utilisé le fait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{\overline{\psi}}(x) = \overline{\hat{\psi}}(-x).$$

Comme le support de $\hat{\psi}$ est contenu dans $[A^{-1}, A]$, on a :

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(A^n a) \neq 0 &\implies A^{-1} < A^n a < A \\
&\implies -log(A) < nlog(A) + log(a) < log(A) \\
&\implies -1 - \frac{log(a)}{log(A)} < n < 1 - \frac{log(a)}{log(A)} \\
&\implies n = \left\lfloor -\frac{log(a)}{log(A)} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$|W_{\mathscr{W}}(a,b)| < \frac{1}{2}B\|\hat{\psi}\|_\infty \cdot B^{-\frac{log(a)}{log(A)}}$$

Autrement dit :

$$|W_{\mathscr{W}}(a,b)| < \frac{1}{2}B\|\hat{\psi}\|_\infty \cdot a^{-\frac{log(B)}{log(A)}}$$

Par le théorème 3.13, ceci implique que $\mathscr{W}$ est hölderienne d'ordre $\alpha = -\frac{log(B)}{log(A)}$ en tout point de $\mathbb{R}$.

On note maintenant $a_n = A^{-n}$. Alors

$$W_{\mathscr{W}}(a_n,b) = \frac{1}{2}B^n e^{iA^n b} = \frac{1}{2}a_n^{-\frac{log(B)}{log(A)}} e^{iA^n b}$$

Par le théorème 3.14, on a

$$\alpha(\mathscr{W},x_0) = \liminf_{a\to 0, b\to x_0} \frac{log|W_{\mathscr{W}}(a,b)|}{log(a+|b-x_0|)} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{log|W_{\mathscr{W}}(a_n,b)|}{log(a_n)} = -\frac{log(B)}{log(A)}$$

Ainsi :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \alpha(\mathscr{W},x_0) = -\frac{log(B)}{log(A)} \qquad \square$$

Remarque 3.16 *C'est une autre façon de voir que si $AB > 1$, $\mathscr{W}$ n'est nulle part dérivable. En revanche, cela ne nous rien pour le cas $AB = 1$. On a vu que dans ce cas aussi $\mathscr{W}$ n'est nulle part dérivable, mais que $\mathscr{W}$ appartient à la classe de Zygmund Λ_* qui contient toutes les classes $C^\alpha(\mathbb{R})$ pour $\alpha < 1$ (voir [Zyg], Th. 3.4 pour la preuve de ce dernier point).*

4 Fonction de Riemann

4.1 Définition et premières propriétés

On note

$$R(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n^2\pi t)}{n^2}$$

la fonction de Riemann.

Proposition 4.1 *La fonction R est bien définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.*

Preuve : La série de fonctions définissant R est une série normalement convergente de fonctions continue, donc R est continue. □

Proposition 4.2 *La fonction R est 1/2-hölderienne.*

Preuve : On note

$$R_j(x) = \sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$$

de sorte que $R(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(x)$.

On a

$$\|R_j\|_\infty \leq \sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} \frac{1}{2^{2j}} = 2^{-j}$$

et

$$\|R_j'\|_\infty \leq \sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} \pi = \pi 2^j.$$

Maintenant, soient $x, h \in \mathbb{R}$ et soit N un entier naturel tel que $|h| \leq 4^{-N} < 4|h|$:

$$\begin{aligned}
|R(x+h) - R(x)| &\leq \sum_{j=0}^{N} |h|.\|R_j'\|_\infty + 2\sum_{j=N+1}^{\infty} \|R_j\|_\infty \\
&\leq 2\pi.|h|2^N + 2.2^{-N} \\
&\leq 2\pi|h|^{1/2} + 4|h|^{1/2} = C|h|^{1/2},
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

4.2 La fonction F

On note maintenant

$$F(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^2\pi t}}{n^2}$$

de sorte que $R(t) = Im(F(t))$.

Proposition 4.3 *Pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$F(1+t) = \frac{1}{2}F(4t) - F(t).$$

Preuve : Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(1+t) &= \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^2\pi(t+1)}}{n^2} \\ &= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n^2} \frac{e^{in^2\pi t}}{n^2} \end{aligned}$$

Comme n et n^2 ont même parité pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} F(1+t) &= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n} \frac{e^{in^2\pi t}}{n^2} \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{e^{4in^2\pi t}}{4n^2} - \sum_{n\geq 1} \frac{e^{i(2n+1)^2\pi t}}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}F(4t) - (F(t) - \frac{1}{4}F(4t)) \\ &= \frac{1}{2}F(4t) - F(t). \qquad \square \end{aligned}$$

On note maintenant $H \subset \mathbb{C}$ le demi-plan supérieur $H = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ et on prolonge F à $\overline{H}$ par : $F(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^2\pi z}}{n^2}$.

Proposition 4.4 *La fonction F est bornée sur $\overline{H}$.*

Preuve :

$$\forall z \in H, \qquad |F(z)| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{|e^{in^2\pi z}|}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{Re(in^2\pi z)}}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-Im(n^2\pi z)}}{n^2} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \square$$

Proposition 4.5 *La fonction F est holomorphe sur H et*

$$\forall z \in H, \quad F'(z) = i\pi \sum_{n\geq 1} e^{in^2\pi z}.$$

De plus, F est continue sur $\overline{H}$.

Preuve : La série de fonction définissant F est normalement convergente sur H. $\square$

Remarque 4.6 *Si $z \in H$, la série $\sum_{n\geq 1} e^{in^2\pi z}$ converge, en effet :*

$$\left|\sum_{n\geq 1} e^{in^2\pi z}\right| \leq \sum_{n\geq 1} |e^{in^2\pi z}| = \sum_{n\geq 1} e^{Re(in^2\pi z)} = \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi .Im(z)}$$

et le membre de droite converge car $Im(z) > 0$.

Définition 4.7 *On définit la fonction θ de Jacobi par :*

$$\forall z \in H, \quad \theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in^2\pi z}.$$

Remarque 4.8 *On a :* $\quad \forall z \in H, \quad F'(z) = \frac{i\pi}{2}(\theta(z) - 1).$

Théorème 4.9 *Pour tout $z \in H$,*

$$\theta(z) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{z}} \theta(\frac{-1}{z})$$

où on note $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}Log(z)}$ où Log est la détermination principale du logarithme sur H.

Preuve du théorème 4.9 :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+a)^2} dt = 1$$

Or l'application $z \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+z)^2} dt$ est holomorphe. En effet, soit $C > 0$, si $|z| \leq C$ on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| e^{-\pi(t+z)^2} \right| = e^{-\pi Re((t+z)^2)}$$

or :

$$\begin{aligned} Re((z+t)^2) &= Re(z^2 + 2tz + t^2) \\ &= Re(z^2) + 2tRe(z) + t^2 \\ &\geq -|z^2| - 2|t|.|z| + t^2 \\ &\geq -C^2 - 2C|t| + t^2 \\ &= -2C^2 + (|t| - C)^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\left| e^{-\pi(t+z)^2} \right| \leq e^{\pi C^2} e^{-\pi(|t|-C)^2} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}).$$

Par principe des zéros isolés, on a donc :

$$\forall a \in \mathbb{C}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(t+a)^2} dt = 1.$$

En prenant $a = i\xi$ où $\xi \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi t\xi} dt = e^{-\pi\xi^2}.$$

Si $x > 0$, alors par changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{x}}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2 x} e^{-2i\pi u\xi\sqrt{x}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi\xi^2}.$$

Soit $y \in \mathbb{R}$. En appliquant cette formule en $\xi = \frac{y}{\sqrt{x}}$ on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi u^2 x} e^{-2i\pi uy} du = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi y^2/x}.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\pi u^2 (ix)} e^{-2i\pi uy} du = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{ix}} e^{-i\pi y^2/(ix)}.$$

Or l'application $z \longmapsto \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi u^2 z} e^{-2i\pi uy} du$ est holomorphe sur H. En effet, soit $K \subset H$, un compact, alors l'application continue $z \longmapsto Im(z)$ atteint son minimum m sur K, donc $m > 0$ et on a :

$$\forall z \in K, \forall u \in \mathbb{R}, \quad \left| e^{i\pi u^2 z} e^{-2i\pi uy} \right| = e^{-\pi u^2 Im(z)} \leq e^{-\pi u^2 m} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$$

Par principe des zéros isolés, on a :

$$\forall z \in H, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{i\pi u^2 z} e^{-2i\pi uy} du = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{z}} e^{-i\pi y^2/z}.$$

Par la formule sommatoire de Poisson (voir le lemme 5.1 en appendice) :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 z} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\pi n^2/z}. \qquad \square$$

Théorème 4.10 *Pour tout $x > 0$,*

$$F(x) = F(0) + i\pi e^{i\pi/4}\sqrt{x} - \frac{i\pi}{2}x + e^{i\pi/4}x^{3/2}F(-\frac{1}{x}) - \frac{3}{2}e^{i\pi/4}\int_0^x \sqrt{t}F(-\frac{1}{t})dt.$$

Preuve : On fixe $y \in]0,1[$ et $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^x \theta(t+iy)dt &= \int_0^x (1 + \frac{2}{i\pi}F'(t+iy))dt \\ &= x + \frac{2}{i\pi}(F(x+iy) - F(iy)).\end{aligned}$$

D'une part, F étant continue sur $\overline{H}$, on a :

$$x + \frac{2}{i\pi}(F(x+iy) - F(iy)) \to x + \frac{2}{i\pi}(F(x) - F(0))$$

lorsque $y \searrow 0$.

D'autre part, par le théorème 4.9 :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \theta(t+iy)dt &= e^{i\pi/4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+iy}}\theta\left(-\frac{1}{t+iy}\right)dt \\
&= e^{i\pi/4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+iy}}\left(1+\frac{2}{i\pi}F'\left(-\frac{1}{t+iy}\right)\right)dt \\
&= e^{i\pi/4}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+iy}}dt + \frac{2e^{i\pi/4}}{i\pi}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t+iy}}F'\left(-\frac{1}{t+iy}\right)dt \\
&= 2e^{i\pi/4}(\sqrt{x+iy}-\sqrt{iy}) + \frac{2e^{i\pi/4}}{i\pi}\int_0^x (t+iy)^{3/2}\frac{d}{dt}\left[F\left(-\frac{1}{t+iy}\right)\right]dt\ .
\end{aligned}$$

Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^x (t+iy)^{3/2}\frac{d}{dt}\left[F\left(-\frac{1}{t+iy}\right)\right]dt \quad = \quad & (x+iy)^{3/2}F\left(-\frac{1}{x+iy}\right)-(iy)^{3/2}F\left(-\frac{1}{iy}\right) \\
& -\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{t+iy}\quad F\left(-\frac{1}{t+iy}\right)dt\ ,
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \theta(t+iy)dt \quad = \quad & 2e^{i\pi/4}(\sqrt{x+iy}-\sqrt{iy}) \\
& + \frac{2e^{i\pi/4}}{i\pi}\left((x+iy)^{3/2}F\left(-\frac{1}{x+iy}\right)-(iy)^{3/2}F\left(-\frac{1}{iy}\right)\right) \\
& - \frac{3e^{i\pi/4}}{i\pi}\int_0^x \sqrt{t+iy}\quad F\left(-\frac{1}{t+iy}\right)dt.
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\left|\sqrt{t+iy}F\left(-\frac{1}{t+iy}\right)\right| \leq \frac{\pi^2}{6}(t^2+y^2)^{1/4} \leq \frac{\pi^2}{6}(t^2+1)^{1/4} \in \mathscr{L}^1([0,x]).$$

Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\int_0^x \sqrt{t+iy}F\left(-\frac{1}{t+iy}\right)dt \xrightarrow[y\searrow 0]{} \int_0^x \sqrt{t}F\left(-\frac{1}{t}\right)dt.$$

Ainsi :

$$\int_0^x \theta(t+iy)dt \xrightarrow[y\searrow 0]{} 2e^{i\pi/4}\sqrt{x}+\frac{2e^{i\pi/4}}{i\pi}x^{3/2}F\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{3e^{i\pi/4}}{i\pi}\int_0^x \sqrt{t}F\left(-\frac{1}{t}\right)dt.$$

Finalement :

$$F(x)=F(0)+i\pi e^{i\pi/4}\sqrt{x}-\frac{i\pi}{2}x+e^{i\pi/4}x^{3/2}F\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{3}{2}e^{i\pi/4}\int_0^x\sqrt{t}F\left(-\frac{1}{t}\right)dt. \qquad \square$$

Proposition 4.11 $F(x)=F(0)+i\pi e^{i\pi/4}\sqrt{x}-\frac{i\pi}{2}x+O(x^{3/2})$ *lorsque* $x\searrow 0$.

Preuve : Ceci découle du théorème précédent puisque F est bornée sur $\mathbb{R}$. $\square$

4.3 Non-dérivabilité en 0

Proposition 4.12 *La fonction R n'est pas dérivable en 0.*

Preuve : Soit $t>0$. On écrit :

$$R(t)=\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(n^2\pi t)}{n^2}=\sum_{n^2t\leq 1/2}+\sum_{1/2<n^2t\leq 1}+\sum_{n^2t>1}$$

Grâce à l'inégalité $\sin(x)\geq\frac{2}{\pi}x$ valable pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ on a :

$$\sum_{n^2t\leq 1/2}\frac{\sin(n^2\pi t)}{n^2}\geq\sum_{n\leq(2t)^{-1/2}}2t\geq(2t)\lfloor(2t)^{-1/2}\rfloor$$

La deuxième somme est minorée par 0.
La troisième somme est minorée par :

$$-\sum_{n>t^{-1/2}}\frac{1}{n^2}\geq-\int_{t^{-1/2}}^{\infty}\frac{du}{u^2}=-t^{1/2}$$

Ainsi

$$R(t)\geq(2t)\lfloor(2t)^{-1/2}\rfloor-t^{1/2}\sim\sqrt{t}(\sqrt{2}-1)$$

Dès lors $\frac{R(t)}{t}\to+\infty$ lorsque $t\searrow 0$, donc R n'est pas dérivable en 0. $\square$

4.4 Dérivabilité en les rationnels $\frac{p}{q}$ avec p et q impairs

On commence en traitant le cas de $1 = \frac{1}{1}$.

Proposition 4.13 *La fonction R est dérivable en 1 et $R'(1) = -\pi/2$.*

Preuve : On note $a = i\pi e^{i\pi/4}$ et $b = -i\pi/2$. Alors par la proposition 4.3,

$$\begin{aligned}
F(1+x) &= \frac{1}{2}F(4x) - F(x) \\
&= \frac{1}{2}(F(0) + 2a\sqrt{x} + 4bx + O(x^{3/2})) - (F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2})) \\
&= -\frac{1}{2}F(0) + bx + O(x^{3/2}) \\
&= F(1) + bx + O(x^{3/2}).
\end{aligned}$$

Ce qui nous dit que lorsque $x \searrow 0$:

$$R(1+x) = R(1) - \frac{\pi}{2}x + O(x^{3/2}).$$

Ainsi R est dérivable à droite en 1. De plus, $x \mapsto R(1+x)$ est impaire car R est impaire et 2-périodique et :

$$R(1+x) = Im(F(1+x)) = Im\left(\frac{1}{2}F(4x) - F(x)\right) = \frac{1}{2}R(4x) - R(x).$$

Ainsi $R(1) = 0$ et on a lorsque $x \searrow 0$:

$$R(1-x) = -R(1+x) = -\frac{\pi}{2}(-x) + O(x^{3/2}).$$

ce qui donne lorsque $x \to 0$:

$$R(1+x) = -\frac{\pi}{2}x + O(x^{3/2}). \qquad \square$$

Proposition 4.14 *Soit $x \in \mathbb{Q}$, on écrit $x = \frac{p}{q}$ sous forme d'une fraction irréductible. La fonction F est dérivable en x si et seulement si p et q sont impairs. Si tel est le cas, $F'(x) = F'(1) = -\frac{i\pi}{2}$.*

Preuve : La fonction F est 2-périodique donc F est dérivable en x ssi elle est dérivable en $x+2$ et le cas échéant $F'(x) = F'(x+2)$.

On a par le théorème 4.10 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx - \frac{a}{2b}x^{3/2}F(-\frac{1}{x}) + \frac{3a}{4b}\int_0^x \sqrt{t}F(-\frac{1}{t})dt \qquad (*)$$

Ainsi, si F est dérivable en $x > 0$, F est dérivable en $-1/x$ et en dérivant $(*)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{a}{2\sqrt{x}} + b - \frac{a}{2b}x^{3/2}\frac{1}{x^2}F'(-\frac{1}{x}) - \frac{3a}{4b}\sqrt{x}F(-\frac{1}{x}) + \frac{3a}{4b}\sqrt{x}F(-\frac{1}{x}) \\ &= b + \frac{a}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{b}F'(-\frac{1}{x})\right). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x > 0$,

$$F'(-\frac{1}{x}) = b \Longleftrightarrow F'(x) = b.$$

Aussi, si F n'est pas dérivable en $x > 0$, alors par $(*)$ elle ne l'est pas non plus en $-1/x$.

On va montrer par récurrence sur $N \geq 1$ que pour tout $N \geq 1$ et $x = \frac{p}{q}$ où p et q sont premiers entre eux et $|q| \leq N$, si p et q sont impairs F est dérivable en x de dérivée $b = -\frac{i\pi}{2}$, sinon, si p ou q est pair, alors F n'est pas dérivable en x.

C'est vrai pour $N = 1$ car si $q \neq 0$ et $|q| \leq 1$, $q = \pm 1$ donc $x \in \mathbb{Z}$. Si $x = 1 \mod 2$, comme F est 2-périodique de dérivée b en 1, F est dérivable en x de dérivée b. Si $x = 0 \mod 2$, comme F n'est pas dérivable en 0, et 2-périodique, elle ne l'est pas non plus en x.

Soit $N \geq 1$ tel que la propriété est vraie au rang N. Soit $x = \frac{p}{q}$ où p et q sont premiers entre eux et $|q| \leq N+1$.

Il existe un entier k tel que $y = x - 2k \in]-1,1]$. De plus y=$\frac{p-2kq}{q}$ et les entiers $p - 2kq$ et q sont premiers entre eux de même parité que p et q.
Par 2-périodicité, F est dérivable en x si et seulement si elle est dérivable en y et le cas échéant elle a même dérivée en ces deux points. On peut donc supposer sans perte de généralité que $x \in]-1,1]$.

Cas où p et q sont impairs :
$x = p/q$ et p est impair donc $x \neq 0$. Si $x = 1$, alors $F'(x) = b$. Sinon, $x \in]-1,1[$ ce qui implique que $|p| < |q| \leq N+1$, donc comme $-1/x = -q/p$ et $|p| \leq N$. Par hypothèse de récurrence, F est dérivable en $-1/x$ de dérivée b, et donc F est dérivable en x de

dérivée b.

Cas où p ou q est pair :
A fortiori $x \neq 1$. Si $x = 0$, alors R n'est pas dérivable en x donc F non plus puisque $R = Im(F)$. Si $x \neq 0$, alors comme $x \in]-1,1[$, on a $|p| < |q| \leq N+1$. Ainsi $-1/x = -q/p$ et $|p| \leq N$. Par hypothèse de récurrence, F n'est pas dérivable en $-1/x$ donc R ou $C := Re(F)$ n'est pas dérivable en $-1/x$. Comme R est impaire et C est paire, on peut donc supposer que $-1/x > 0$, donc F n'est pas dérivable en $x = -1/(-1/x)$. $\square$

Remarque 4.15 *Ceci implique que R est dérivable de dérivée $-\frac{\pi}{2}$ en les rationnels de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont impairs, et pour tout rationnel de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q ne sont pas de même parité, R ou $C := Re(F)$ n'est pas dérivable en $\frac{p}{q}$.*
Ce qui suit va permettre de conclure que l'exposant de Hölder de R en ces points est égal à $1/2$ ce qui implique la non dérivabilité de R.

4.5 Résultats sur les ondelettes

Dans la suite, on choisit l'ondelette $\psi(x) = \frac{1}{\pi(x+i)^2}$.
On a $|\psi(x)| = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
La fonction ψ est intégrable sur $\mathbb{R}$, en effet :

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+1} dx = 1 < +\infty$$

De plus on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \left[\frac{-1}{x+i} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Proposition 4.16 *Soit g une fonction holomorphe sur H, continue et bornée sur $\overline{H}$.*
Alors on a pour $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ alors :

$$g'(b+ia) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x-(b+ia))^2} dx$$

et

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x+(b+ia))^2} dx = 0.$$

La preuve de ce résultat est une application de la formule intégrale de Cauchy (en prenant l'intégrale sur des demi-cercles) qui est faite en appendice. Dans la proposition suivante, on utilise cette formule pour calculer la transformée en ondelettes W_R de la fonction de Riemann.

Proposition 4.17 *Pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a*

$$W_R(a,b) = \frac{i\pi a}{2}(\theta(b+ia)-1).$$

Preuve : On rappelle la notation $F(x) = C(x) + iR(x)$, où $F(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^2\pi x}}{n^2}$.
On a :

$$R(x) = \frac{1}{2i}(F(x) - \tilde{F}(x))$$

où $\tilde{F}(x) = F(-x)$.

Ainsi :

$$W_R = \frac{1}{2i}(W_F - W_{\tilde{F}}).$$

On a :

$$\begin{aligned} W_F(a,b) &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{\pi(\frac{x-b}{a}-i)^2}dx \\ &= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{(x-(b+ia))^2}dx \\ &= 2iaF'(b+ia). \end{aligned}$$

La dernière égalité étant due à la proposition 4.16. Par application cette proposition, on a également :

$$\begin{aligned} W_{\tilde{F}}(a,b) &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-F(-x)}{\pi(\frac{x-b}{a}-i)^2}dx \\ &= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{(-x-(b+ia))^2}dx \\ &= \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{(x+(b+ia))^2}dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$W_R(a,b) = \frac{1}{2i}W_F(a,b) = aF'(b+ia).$$

On a vu que :

$$\forall z \in H, \quad F'(z) = i\pi\sum_{n=1}^{+\infty} e^{i\pi n^2 z} = \frac{i\pi}{2}(\theta(z)-1),$$

donc on a :

$$\begin{aligned} W_R(a,b) &= aF'(b+ia) \\ &= \frac{i\pi a}{2}(\theta(b+ia)-1). \qquad \square \end{aligned}$$

Proposition 4.18 *Notons $x+iy \in H$. $F(x+iy) \to 0$ lorsque $y \to +\infty$ uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.*

Preuve :

$$\begin{aligned} |F(x+iy)| &= \left| \sum_{n\geq 1} \frac{e^{i\pi n^2(x+iy)}}{n^2} \right| \\ &\leq \sum_{n\geq 1} |e^{i\pi n^2(x+iy)}| \\ &= \sum_{n\geq 1} e^{-n^2\pi y} \\ &\leq \sum_{n\geq 1} e^{-n\pi y} \qquad \text{car } y>0 \\ &= \frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi y}} \to 0 \quad \text{lorsque } y \to +\infty. \qquad \square \end{aligned}$$

Proposition 4.19 *Soit g une fonction holomorphe sur H, continue et bornée sur $\overline{H}$ telle que :*

(i) $g(x+iy) \to 0$ lorsque $y \to +\infty$ uniformément pour $x \in \mathbb{R}$,
(ii) pour tout $c>0$, g' est bornée sur $\{z \mid Im(z) \geq c\}$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = \int_{a>0} \left(\int_{b\in\mathbb{R}} W_g(a,b)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{db}{a}\right)\frac{da}{a}.$$

Preuve : Par la proposition 4.16 :

$$W_g(a,b) = 2iag'(b+ia).$$

Maintenant :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} W_g(a,b)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{db}{a} &= 2ia\int_{\mathbb{R}} \frac{g'(b+ia)}{\pi(\frac{x-b}{a}+i)^2}\frac{db}{a} \\ &= \frac{2ia^2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{g'(b+ia)}{(b-(x+ia))^2}db. \end{aligned}$$

Or la fonction $\overline{H} \to \mathbb{C}$; $b \mapsto g'(b+ia)$ est holomorphe sur H car g est holomorphe sur l'ouvert $H \subset \mathbb{C}$ donc g' aussi, et la restriction de g' à $\{b+ia,\ b \in \overline{H}\}$ est continue et bornée par l'hypothèse (ii). Par application de la proposition 4.16 :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{g'(b+ia)}{(b-(x+ia)^2} db = 2i\pi g''(x+2ia)$$

d'où :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} W_g(a,b)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{db}{a} &= \frac{2ia^2}{\pi}(2i\pi)g''(x+2ia)\\ &= -4a^2 g''(x+2ia).\end{aligned}$$

On en déduit que, pour tous $0 < \rho < R$,

$$\begin{aligned}\int_{\rho}^{R}\int_{\mathbb{R}} W_g(a,b)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{db}{a}\frac{da}{a} &= -4\int_{\rho}^{R} ag''(x+2ia)da\\ &= -\int_{2\rho}^{2R} ug''(x+iu)du.(*)\end{aligned}$$

Par intégration par parties ceci donne :

$$\begin{aligned}-\int_{2\rho}^{2R} ug''(x+iu)du &= \left[iug'(x+iu)\right]_{2\rho}^{2R} - i\int_{2\rho}^{2R} g'(x+iu)da\\ &= 2iRg'(x+2iR) - 2i\rho g'(x+2i\rho) - g(x+2iR) + g(x+2i\rho). \quad (**)\end{aligned}$$

Vérifions que $2iRg'(x+2iR) \longrightarrow 0$ lorsque $R \to +\infty$. Notons $z = x+2iR$ où $R > 0$, et on définit le lacet $\Gamma(\theta) = z + Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, à valeurs dans H.

Alors par la formule intégrale de Cauchy :

$$g'(x+2iR) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - x - 2iR)^2} d\xi,$$

donc :

$$\begin{aligned}2R|g'(x+2iR)| &\leq \frac{R}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{g(x+2iR+Re^{i\theta})}{(Re^{i\theta})^2)} iRe^{i\theta} d\theta\right|\\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |g(x+2iR+Re^{i\theta})| d\theta.\end{aligned}$$

Or la fonction g est bornée donc :

$$|g(x+2iR+Re^{i\theta})| \leq \|g\|_\infty \in \mathscr{L}^1([0,2\pi]).$$

De plus, en raison de la convergence uniforme en la partie réelle dans l'hypothèse (i), pour tout $\theta \in [0,2\pi]$,

$$|g(x+2iR+Re^{i\theta})| \to 0 \quad \text{lorsque } R \to +\infty.$$

Par le théorème de convergence dominée on obtient donc :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |g(x+2iR+Re^{i\theta})|d\theta \to 0 \quad \text{lorsque } R \to +\infty.$$

Ainsi :

$$|2iRg'(x+2iR)| = 2R|g'(x+2iR)| \to 0 \quad \text{lorsque } R \to +\infty.$$

Vérifions maintenant que $2i\rho g'(x+2i\rho) \to 0$ lorsque $\rho \to 0$.

On a pour $x \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$, par l'application de la proposition 4.16 :

$$g'(x+2i\rho) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{(t-x-2i\rho)^2}dt.$$

Encore par application de la proposition 4.16 avec la fonction constante égale à 1, on a :

$$0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t-x-2i\rho)^2}dt.$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{(t-x-2i\rho)^2}dt &= \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)-g(x)}{(t-x-2i\rho)^2}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{g(x+2\rho u)-g(x)}{(2\rho u-2i\rho)^2}2\rho du \\
&= \frac{1}{2\rho}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(x+2\rho u)-g(x)}{(u-i)^2}du,
\end{aligned}$$

.

Or :

$$\left|\frac{g(x+2\rho u)-g(x)}{(u-i)^2}\right| \leq 2\|g\|_\infty \frac{1}{1+u^2} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}),$$

et pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\frac{g(x+2\rho u)-g(x)}{(u-i)^2} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \to 0.$$

Par théorème de convergence dominée,

$$2i\rho g'(x+2i\rho) = i\int_{\mathbb{R}} \frac{g(x+2\rho u)-g(x)}{(u-i)^2} du \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \rho \to 0.$$

Maintenant, $g(x+2iR) \to 0$ lorsque $R \to +\infty$ par l'hypothèse (i) et $g(x+2i\rho) \to g(x)$ lorsque $\rho \to 0$ par continuité de g sur $\overline{H}$.

En somme, par les égalité $(*)$ et $(**)$ et en prenant la limite pour chacun des termes dans $(**)$, on on obtient :

$$\int_{\rho}^{R} \int_{\mathbb{R}} W_g(a,b)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{db}{a}\frac{da}{a} \longrightarrow g(x) \quad \text{lorsque } \rho \to 0,\ R \to +\infty. \qquad \square$$

Par les mêmes preuves que pour les théorèmes 3.13 et 3.14, on déduit de la formule de reconstruction de la proposition 4.19 les deux théorèmes suivants :

Théorème 4.20 *Soit* $0 < \alpha' < \alpha < 1$. *Soit* g *une fonction qui vérifie les hypothèses de la proposition 4.19. Supposons qu'il existe* $a_0, b_0 > 0$ *tels que :*

$$0 < a < a_0, |b-x_0| < b_0 \implies |W_g(a,b)| \leq Ca^{\alpha}\left(1+\frac{|b-x_0|}{a}\right)^{\alpha'}$$

alors $g \in C^{\alpha}(x_0)$.

Théorème 4.21 *Soit* g *une fonction qui vérifie les hypothèses de la proposition 4.19.*

Supposons que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$; $x \mapsto g(x)$ *est* β*-hölderienne sur* $\mathbb{R}$ $(0 < \beta < 1)$.

Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, *l'exposant de Hölder* $\alpha(g,x_0)$ *est donné par*

$$\alpha(g,x_0) = \liminf_{a\searrow 0, b\to x_0} \frac{\log|W_g(a,b)|}{\log(a+|b-x_0|)}.$$

Remarque 4.22 *Par la proposition 4.18, et par le fait que pour tout* $c > 0$, *pour tout* $z = x+iy$ *tel que* $y \geq c$ *:*

$$
\begin{aligned}
|F'(z)| &= \left| i\pi \sum_{n\geq 1} e^{i\pi n^2 z} \right| \\
&\leq \pi \sum_{n\geq 1} \left| e^{i\pi n^2 z} \right| \\
&\leq \pi \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 y} \\
&\leq \pi \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 c} = C < +\infty
\end{aligned}
$$

F, $\tilde{F}$ puis R vérifient les hypothèses de la proposition 4.19 et des théorèmes 4.20 et 4.21.

4.6 Groupe θ-modulaire

Définition 4.23 *On appelle groupe θ-modulaire Γ le groupe des homographies définies sur H du type :*

$$\gamma(z) = \frac{rz+s}{qz-p}$$

où $rp+sq=-1$ et r,s,p,q sont des entiers et la matrice

$$\begin{pmatrix} r & s \\ q & p \end{pmatrix} \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} \text{pair} & \text{impair} \\ \text{impair} & \text{pair} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \text{impair} & \text{pair} \\ \text{pair} & \text{impair} \end{pmatrix}.$$

Proposition 4.24 *Si γ appartient au groupe θ-modulaire, alors $\gamma(H) \subset H$.*

Preuve :
Soit $z \in H$. Alors

$$
\begin{aligned}
\gamma(z) &= \frac{rz+s}{qz-p} \\
&= \frac{(rz+s)(q\bar{z}-p)}{|qz-p|^2} \\
&= \frac{rq|z|^2 - ps - prz + sq\bar{z}}{|qz-p|^2}.
\end{aligned}
$$

Donc :

$$Im(\gamma(z)) = \frac{-prIm(z) - sqIm(z)}{|qz-p|^2} = \frac{Im(z)}{|qz-p|^2} > 0. \qquad \square$$

Proposition 4.25 *Le groupe θ-modulaire est un groupe pour la composition engendré par les homographies $\tau : z \mapsto z+2$ et $\sigma : z \mapsto \frac{-1}{z}$.*

Preuve : Vérifions que Γ est un groupe
Soit $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Notons :

$$\gamma_1(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{et} \quad \gamma_2(z) = \frac{ez+f}{gz+h}.$$

Soit $z \in H$, alors :

$$\begin{aligned}\gamma_1 \circ \gamma_2(z) &= \frac{a\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right)+b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right)+d} \\ &= \frac{a(ez+f)+b(gz+h)}{c(ez+f)+d(gz+h)} \\ &= \frac{(ae+bg)z+(af+bh)}{(ce+dg)z+(fc+dh)}\end{aligned}$$

On remarque que les coefficients de $\gamma_1 \circ \gamma_2$ correspondent à ceux de la matrice obtenue par produit martriciel de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ qui sont les matrices des coefficients de γ_1 et γ_2.

On obtient donc que la matrice des coefficients de $\gamma_1 \circ \gamma_2$ est de déterminant 1 et que la projection modulo 2 de cette matrice est I_2 ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\gamma_1 \circ \gamma_2 \in \Gamma$ et Γ est stable par composition.

À a, b, c, d fixés, si on prend $f = -b,\ h = a,\ e = d,\ g = -c$, alors $\gamma_2 \in \Gamma$ et on a :

$$\begin{cases} ae+bg = ad-bc = 1 \\ af+bh = -ab+ab = 0 \\ ce+dg = cd-dc = 0 \\ fc+dh = -bc+ad = 1 \end{cases}$$

Donc $\gamma_1 \circ \gamma_2 = id_H$.

On a alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = I_2$$

Donc on a aussi :

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$$

ce qui donne $\gamma_2 \circ \gamma_1 = id_H$.

De plus $\circ$ est une loi de composition interne associative sur Γ donc Γ est un groupe pour la composition.

Vérifions maintenant que $\Gamma = < \sigma, \tau >$.

Soit $\gamma \in \Gamma$, notons :

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Si $a = 0$, alors $bc = -1$ donc $b = -c = \pm 1$. Quitte à remplacer a, b, c, d par leurs opposés, on peut supposer que $b = -1$ et $c = 1$.

On a :

$$\gamma(z) = \frac{-1}{z+d}.$$

En composant par σ à gauche on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma(z)) &= \sigma\left(\frac{-1}{z+d}\right) \\ &= z+d \\ &= \tau^{d/2}(z) \end{aligned}$$

car d est pair puisque $a = 0$ est pair et $\gamma \in \Gamma$. Ainsi $\gamma = \sigma \circ \tau^{d/2}$.

Si $|a| = 1$, on peut supposer que $a = 1$. Alors $d - bc = 1$ et on a :

$$\gamma(z) = \frac{z+b}{cz+d}$$

donc :

$$\sigma(\gamma(z)) = \frac{-cz-d}{z+b}.$$

Si $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} (\tau^k \circ \sigma \circ \gamma)(z) &= \frac{-cz-d}{z+b} + 2k \\ &= \frac{(-c+2k)z - d + 2kb}{z+b} \end{aligned}$$

Or c est pair puisque $a = 1$ est impair et $\gamma \in \Gamma$ donc on peut prendre $k = c/2$ et on a :

$$(\tau^{c/2} \circ \sigma \circ \gamma)(z) = \frac{-d+cb}{z+b} = \frac{-1}{z+b}.$$

On se ramène donc au cas $a = 0$ et on en déduit que $\gamma \in <\tau, \sigma>$.

Soit $N \geq 1$ tel que pour tout $|a| \leq N$, si $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ est un élément de Γ, alors $\gamma \in <\tau, \sigma>$.

Si $|a| = N+1$, on peut supposer $a = N+1 > 0$. Quitte à considérer $\sigma \circ \gamma$, on peut supposer que $|c| < |a|$ car a et c sont de parités différentes donc $|a| \neq |c|$. On a $c \neq 0$ sinon $ad = 1$, ce qui est impossible puisque $a > 1$. Si $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}(\tau^k \circ \gamma)(z) &= \frac{az+b}{cz+d} + 2k \\ &= \frac{(a+2kc)z + (b+2kd)}{cz+d}\end{aligned}$$

Prenons alors $k = -1$ si $c > 0$ et $k = 1$ si $c < 0$. De sorte que $a + 2kc = a - 2|c|$.

Or :

$$-a < a - 2|c| < a$$

donc $|a + 2kc| < a = N+1$. Ainsi $\tau^k \circ \gamma \in <\tau, \gamma>$, donc $\gamma \in <\tau, \sigma>$.

Cela démontre par principe de récurrence que $\Gamma = <\tau, \sigma>$. $\square$

Théorème 4.26 *Soit γ appartenant au groupe θ-modulaire définie par $\gamma(z) = \frac{rz+s}{qz-p}$, alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que :*

$$\forall z \in H, \quad \theta(z) = \theta(\gamma(z)) e^{im\pi/4} q^{-1/2} \left(z - \frac{p}{q}\right)^{-1/2}.$$

Preuve : Pour tout γ dans le groupe θ-modulaire, on note μ_γ de sorte que pour tout $z \in H$, $\theta(z) = \theta(\gamma(z)) \cdot \mu_\gamma(z)$.

Si γ, δ sont dans le groupe θ-modulaire on a :

$$\theta(z) = \theta(\gamma(z)) \cdot \mu_\gamma(z) = \theta(\delta(\gamma(z))) \cdot \mu_\delta(\gamma(z)) \cdot \mu_\gamma(z),$$

ce qui nous donne la règle de composition : $\mu_{\delta \circ \gamma}(z) = \mu_\delta(\gamma(z)) \cdot \mu_\gamma(z)$.

Par le théorème 4.9, on a :

$$\forall z \in H, \quad \theta(z) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{z}} \theta\left(\frac{-1}{z}\right).$$

Ainsi, si on note $\sigma : z \mapsto \frac{-1}{z}$, cette identité implique :

$$\forall z \in H, \quad \mu_\sigma(z) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{z}} = e^{\frac{i\pi}{4}} \sigma'(z)^{1/4}.$$

Un élement γ du groupe θ-modulaire s'écrit : $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_n$ où $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, $\gamma_i \in \{\tau, \tau^{-1}, \sigma\}$ (puisque $\sigma = \sigma^{-1}$).

On va raisonner par récurrence sur n afin de montrer que pour tout γ dans le groupe θ-modulaire, il existe un entier m_γ tel que :

$$\forall z \in H, \quad \mu_\gamma(z) = e^{\frac{i\pi}{4} m_\gamma} \gamma'(z)^{1/4} \quad (P)$$

L'application identité $z \mapsto z$ vérifie la proposition (P).

Soit $n \geq 0$ tel que pour tout $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_n$, γ vérifie la proposition (P),

$$\forall z \in H, \quad \mu_\gamma(z) = e^{\frac{i\pi}{4} m_\gamma} \gamma'(z)^{1/4}.$$

Alors :

$$\mu_{\gamma \circ \tau}(z) = \mu_\gamma(\tau(z)) \cdot \mu_\tau(z)$$

Or, comme θ est 2-périodique : $\theta(\tau(z)) = \theta(z+2) = \theta(z)$.

Donc : $\mu_\tau(z) = 1$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mu_{\gamma \circ \tau}(z) &= \mu_\gamma(\tau(z)) \\
&= e^{\frac{i\pi}{4} m_\gamma} \gamma'(z+2)^{1/4} \\
&= e^{\frac{i\pi}{4} m_\gamma} [(\gamma \circ \tau)'(z)]^{1/4},
\end{aligned}$$

car $(\gamma \circ \tau)' = \gamma'(\tau) \cdot \tau' = \gamma'(\tau)$ puisque $\tau' = 1$.

De même : $\mu_{\tau^{-1} \circ \gamma}(z) = e^{\frac{i\pi}{4} m_\gamma} [(\tau^{-1} \circ \gamma)'(z)]^{1/4}$.

On a : $\mu_\sigma(z) = e^{\frac{i\pi}{4}} z^{-1/2}$,

de plus, on a :

$$\begin{aligned}
\mu_{\gamma \circ \sigma}(z) &= \mu_\gamma(\sigma(z)) \cdot \mu_\sigma(z) \\
&= \mu_\gamma\left(\frac{-1}{z}\right) e^{\frac{i\pi}{4}} z^{-1/2} \\
&= e^{\frac{i\pi}{4} m_\gamma} \gamma'\left(\frac{-1}{z}\right)^{1/4} e^{\frac{i\pi}{4}} z^{-1/2} \\
&= e^{\frac{i\pi}{4}(m_\gamma + 1)} z^{-1/2} \gamma'\left(\frac{-1}{z}\right)^{1/4}.
\end{aligned}$$

Or

$$(\gamma \circ \sigma)'(z) \ = \ \gamma'(\sigma(z))\sigma'(z) \ = \ \frac{1}{z^2} \gamma'\left(\frac{-1}{z}\right).$$

Ainsi :

$$\mu_{\gamma \circ \sigma}(z) = e^{\frac{i\pi}{4}(m_\gamma + 1)} (\gamma \circ \sigma)'(z),$$

ce qui démontre le résultat par récurrence. $\square$

4.7 Non-dérivabilité en les rationnels $\frac{p}{q}$ avec p et q de parités différentes

On commence par un résultat sur la fonction θ de Jacobi qui sera utile pour les estimations de W_R.

Proposition 4.27 *Notons $z = x + iy \in H$. Alors $\theta(z) \to 1$ lorsque $y \to +\infty$ uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.*

Preuve :

$$|\theta(z) - 1| \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n y} = 2\frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi y}} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } y \to +\infty. \quad \square$$

Mieux que la non-dérivabilité de la fonction R, on a le résultat suivant :

Proposition 4.28 *Si $x_0 = \frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers premiers entre eux de parités différentes, alors $\alpha(R, x_0) = \frac{1}{2}$.*

En particulier, R n'est pas dérivable en x_0

Preuve : Prenons $a > 0$ et $b = \frac{p}{q}$. Par la proposition 4.17 :

$$|W_R(a,b)| = \frac{\pi a}{2}|\theta(b+ia) - 1|.$$

Par le théorème de Bézout, p et q étant premiers entre eux, il existe des entiers r et s tels que : $rp + sq = -1 \quad (*)$.

Quitte à remplacer r et s par $r' = r + q$ et $s' = s - p$, on peur supposer que r et s ne sont pas de même parité. En projetant l'égalité $(*)$ modulo 2, on voit que r et s sont respectivement de même parités que p et q.

Ainsi l'homographie γ définie par :

$$\gamma(z) = \frac{rz+s}{qz-p}$$

appartient au groupe θ-modulaire.

Par le théorème 4.26, il existe un entier m tel que :

$$\begin{aligned}
|W_R(a,b)| &= \frac{\pi a}{2}|\theta(b+ia) - 1| \\
&= \frac{\pi a}{2}\left|\theta(\gamma(b+ia))e^{im\pi/4}q^{-1/2}\left(\frac{p}{q} + ia - \frac{p}{q}\right)^{-1/2} - 1\right|.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\gamma(b+ia) &= \frac{r\left(\frac{p}{q}+ia\right)+s}{q\left(\frac{p}{q}+ia\right)-p}\\ &= \frac{1}{iqa}\left(\frac{rp}{q}+ria+s\right)\\ &= \frac{r}{q}+\frac{rp+sq}{iq^2a}\\ &= \frac{r}{q}+\frac{-1}{iq^2a},\end{aligned}$$

ainsi :

$$\begin{aligned}|W_R(a,b)| &= \frac{\pi a}{2}\left|\theta\left(\frac{r}{q}+\frac{-1}{iq^2a}\right)e^{im\pi/4}(iqa)^{-1/2}-1\right|\\ &= \frac{\pi a^{1/2}}{2}\left|\theta\left(\frac{r}{q}+\frac{i}{q^2a}\right)e^{im\pi/4}(iq)^{-1/2}-a^{1/2}\right|.\end{aligned}$$

Or par la proposition 4.27 :

$$\frac{\pi}{2}\left|\theta\left(\frac{r}{q}+\frac{i}{q^2a}\right)e^{im\pi/4}(iq)^{-1/2}-a^{1/2}\right| \longrightarrow \frac{\pi}{2\sqrt{q}} \quad \text{lorsque } a \searrow 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{a\searrow 0}\frac{log|W_R(a,b)|}{log(a)} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent :

$$\liminf_{a\searrow 0, b\to x_0}\frac{log|W_R(a,b)|}{log(a+|b-x_0|)} \le \frac{1}{2}.$$

Ce qui nous dit par le théorème 4.21 que :

$$\alpha(R,x_0) \le \frac{1}{2}.$$

Comme de plus $R \in C^{1/2}(\mathbb{R})$ par la proposition 4.2, on a :

$$\alpha(R,x_0) = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

4.8 Etude en les irrationnels

Proposition 4.29 *Soit x_0 un irrationnel. Il existe une suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement positifs tels que $q_n \to +\infty$ et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|x_0 - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

et p_n, q_n, p_{n+1}, q_{n+1} ne sont pas tous impairs.

Preuve : Pour obtenir la fraction continue de x_0, on commence par prendre $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$ où $\lfloor \quad \rfloor$ désigne la partie entière de sorte que $\xi_0 := x_0 - a_0 \in]0,1[$, puis on définit par récurrence, pour tout $n \geq 1$, $a_n > 0$ l'entier vérifiant :

$$\xi_n := \frac{1}{\xi_{n-1}} - a_n \in]0,1[$$

On a alors :

$$x_0 = a_0 + \xi_0, \frac{1}{\xi_0} = a_1 + \xi_1, \ldots, \frac{1}{\xi_{n-1}} = a_n + \xi_n.$$

Pour une suite de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pas nécessairement entiers) tels que pour tout $n \geq 1$ $\alpha_n > 0$, on définit la fraction continue de quotients partiels $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ par :

$$\rho_n := [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{\alpha_n}}}}$$

Avec cette notation on a :

$$x_0 = [a_0, a_1, \ldots, a_n + \xi_n]$$

On obtient la n-ième réduite r_n de la fraction continue de x_0 le rationnel obtenu en remplaçant ξ_n par 0 :

$$r_n := [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

Soient $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $\delta_{-1} = 1$, $\delta_0 = \alpha_0$, $\varepsilon_{-1} = 0$ et $\varepsilon_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} \delta_{n+1} = \alpha_{n+1}\delta_n + \delta_{n-1} \\ \varepsilon_{n+1} = \alpha_{n+1}\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} \end{cases}$.

On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\rho_n = \frac{\delta_n}{\varepsilon_n}.$$

En effet, c'est vrai pour $n = 0$ car :

$$\rho_0 = \alpha_0 = \frac{\delta_0}{\varepsilon_0}.$$

C'est aussi vrai pour $n = 1$ car :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1}\\ &= \frac{\delta_0}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\alpha_1}\\ &= \frac{\alpha_1\delta_0 + \varepsilon_0}{\alpha_1\varepsilon_0}\\ &= \frac{\alpha_1\delta_0 + \delta_{-1}}{\alpha_1\varepsilon_0 + \varepsilon_{-1}}\\ &= \frac{\delta_1}{\varepsilon_1}.\end{aligned}$$

Supposons que c'est vrai pour $n \geq 1$. Alors on a :

$$\rho_n = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \frac{\delta_n}{\varepsilon_n}$$

Ainsi :

$$[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \frac{\alpha_n\delta_{n-1} + \delta_{n-2}}{\alpha_n\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2}} \quad (*)$$

Comme on a :

$$\rho_{n+1} = [\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}],$$

alors en substituant α_n par $\alpha_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$ dans $(*)$, on obtient

$$\rho_{n+1} = \frac{(\alpha_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}})\delta_{n-1} + \delta_{n-2}}{(\alpha_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}})\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2}},$$

d'où :

$$\begin{aligned}\rho_{n+1} &= \frac{(\alpha_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}})\delta_{n-1} + \delta_{n-2}}{(\alpha_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}})\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2}}\\ &= \frac{(\alpha_n\alpha_{n+1} + 1)\delta_{n-1} + \delta_{n-2}\alpha_{n+1}}{(\alpha_n\alpha_{n+1} + 1)\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2}\alpha_{n+1}}\\ &= \frac{\alpha_{n+1}(\alpha_n\delta_{n-1} + \delta_{n-2}) + \delta_{n-1}}{\alpha_{n+1}(\alpha_n\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2}) + \varepsilon_{n-1}}\\ &= \frac{\alpha_{n+1}\delta_n + \delta_{n-1}}{\alpha_{n+1}\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}}\\ &= \frac{\delta_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}}.\end{aligned}$$

Ce qui démontre par principe de récurrence que $\rho_n = \frac{\delta_n}{\varepsilon_n}$ pour tout n.

La relation de récurrence : $\begin{cases} \delta_{n+1} = \alpha_n \delta_n + \delta_{n-1} \\ \varepsilon_{n+1} = \alpha_n \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} \end{cases}$,

peut s'écrire matriciellement $M_{n+1} = M_n \cdot A_n$ où on note pour tout $n \geq 0$:

$$M_n := \begin{pmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} \\ \varepsilon_n & \varepsilon_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A_n := \begin{pmatrix} \alpha_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour définir la suite de rationnels $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ voulue, on prend pour tout $n \geq 0$, $\alpha_n = a_n \in \mathbb{Z}$ puis pour tout $n \geq 0$ on note $p_n = \delta_n$ et $q_n = \varepsilon_n$ de sorte que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites d'entiers de premiers termes $p_0 = a_0,\ q_0 = 1$ et $p_1 = a_0 a_1 + 1,\ q_1 = a_1$.

De plus comme $\varepsilon_{-1} = 0,\ \delta_{-1} = 1,\ \delta_0 = p_0 = \alpha_0,\ \varepsilon_0 = q_0 = 1$ on a $\det(M_0) = \delta_0\varepsilon_{-1} - \delta_{-1}\varepsilon_0 = -1$ et comme pour tout n, $\det(A_n) = -1$ on a pour tout $n \geq 0$, $\det(M_n) = (-1)^{n-1}$.

Autrement dit, pour tout $n \geq 1$,

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} \qquad (**),$$

ce qui nous dit par le théoréme de Bézout que $p_n \wedge q_n = 1$. De plus comme $q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}$, on montre par récurrence que pour tout n, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement positifs et que cette suite est strictement croissante, ce qui implique que : $q_n \to +\infty$.

Donc $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ est une fraction sous forme irréductible.

Si $p_{n-1}, p_n,\ q_{n-1},\ q_n$ sont tous impairs, alors on a une contradiction en réduisant l'égalité $(**)$ modulo 2.

En notant pour un entier $n \geq 1$, $\delta = (a_{n+1} + \xi_{n+1})p_n + p_{n-1}$ et $\varepsilon = (a_{n+1} + \xi_{n+1})q_n + q_{n-1} > q_{n+1} > 0$, on a :

$$\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{(a_{n+1} + \xi_{n+1})p_n + p_{n-1}}{(a_{n+1} + \xi_{n+1})q_n + q_{n-1}} = [a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,\ a_n,\ a_{n+1} + \xi_{n+1}] = x_0,$$

la deuxième égalité étant due au résultat $(*)$ appliqué à la suite $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) := (a_0, \ldots, a_n, a_{n+1} + \xi_n)$.

Alors :

$$\begin{aligned} \left|\frac{p_n}{q_n} - x_0\right| &= \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{\delta}{\varepsilon}\right| \\ &= \frac{|p_n\varepsilon - \delta q_n|}{q_n\varepsilon} \end{aligned}$$

Or

$$p_n\varepsilon-\delta q_n=p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-1)^{n-1},$$

ainsi :

$$\left|\frac{p_n}{q_n}-x_0\right|=\frac{1}{q_n\varepsilon}<\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{q_n^2}.\qquad\square$$

Remarque 4.30 *Il existe une infinité de n tels que p_n et q_n sont de parités différentes.*

Proposition 4.31 *Si x_0 est un irrationnel alors*

$$\alpha(R,x_0)\leq\frac{3}{4}.$$

En particulier, la fonction R n'est pas dérivable en x_0.

Preuve : On fixe un irrationnel x_0 et on note $(p_n)_n$ et $(q_n)_n$ des suites d'entiers dont l'existence est garantie par la proposition précédente, qui vérifient $q_n\to+\infty$ lorsque $x\to\infty$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

(a) $q_n>0$,

(b) $\left|x_0-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$,

(c) p_n, q_n, p_{n+1}, q_{n+1} ne sont pas tous impairs.

Par la remarque 4.30, quitte à extraire des sous suites $(p_{\phi(n)})_n$ et $(q_{\phi(n)})_n$, on peut supposer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, p_n et q_n sont de parités différentes.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Par le théorème de Bézout, comme p_n et q_n sont premiers entre eux, il existe des entiers r_n et s_n tels que : $r_np_n+s_nq_n=-1\quad(*)$.

Quitte à remplacer r_n et s_n par $r_n'=r_n+q_n$ et $s_n'=s_n-p_n$, on peut supposer que r_n et s_n sont de parités différentes. En réduisant l'égalité $(*)$ modulo 2, on voit que r_n et s_n sont respectivement de mêmes parités que p_n et q_n.

Ainsi l'homographie γ_n définie par :

$$\forall z\in H,\quad \gamma_n(z)=\frac{r_nz+s_n}{q_nz-p_n},$$

appartient au groupe θ-modulaire.

On note maintenant :

$$z_n=b_n+ia_n:=\frac{p_n}{q_n}+i\left|x_0-\frac{p_n}{q_n}\right|.$$

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $z_n\in H$ et : $z_n\longrightarrow x_0$ lorsque $n\to+\infty$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, τ_n de sorte que :

$$a_n = \left| x_0 - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n^{\tau_n}}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| x_0 - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2},$$

on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \tau_n > 2$.

Maintenant, par le calcul fait dans la preuve de la proposition 4.28 :

$$\begin{aligned}
|W_R(a_n, b_n)| &= \frac{\pi a_n}{2} \left| \theta\left(\frac{r_n}{q_n} + \frac{i}{q_n^2 a_n} \right) e^{im_n\pi/4} (iq_n a_n)^{-1/2} - 1 \right| \\
&= \frac{\pi q_n^{-\tau_n}}{2} \left| \theta\left(\frac{r_n}{q_n} + iq_n^{\tau_n - 2} \right) e^{im_n\pi/4} (i)^{-1/2} q_n^{\frac{\tau_n - 1}{2}} - 1 \right| \qquad \text{car } a_n = q_n^{-\tau_n} \\
&= q_n^{-\frac{1+\tau_n}{2}} \frac{\pi}{2} \left| \theta\left(\frac{r_n}{q_n} + iq_n^{\tau_n - 2} \right) e^{im_n\pi/4} (i)^{-1/2} - q_n^{\frac{1-\tau_n}{2}} \right|.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\left| \theta\left(\frac{r_n}{q_n} + iq_n^{\tau_n - 2} \right) e^{im_n\pi/4} (i)^{-1/2} - q_n^{\frac{1-\tau_n}{2}} \right| &\geq \left| \theta\left(\frac{r_n}{q_n} + iq_n^{\tau_n - 2} \right) e^{im_n\pi/4} (i)^{-1/2} \right| - \left| q_n^{\frac{1-\tau_n}{2}} \right| \\
&\geq 1 - \left| \theta\left(\frac{r_n}{q_n} + iq_n^{\tau_n - 2} \right) - 1 \right| - |q_n|^{-1/2} \quad \text{car } \tau_n > 2
\end{aligned}$$

et :

$$\left| \theta\left(\frac{r_n}{q_n} + iq_n^{\tau_n - 2} \right) e^{im_n\pi/4} (i)^{-1/2} - q_n^{\frac{1-\tau_n}{2}} \right| \leq 1 + \left| \theta\left(\frac{r_n}{q_n} + iq_n^{\tau_n - 2} \right) - 1 \right| + |q_n|^{-1/2} \quad \text{car } \tau_n > 2.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad q_n^{\tau_n - 2} \geq 1$ car $\tau_n > 2$ et $q_n \geq 1$.

Par l'estimation de la preuve de la proposition 4.27 :

$$y \geq 1 \implies |\theta(x + iy) - 1| \leq 2\frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = 2\frac{1}{e^{\pi} - 1} \leq \frac{2}{2^3 - 1} \leq \frac{1}{2}.$$

Comme $|q_n| \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \to +\infty$,

$$|q_n|^{-1/2} \leq \frac{1}{4}$$

à partir d'un certain rang.

Ainsi, à partir d'un certain rang :

$$\frac{1}{4} \leq \left| \theta\left(\frac{r_n}{q_n} + i q_n^{\tau_n - 2}\right) e^{i m_n \pi/4} (i)^{-1/2} - q_n^{\frac{1-\tau_n}{2}} \right| \leq \frac{7}{4}.$$

Notons :

$$U_n = \left| \theta\left(\frac{r_n}{q_n} + i q_n^{\tau_n - 2}\right) e^{i m_n \pi/4} (i)^{-1/2} - q_n^{\frac{1-\tau_n}{2}} \right|.$$

Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n - x_0| = a_n$ donc :

$$\log(a_n + |b_n - x_0|) = \log(2 q_n^{-\tau_n}).$$

Maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{\log|W_R(a_n,b_n)|}{\log(a_n + |b_n - x_0|)} &= \frac{1}{\log(2q_n^{-\tau_n})}\left[-\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_n}{2}\right)\log(q_n) + \log\left(\frac{\pi}{2}U_n\right)\right] \\ &= \frac{-\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_n}{2}\right)\log(q_n)}{\log(2) - \tau_n \log(q_n)} + \frac{\log(\frac{\pi}{2}) + \log U_n}{\log(2) - \tau_n \log(q_n)}. \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{\log(\frac{\pi}{2}) + \log U_n}{\log(2) - \tau_n \log(q_n)} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

car $(\log U_n)_{n \geq 0}$ est une suite bornée. D'autre part :

$$\frac{-\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_n}{2}\right)\log(q_n)}{\log(2) - \tau_n \log(q_n)} \sim \frac{1}{\tau_n}\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_n}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\tau_n} \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

car $q_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Ainsi :

$$\liminf_{a \searrow 0, b \to x_0} \frac{\log|W_R(a,b)|}{\log(a + |b - x_0|)} \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{\log|W_R(a_n,b_n)|}{\log(a_n + |b_n - x_0|)} \leq \frac{3}{4}$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\tau_n} < \frac{3}{4}.$$

Par le théorème 4.21, on a finalement :

$$\frac{1}{2} \leq \alpha(R, x_0) \leq \frac{3}{4}. \qquad \square$$

5 Appendice

Lemme 5.1 *(Formule sommatoire de Poisson)* *Soit f dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On définit sa transformée de Fourier par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} f(t)dt$$

On a alors :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

Preuve du lemme : Notons $g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)$.

La fonction g est bien définie, 1-périodique et $\mathscr{C}^\infty$ car pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $M > 0$ tel que : $|(2+t^2)f^{(k)}(t)| < M$ ainsi :

$$\forall t \in [-1,1], \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f^{(k)}(t+n)| \quad \leq \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{M}{2+(t+n)^2} \quad \leq \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{M}{1+(n-1)^2}$$

Car : $\forall t \in [-1,1], \quad 2+(t+n)^2 = n^2+2tn+t^2+2 \geq n^2-2n+1+1 = (n-1)^2+1.$

La fonction g est donc somme de sa série de Fourier et si on note $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier, on a :

$$\begin{aligned}
c_n &= \int_0^1 g(t)e^{-2i\pi nt}dt \\
&= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)e^{-2i\pi nt}dt \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+p)e^{-2i\pi nt}dt \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_p^{p+1} f(t)e^{-2i\pi nt}dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi nt}dt \qquad \text{par théorème de Fubini comme } f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \\
&= \hat{f}(n)
\end{aligned}$$

L'inversion série-intégrale de la troisième ligne est rendue possible par la vérification de la régularité de g vue ci-dessus (cas $k = 0$).

Maintenant, g étant somme de sa série de Fourier :

$$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nt}.$$

Ainsi :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) = g(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n). \qquad \square$$

Proposition 5.2 *Soit g une fonction holomorphe sur H, continue sur et bornée $\overline{H}$.*
Alors on a pour $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ alors :

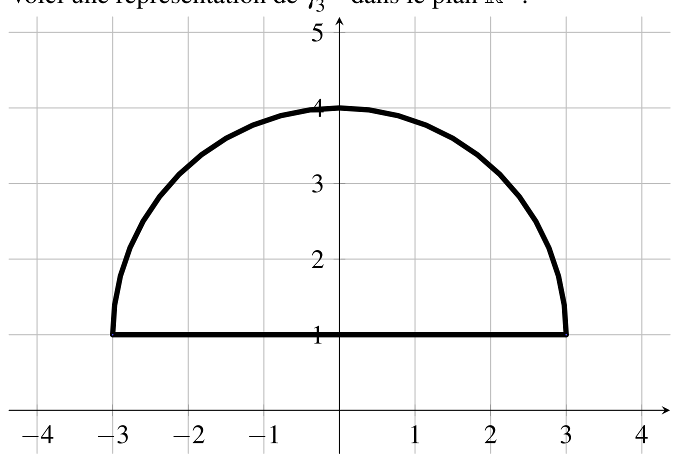
$$g'(b+ia) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x-(b+ia))^2}dx$$

et

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x+(b+ia))^2}dx = 0.$$

Preuve : Ceci découle de la formule intégrale de Cauchy. En effet, notons γ_r le demi-cercle du demi-plan supérieur de diamètre le segment $[-r, r]$ avec $r > |b+ia|$, et notons pour tout $\varepsilon > 0$, $\gamma_r^{(\varepsilon)} = \gamma_r + i\varepsilon$.

Voici une représentation de $\gamma_3^{(1)}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$:



Comme g est holomorphe sur H, par la formule intégrale de Cauchy que pour tout $a > \varepsilon > 0$ et $r > a$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r^{(\varepsilon)}}\frac{g(z)}{(z-(b+ia))^2}dz = g'(b+ia).$$

Soit $r > a$, fixé. On note :

$$I_\varepsilon = \int_{\gamma_r^{(\varepsilon)}}\frac{g(z)}{(z-(b+ia))^2}dz \qquad \text{et} \quad I = \int_{\gamma_r}\frac{g(z)}{(z-(b+ia))^2}dz.$$

On va montrer que $I_\varepsilon \to I$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$.

$$\begin{aligned} I_\varepsilon - I = &\int_{-r}^{r}\left(\frac{g(x+i\varepsilon)}{(x+i\varepsilon-(b+ia))^2}-\frac{g(x)}{(x-(b+ia))^2}\right)dx \\ &+\int_0^\pi\left(\frac{g(i\varepsilon+re^{i\theta})}{(i\varepsilon+re^{i\theta}-(b+ia))^2}-\frac{g(re^{i\theta})}{(re^{i\theta}-(b+ia))^2}\right)ire^{i\theta}d\theta \end{aligned}$$

Or pour tout $0 < \varepsilon < a/2$ et $r > a/2+|b+ia|+1$:

$$\begin{aligned} \forall x \in [-r,r], \qquad \left|\frac{g(x+i\varepsilon)}{(x+i\varepsilon-(b+ia))^2}-\frac{g(x)}{(x-(b+ia))^2}\right| &\leq \left|\frac{g(x+i\varepsilon)}{(x+i\varepsilon-(b+ia))^2}\right|+\left|\frac{g(x)}{(x-(b+ia))^2}\right| \\ &\leq \frac{\|g\|_\infty}{(a/2)^2}+\frac{\|g\|_\infty}{a^2} \quad \in \mathscr{L}^1([-r,r]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [0,\pi], \qquad |ire^{i\theta}|.\left|\frac{g(i\varepsilon+re^{i\theta})}{(i\varepsilon+re^{i\theta}-(b+ia))^2}-\frac{g(re^{i\theta})}{(re^{i\theta}-(b+ia))^2}\right| &\leq \frac{r\|g\|_\infty}{(r-\frac{a}{2}-|b+ia|)^2}+\frac{r\|g\|_\infty}{(r-|b+ia|)^2} \\ &\leq 2r\|g\|_\infty \quad \in \mathscr{L}^1([0,\pi]) \end{aligned}$$

De plus par continuité de g sur $\overline{H}$, on a :

$$\forall x \in [-r,r], \qquad \left|\frac{g(x+i\varepsilon)}{(x+i\varepsilon-(b+ia))^2}-\frac{g(x)}{(x-(b+ia))^2}\right| \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } \varepsilon \searrow 0$$

et

$$\forall \theta \in [0,\pi], \qquad \left|\frac{g(i\varepsilon+re^{i\theta})}{(i\varepsilon+re^{i\theta}-(b+ia))^2}-\frac{g(re^{i\theta}}{(re^{i\theta}-(b+ia))^2}\right| \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } \varepsilon \searrow 0.$$

.

Ainsi, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$I_\varepsilon \longrightarrow I \qquad \text{lorsque } \varepsilon \searrow 0.$$

On a donc établi la formule :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{g(z)}{(z-(b+ia))^2}dz = g'(b+ia)$$

pour tout $r > a/2 + |b+ia| + 1$.

Or

$$\int_{\gamma_r} \frac{g(z)}{(z-(b+ia))^2} dz = \int_{-r}^{r} \frac{g(x)}{(x-(b+ia))^2} dx + \int_0^\pi \frac{g(re^{i\theta})}{(re^{i\theta}-(b+ia))^2} ire^{i\theta} d\theta$$

Si $r > a/2 + 2|b+ia| + 1$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{g(re^{i\theta})}{(re^{i\theta}-(b+ia))^2} ire^{i\theta} \right| &\leq \frac{r\|g\|_\infty}{(r-|b+ia|)^2} \\ &= \frac{\|g\|_\infty}{(1-\frac{|b+ia|}{r})(r-|b+ia|)} \\ &\leq 2\|g\|_\infty \quad \in \mathscr{L}^1([0,\pi]) \end{aligned}$$

De plus :

$$\forall \theta \in [0,\pi], \left| \frac{g(re^{i\theta})}{(re^{i\theta}-(b+ia))^2} ire^{i\theta} \right| \leq \frac{r\|g\|_\infty}{(r-|b+ia|)^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } r \to +\infty.$$

Par théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\int_0^\pi \frac{g(re^{i\theta})}{(re^{i\theta}-(b+ia))^2} ire^{i\theta} d\theta \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } r \to +\infty.$$

Finalement :

$$\int_{-r}^{r} \frac{g(x)}{(x-(b+ia))^2} dx \longrightarrow 2i\pi g'(b+ia) \qquad \text{lorsque } r \to +\infty.$$

On a de même, comme $-(b+ia)$ est d'indice 0 pour tous les lacets $\gamma_r^{(\varepsilon)}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{(x+(b+ia))^2} dx = 0 \qquad \square$$

Références

[Katz] *An introduction to harmonic analysis, Third Corrected Edition*, Yitzhak Katznelson, Cambridge Mathematical Library

[Zyg] *Trigonometric Series, Third Edition,* A. Zygmund, Cambridge Mathematical Library

[CQ] *Analyse mathématique, grands théorémes du vingtième siècle,* Denis Choimet, Hervé Queffélec, Calvage et Mounet

[ZQ] *Analyse pour l'agrégation, 4e édition*, Claude Zuily, Hervé Queffélec, Dunod

[Jaf] *Wavelets, Tools for science and technology,* Stéfane Jaffard, Yves Meyer, Robert D. Ryan, Society for Industrial and Applied Mathematics

[Dui] *Selfsimilarity of "Riemann's Nondifferentiable Function"*, J.J. Duistermaat