



TRAVAIL D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Année 2021-2022

---

CLASSIFICATION DES SURFACES  
COMPACTES

---

Cédric BERTRAND

Encadré par Erwan LANNEAU

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires de Topologie</b>	<b>1</b>
1.1	Rappels sur les homéomorphismes . . . . .	1
1.2	Espaces quotients . . . . .	4
1.3	Le carré et le disque . . . . .	7
1.4	Recollement de deux disques par rapport à un segment . . . . .	9
1.5	$n$ -gones et mots . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Surfaces et Orientation</b>	<b>19</b>
2.1	Définition et surfaces définies par un mot . . . . .	19
2.2	La sphère, le tore et le plan réel projectif . . . . .	23
2.3	Orientation . . . . .	25
2.4	Sommes connexes de surfaces compactes . . . . .	27
2.5	Triangulation des surfaces compactes . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Classification des surfaces compactes</b>	<b>30</b>
3.1	Étape 1 : Associer un mot à la surface . . . . .	30
3.2	Étape 2 : Éliminer les côtés adjacents de première espèce . . . . .	32
3.3	Étape 3 : Une seule classe d'équivalence pour les sommets . . . . .	32
3.4	Étape 4 : Rendre les paires d'arrêtes de seconde espèce adjacentes . . . . .	33
3.5	Étape 5 : Rendre adjacentes les arrêtes de première espèce qui se séparent . . . . .	35
3.6	Caractéristique d'Euler d'une surface compacte . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Annexe</b>	<b>39</b>
4.1	Théorème de Jordan et oreilles de polygones . . . . .	39
4.2	Orientation . . . . .	43

## Notations

- $\mathbb{S}^n$  pour la sphère de  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni de la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  (norme 2).
- $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$  et  $\mathbb{D} = \mathbb{D}^2$
- $\text{Int}(A)$  ou  $\overset{\circ}{A}$  pour l'intérieur de  $A$
- Si la topologie d'un sous-ensemble d'un espace topologique n'est pas précisée, il sera muni de la topologie induite par défaut.

## 1 Préliminaires de Topologie

Cette partie a pour but de se familiariser avec la notion d'homéomorphisme et de "recollement" de deux ensembles par une relation d'équivalence.

### 1.1 Rappels sur les homéomorphismes

On voit ici la notion d'homéomorphisme ainsi que quelques propriétés et exemples. Deux espaces homéomorphes sont des espaces qui possèdent un certain nombre de propriétés communes. Dans  $\mathbb{R}^3$  par exemple, on peut visualiser un ensemble comme de la pâte à modeler. Dès lors, les ensembles qui sont homéomorphes à un ensemble  $X$  sont ceux qui, à partir de leur pâte à modeler,

se ramènent par déformation à  $X$  selon certaines règles : lors du processus de déformation, on ne peut ni trouer, ni déchirer ou couper la pâte à modeler, seulement l'étendre ou l'écraser dans certaines directions. Une analogie peut également être faite dans  $\mathbb{R}^2$  où cette fois notre pâte à modeler se trouve dans un plan et les opérations ne nous en faisant pas sortir. On remarquera au cours de la section qu'il n'est pas toujours aisé de montrer que deux ensembles topologiques sont homéomorphes.

Commençons par rappeler quelques définitions et propriétés.

**Proposition 1.1.1** (Principe de recollement). *Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques et  $A_1, \dots, A_n$  un recouvrement fini de  $X$  où chaque  $A_i$  est fermé. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $f_k$  la restriction de  $f$  à  $A_k$ . Alors, si tous les  $f_k$  sont continues,  $f$  est continue.*

**Définition 1.1.2.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application entre deux espaces topologiques. On dit que  $f$  est un *homéomorphisme* si  $f$  est une bijection bicontinue, c'est à dire une bijection continue donc l'inverse est continue. Dès lors,  $X$  et  $Y$  sont dits *homéomorphes* et on notera  $X \cong Y$ .

D'autre part, sauf contre-indication, lorsque l'on dira qu'un ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , est homéomorphe à un espace topologique, on sous-entendra que cet ensemble est muni d'une norme quelconque. Les normes étant équivalentes dans  $\mathbb{R}^n$ , l'application identité  $Id : (\mathbb{R}^n, N) \rightarrow (\mathbb{R}^n, N')$ , où  $N$  et  $N'$  sont deux normes sur  $\mathbb{R}^n$ , est continue et donc le choix d'une norme plutôt qu'une autre ne change pas le caractère homéomorphe.

**Remarque 1.1.3.** La relation "être homéomorphe" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des espaces topologiques.

**Exemple 1.1.4.** Si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , alors  $\mathbb{R}^n - \{x\} \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}_+^* \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ .

**Exemple 1.1.5.** 1. Dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , les translations, symétries et automorphismes en particulier les rotations (groupe orthogonal) sont des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  sur lui même.

2. Dans  $\mathbb{R}$ , les segments du même type i.e. avec le même nombre d'extrémité ouverte et fermée sont homéomorphes. Par exemple,  $[-2, 3[$  est homéomorphe à  $[0, 1[$  mais pas à  $[0, 1]$ .

**Proposition 1.1.6.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue. Alors,*

1. *Si  $X$  est connexe par arc,  $f(X)$  est connexe par arc.*
2. *Si  $X$  est connexe,  $f(X)$  est connexe.*
3. *Si  $Y$  est séparé et  $X$  compact, alors  $f(X)$  est compact.*

En particulier, si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces topologiques homéomorphes, les propriétés de connexité, connexité par arc et compacité coïncident.

**Définition 1.1.7.** Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux espaces topologiques est dite *ouverte* (resp. *fermée*) si l'image par  $f$  de tout ouvert (resp. fermé) de  $X$  est un ouvert (resp. fermé) de  $Y$ .

**Proposition 1.1.8.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application bijective continue entre deux espaces topologiques. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1.  $f$  est ouverte
2.  $f$  est fermée
3.  $f$  est un homéomorphisme

Ainsi, si  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme, il envoie l'intérieur de  $X$  sur l'intérieur de  $Y$  et le bord i.e. la frontière de  $X$  sur le bord de  $Y$ . De plus, si l'un des espaces est séparé, l'autre aussi.

**Exemple 1.1.9.** Cas de la projection stéréographique dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ .

Commençons par le cas  $n = 2$ . Soit  $\mathbb{S}^1$  la sphère de  $\mathbb{R}^2$ . On va construire un homéomorphisme entre  $\mathbb{S}^1 - \{N\}$  où  $N$  est le pôle Nord  $N = (0, 1)$  et  $\mathcal{P} \cong \mathbb{R}$  où  $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ . À tout point  $M$  de  $\mathbb{S}^1 - \{N\}$  on associe  $f(M)$  l'intersection de  $\mathcal{P}$  et de la droite passant par  $M$  et  $N$ . Calculons les coordonnées de ce point. Si  $M = (x, y)$ , on cherche  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$f(M) = N + t(M - N) \in \mathcal{P}$$

Un calcul simple donne  $t = \frac{1}{1-y}$  (où  $y \neq 1$  car  $M \in \mathbb{S}^1 - \{N\}$ ) et donc  $f$  est continue. Pour calculer sa réciproque, on fait de même en associant à tout point  $P$  de  $\mathcal{P}$  l'intersection  $g(P)$  de  $\mathbb{S}^1 - \{N\}$  et de la droite passant par  $P$  et  $N$ . Si  $P = (x, 0)$ , on cherche  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$g(P) = N + t(P - N) \in \mathbb{S}^1 - \{N\}$$

Comme  $t \neq 0$ , on trouve  $t = \frac{2}{x^2+1}$  et  $g$  est continue. On vérifie enfin que  $f \circ g = Id$  et  $g \circ f = Id$ . Ainsi

$$\mathbb{S}^1 - \{N\} \cong \mathbb{R}$$

et ceci reste vrai, par rotation, en remplaçant  $N$  par un point quelconque de  $\mathbb{S}^1$ . L'application  $f$  est appelée *projection stéréographique*. Une généralisation immédiate pour  $\mathbb{R}^n$  en découle.

$$\forall x \in \mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{S}^{n-1} - \{x\} \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

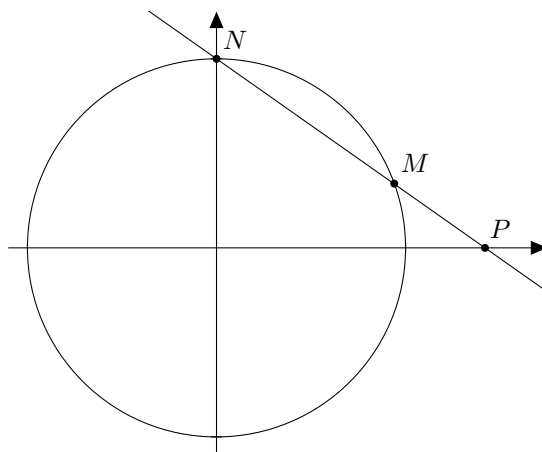


FIGURE 1 – Projection stéréographique dans  $\mathbb{R}^2$

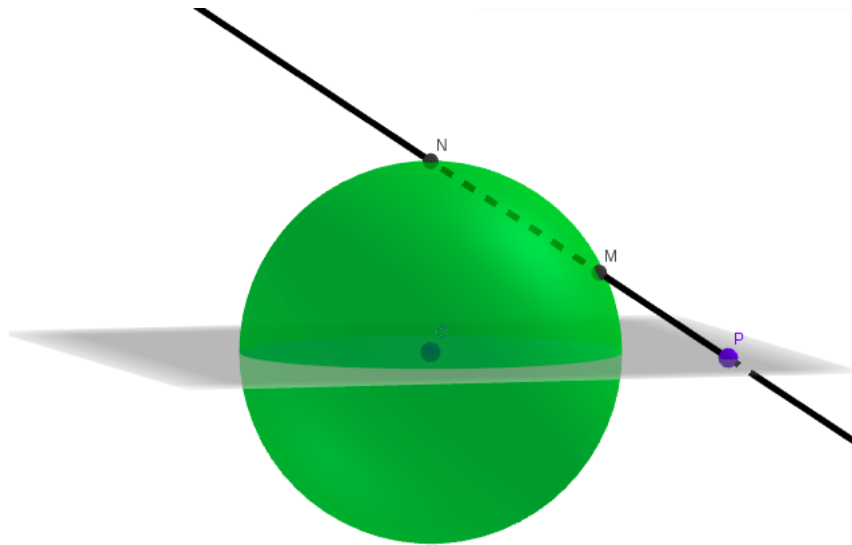


FIGURE 2 – Projection stéréographique dans  $\mathbb{R}^3$

La projection stéréographique de  $\mathbb{R}^3$  montre par la même occasion qu'une "demi-sphère" du type  $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^3 \mid z < r\}$  (resp  $z \leq r$ ) où  $r \in ]-1, 1[$  est homéomorphe à un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$  donc à  $Int(\mathbb{D})$  par similitude (resp. fermé donc à  $\mathbb{D}$ ).

## 1.2 Espaces quotients

Soit  $X$  un espace topologique. On peut vouloir identifier selon une application  $f$  certains points de  $X$ . L'espace obtenu sous cette identification s'appelle alors l'espace quotient. Cette sous-section discute principalement des topologies que l'on peut mettre sur cet espace. Pour ce qui est des preuves, on pourra notamment se référer au cours de topologie de  $L3$ .

**Définition 1.2.1.** Soit  $X$  un espace topologique,  $Y$  un ensemble et  $f : X \rightarrow Y$  une application surjective. La *topologie quotient déterminée par  $f$*  est la topologie sur  $Y$  définie comme suit :  $U \subset Y$  est un ouvert de  $Y$  si et seulement si  $f^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X$ .

- Remarque 1.2.2.**
1. La topologie quotient déterminée par  $f$  est la topologie la moins fine (la plus grande au sens de l'inclusion) qui rend  $f$  continue.
  2. Si  $Y$  est muni de la topologie quotient déterminée par  $f$  alors un ensemble  $F \subset Y$  est fermé dans  $Y$  si et seulement si  $f^{-1}(F)$  est fermé dans  $X$ .
  3. Si de plus  $f$  est injective (donc  $f$  bijective) alors  $f^{-1}(f(O)) = O$  et  $f$  est ouverte.

**Proposition 1.2.3** ( Cas pour une relation d'équivalence ). Soit  $X$  un espace topologique et  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $X$ . On note  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  la "projection" surjective associée à  $\sim$  qui envoie  $x \in X$  sur sa classe d'équivalence et on muni  $X/\sim$  de la topologie quotient déterminée par  $\pi$ .

Alors cette topologie est l'unique topologie qui rend l'application  $\pi$  continue et qui vérifie :

Pour tout espace topologique  $Y$  et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue qui se factorise sous la forme  $f = \bar{f} \circ \pi$ ,  $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$  est continue.

En particulier, on retiendra le corollaire ci-dessous très utile en pratique qui fait écho au corollaire 1.2.14. De plus, on remarque que  $f$  est surjective si et seulement si  $\bar{f}$  l'est.

**Corollaire 1.2.4.** *La topologie quotient pour une relation d'équivalence (définie au sens précédent) rend la factorisation  $\bar{f}$  de toute application continue  $f$  constante sur les classes d'équivalence continue.*

**Exemple 1.2.5** (Cercle  $\mathbb{S}^1$ ). Soit  $\sim$  la relation d'équivalence sur  $[0, 1]$  qui identifie 0 avec 1. Autrement dit, si  $x \in ]0, 1[$ , la classe d'équivalence de  $x$  est  $\{x\}$  et si  $x \in \{0, 1\}$  alors sa classe d'équivalence est  $\{0, 1\}$ . Considérons  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  telle que

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Alors  $f$  est continue surjective constante sur les classes d'équivalence de  $\sim$ . Par passage au quotient, on obtient une application  $\bar{f} : [0, 1]/\sim \rightarrow \mathbb{S}^1$  qui est bijective continue. Comme  $\mathbb{S}^1$  est séparé et  $\bar{f}$  continue, l'ensemble quotient  $[0, 1]/\sim$  est séparé. On en déduit donc, par la compacité de  $[0, 1]$  et le fait que la projection associée à  $\sim$  est continue, que l'ensemble quotient est compact. Ainsi,  $\bar{f}$  est fermée. Il s'en suit que c'est un homéomorphisme et que  $[0, 1]/\sim \cong \mathbb{S}^1$ .

On vient de montrer que "recoller" les extrémités d'un segment donne un cercle. Il est alors assez naturel de se demander ce qu'on obtient en "recollant" le bord d'un espace topologique. A priori, cela dépend du recollement i.e. de la relation d'équivalence mais aussi de l'espace considéré. Il n'est pas toujours aisé de répondre à cette question. Regardons un cas simple.

**Exemple 1.2.6** (Tore  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ). Soit  $C = [0, 1] \times [0, 1]$  un carré dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f : C \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  telle que

$$f(t, s) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), \cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$$

où l'espace  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  est vu comme un ensemble de  $\mathbb{R}^4$ . On considère la relation d'équivalence  $\sim$  sur  $C$  qui recolle les côtés opposés du carré comme suit : si  $t \in [0, 1]$  alors  $(0, t) \sim (1, t)$  et  $(t, 0) \sim (t, 1)$ ; les classes des points  $z$  à l'intérieur de  $C$  (qui ne sont pas sur le bord) sont  $\{z\}$ .

Dès lors,  $f$  est continue, surjective et constante sur les classes d'équivalence et on obtient par passage au quotient une application  $\bar{f} : ([0, 1] \times [0, 1])/\sim \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  bijective continue. Comme précédemment, on montre que  $\bar{f}$  est fermée donc que c'est un homéomorphisme d'où  $([0, 1] \times [0, 1])/\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

**Remarque 1.2.7.** Par la suite, les points  $z$  qui ne sont pas concernés par un recollement auront implicitement une classe d'équivalence égale à  $\{z\}$  pour une relation  $\sim$  donnée.

**Remarque 1.2.8.** La façon de recoller est aussi très importante. Soit  $\approx$  la relation d'équivalence sur  $C$  qui recolle les côtés deux à deux opposés de la façon suivante : si  $t \in [0, 1]$ , alors  $(0, t) \approx (1, 1 - t)$ ,  $(t, 0) \approx (1 - t, 1)$ . Nous verrons par la suite que  $C/\approx$  n'est pas homéomorphe à  $C/\sim$ .

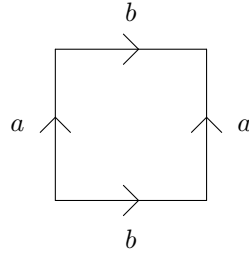


FIGURE 3 – Carré  $C$  dont les côtés sont identifiés par  $\sim$

Si  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue surjective, il n'est a priori pas vrai que  $Y$  est muni de la topologie quotient déterminée par  $f$ . Cependant, ceci est vrai dans certains cas.

**Proposition 1.2.9.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques et  $f : X \rightarrow Y$  une application continue surjective. Si  $f$  est ouverte ou fermée, alors  $Y$  est muni de la topologie quotient déterminée par  $f$ .*

Une autre question naturelle est de savoir si recoller les côtés opposés chacun leur tour et non pas en même temps change le résultat final. Nous verrons que ce n'est pas le cas.

Ci-dessous la généralisation de la notion de topologie quotient à plusieurs espaces.

**Définition 1.2.10.** Soit  $Y$  un ensemble,  $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  une famille d'espaces topologiques et  $F = \{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y, \lambda \in \Lambda\}$  une famille d'applications. La *topologie quotient associée à la famille  $F$*  sur  $Y$  est la topologie définie comme suit :  $U \subset Y$  est un ouvert de  $Y$  si et seulement si pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $f_\lambda^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X_\lambda$ . C'est la topologie la moins fine qui rend les  $f_\lambda$  continues.

**Définition 1.2.11.** Soit  $X$  un ensemble,  $\{Y_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  une famille d'espaces topologiques et  $F = \{f_\lambda : X \rightarrow Y_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  une famille d'applications. La *topologie quotient associée à la famille  $F$*  est la topologie la plus fine (la plus petite au sens de l'inclusion) qui rend tous les  $f_\lambda$  continues. C'est la topologie engendrée par les ensembles de la forme  $f_\lambda^{-1}(U_\lambda)$  où  $U_\lambda$  est un ouvert de  $Y_\lambda$ .

**Remarque 1.2.12.** 1. Si  $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  et  $f_\lambda$  est la projection sur l'espace  $Y_\lambda$ , on retrouve la définition d'espace produit.  
2. Si  $\Lambda$  n'a qu'un seul élément et que  $f \in F$  est l'inclusion, on retrouve la topologie induite.

On va voir par la suite que la notion de continuité est corrélée au fait de former des sous-ensembles et à la topologie quotient.

**Lemme 1.2.13.** *Soit  $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  une famille d'espaces topologiques et  $F = \{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y\}$  une famille d'applications. Supposons que  $Y$  est un ensemble muni de la topologie quotient (associée à la famille  $F$ ). Alors, une application  $g : Y \rightarrow Z$  de  $Y$  dans un espace topologique  $Z$  est continue si et seulement si pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $g \circ f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Z$  est continue.*

**Corollaire 1.2.14.** Soit  $X$  un espace topologique et  $Y$  un ensemble muni de la topologie quotient déterminée par une application surjective  $f : X \rightarrow Y$ . Alors une application  $g : Y \rightarrow Z$  où  $Z$  est un espace topologique est continue si et seulement si  $g \circ f : X \rightarrow Z$  est continue.

**Lemme 1.2.15.** Soit  $Z$  un espace topologique,  $\{Y_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  une famille d'espaces topologiques et  $\{f_\lambda : Y_\lambda \rightarrow Z\}$  une famille d'applications continues. Pour chaque  $\lambda \in \Lambda$ , soit une famille  $\{X_{\lambda,\mu}, \mu \in M_\lambda\}$  d'espaces topologiques et d'applications continues  $\{f_{\lambda,\mu} : X_{\lambda,\mu} \rightarrow Y_\lambda\}$ .

Supposons que chaque ensemble  $Y_\lambda$  est muni de la topologie la moins fine qui rend toutes les applications  $f_{\lambda,\mu}, \mu \in M_\lambda$  continues et que  $Z$  est muni de la topologie la moins fine qui rend toutes les applications  $f_\lambda$  continues.

Alors, la topologie de  $Z$  est la topologie la moins fine qui rend les applications  $f_\lambda \circ f_{\lambda,\mu} : X_{\lambda,\mu} \rightarrow Z$  continues.

**Corollaire 1.2.16.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux applications surjectives. Supposons que  $Y$  soit muni de la topologie quotient déterminée par  $f$  et  $Z$  la topologie quotient déterminée par  $g$ . Alors, la topologie sur  $Z$  est la topologie quotient déterminée par  $g \circ f$ .

**Remarque 1.2.17** (Indépendance des étapes de recollements). Ce corollaire est important : si  $Z$  est l'espace obtenu en recollant certains points de  $X$  par une relation d'équivalence, alors il importe peu de les recoller tous en même temps ou en un nombre fini d'étapes. Il nous sera très utile par la suite.

### 1.3 Le carré et le disque

Cette partie aborde les homéomorphismes de certains ouverts connexes et des ouverts convexes afin de familiariser le lecteur avec la notion d'homéomorphisme.

Intuitivement, un carré est homéomorphe à un disque, par exemple avec la vision de la pâte à modeler. Il se trouve que cela est vrai et que le résultat se généralise en dimension supérieure.

**Proposition 1.3.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $C = [0, 1]^n$  un "carré" de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{D}^n$  le disque unité euclidien  $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 \leq 1\}$ . Alors  $C$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}^n$ .

*Démonstration.* Munissons  $C$  de la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\mathbb{D}$  de la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  et soit  $f : C \rightarrow \mathbb{D}^n$  une application définie par

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|_\infty \frac{x}{\|x\|_2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$f$  est bien définie et continue en tout  $x \neq 0$ . L'équivalence des normes sur  $\mathbb{R}^n$  assure l'existence de deux constantes strictement positives  $A$  et  $B$  telles que  $\|\cdot\|_2 A \leq \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 B$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, A \leq \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} \leq B$  ce qui implique la continuité de  $f$  en 0.

Soit  $g : \mathbb{D}^n \rightarrow C$  l'application définie par

$$g(x) = \begin{cases} \|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_\infty} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



De la même façon,  $g$  est bien définie et continue ; on vérifie que

$$f \circ g = Id, g \circ f = Id$$

ce qui montre que  $f$  est un homéomorphisme de réciproque  $g$ . □

Dans  $\mathbb{R}^2$ , il existe une autre preuve très formatrice que voici :

*Démonstration dans  $\mathbb{R}^2$ .* Ici,  $n = 2$  et  $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D}$ . Soit  $C' = [-2, 2]^2$  un carré homéomorphe à  $C$ . On munit nos ensembles de la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$ .

On définit une fonction  $f : \mathbb{D} \rightarrow \partial C'$  qui à  $x$  associe l'intersection  $f(x)$  de la demi-droite  $\mathbb{R}_+x$  et le bord du carré  $C'$  si  $x \neq 0$  et 1 sinon.

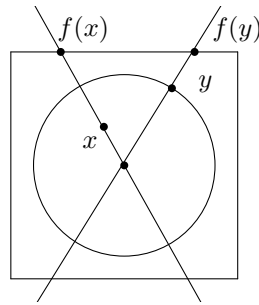


FIGURE 4 – Illustration des fonctions  $u$  et  $f$

La fonction  $f$  est clairement continue sur  $\mathbb{D} - \{0\}$ . Soit maintenant  $g : \mathbb{D} \rightarrow C'$  la fonction définie par  $g(x) = \|f(x)\|_2 x$ . Elle est continue en  $\mathbb{D} - \{0\}$  par composition et continue en zéro car  $f$  est bornée. Que fait la fonction  $g$  ?

Prenons un  $x \in \mathbb{D}$  non nul. Sur le segment  $\mathbb{R}_+x \cap \mathbb{D}$ ,  $f$  est constante. La fonction  $g$  dilate ce segment d'un facteur  $\lambda = \|f(x)\|_2 > 0$  pour le transformer en un segment dans  $C'$  donc les extrémités sont sur le bord de  $C'$ . Ainsi,  $g$  est bien à valeurs dans  $C'$ . Elle est surjective, d'après l'explication précédente. Si  $g(a) = g(b)$ ,  $a$  et  $b$  sont sur la demi-droite  $\mathbb{R}_+a$  et le rapport de dilatation  $\lambda > 0$  associé à  $a$  est le même que celui associé à  $b$ . Il s'en suit que  $a = b$ . Ainsi,  $g$  est injective ; c'est donc une bijection continue. Par compacité de  $\mathbb{D}$  et le fait que  $C'$  soit séparé,  $f$  est fermée ; c'est donc un homéomorphisme. □

**Remarque 1.3.2.**

- Le fait que le "rapport de dilatation" de  $g$  ne soit jamais nul nous assure l'injectivité.
- On montre de la même manière que le demi-disque est homéomorphe à un carré donc au disque.

Cette idée de "dilatation" dont le rapport dépend de la variable est très pratique dans  $\mathbb{R}^2$  et inspire pour trouver des homéomorphismes simples.

**Définition 1.3.3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $X, Y$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . On dit qu'une fonction  $f : X \rightarrow Y$  est une *pseudo-dilatation* si il existe une fonction  $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $f$  s'écrive sous la forme  $f(x) = \lambda(x)x$  pour tout  $x \in X$ .

**Exemple 1.3.4.** De la même manière que ce qui précède, en construisant une pseudo-dilatation, on montre qu'un demi-disque est homéomorphe au disque  $\mathbb{D}$ .

## 1.4 Recollement de deux disques par rapport à un segment

Dans cette section, on présente le résultat d'un théorème évident mais quelque peu compliqué à démontrer et une conséquence immédiate. On se donne deux demi-disques fermés disjoints  $D_1$  et  $D_2$  et un homéomorphisme  $h : A_1 \rightarrow A_2$  qui envoie le diamètre  $A_1$  de  $D_1$  sur le diamètre  $A_2$  de  $D_2$ . Alors recoller les deux demi-disques sur leur diamètre par  $h$  donne à homéomorphisme près un disque. Plus précisément, soit  $\sim_h$  la relation d'équivalence sur l'espace  $D_1 \sqcup D_2$  qui identifie tout point  $x$  de  $A_1$  avec  $h(x)$  : si  $x \notin A_1 \cup A_2$  alors sa classe d'équivalence est  $\{x\}$ , si  $x \in A_1$  alors sa classe est  $\{x, h(x)\}$  et si  $y = h(x) \in A_2$  alors sa classe d'équivalence est  $\{h^{-1}(y), y\} = \{x, h(x)\}$ . L'espace quotient  $D_1 \sqcup D_2 / \sim_h$  obtenu est alors homéomorphe à  $\mathbb{D}$ .

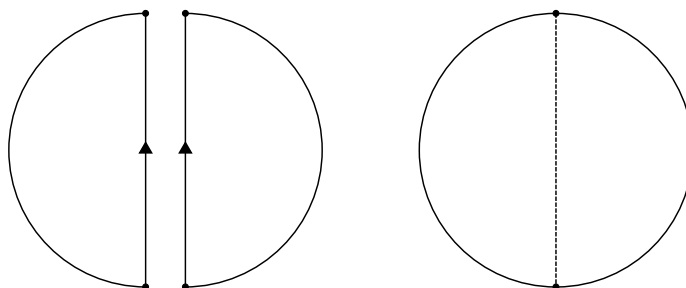


FIGURE 5 – Recollement de deux demi-disques le long de leur diamètre

**Théorème 1.4.1** (dit de recollement de deux disques sur un segment). *Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux ensembles disjoints homéomorphes à  $\mathbb{D}$ ,  $A_1 \subset \partial D_1$ ,  $\partial A_2 \subset D_2$  deux sous-ensembles homéomorphes au segment  $[0, 1]$  et  $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$  un homéomorphisme. Alors  $D_1 \sqcup D_2 / \sim_\varphi$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}$ .*

La méthode de la preuve consiste à se ramener par homéomorphisme à des ensembles  $D_1$  et  $D_2$  sur lesquels il sera facile de travailler, de montrer ensuite que selon un certain homéomorphisme  $\tau$ , leur espace quotient est homéomorphe à  $\mathbb{D}$  puis enfin de remarquer l'indépendance du choix de l'homéomorphisme.

**Théorème 1.4.2.** *Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux espaces topologiques homéomorphes par une application  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ . Soit  $A_1, B_1 \subset X_1$  et  $A_2, B_2 \subset X_2$  des sous-ensembles tels que  $\varphi(A_1) = A_2$  et  $\varphi(B_1) = B_2$ . Supposons qu'il existe un homéomorphisme  $h$  de  $A_1$  sur  $B_1$ .*

*Alors l'espace quotient obtenu en recollant  $A_1$  sur  $B_1$  par  $h$  dans  $X_1$  est homéomorphe à l'espace quotient obtenu en recollant  $A_2$  sur  $B_2$  par la composée  $\phi = \varphi h \varphi^{-1}$  (définie sur  $A_2$ ) i.e.*

$$X_1 / \sim_h \cong X_2 / \sim_\phi$$

*Démonstration.* Posons  $\Sigma_1$  l'espace quotient obtenu en recollant  $A_1$  sur  $B_1$  par  $h$  dans  $X_1$  et  $\Sigma_2$  l'espace quotient obtenu en recollant  $A_2 = \varphi(A_1)$  sur  $B_2 = \varphi(B_1)$  par  $\phi$  dans  $X_2 = \varphi(X_1)$ . Soit  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les projections associées respectivement à  $h$  et  $\phi$  et  $f : X_2 \rightarrow \Sigma_1$  l'application qui à  $y$  associe  $\pi_1(\varphi^{-1}(y))$ .  $f$  est bien définie et est constante sur les classes d'équivalence de  $\pi_2$ . En effet, c'est clair

lorsque  $y$  est le seul représentant et si  $y = \varphi(x) \in A_2$ ,

$$f(\phi(y)) = \pi_1(h(x)) = \pi_1(x) = f(y)$$

$f$  est continue par composition donc induit une application continue  $\bar{f}$  par passage au quotient qui est bijective d'inverse l'application qui envoie  $\pi_1(x)$  sur  $\pi_2(\varphi(x))$  (on vérifie qu'elle est bien définie comme précédemment). Ainsi,  $f$  est un homéomorphisme.  $\square$

**Proposition 1.4.3** (Recollement indépendant à homéomorphisme près des espaces). *Soit  $D_1$  et  $D_2$  deux espaces topologiques disjoints et  $A_1 \subset D_1$ ,  $A_2 \subset D_2$  deux sous-ensembles. Supposons qu'il existe un homéomorphisme  $h : D_1 \rightarrow h(D_1)$  où  $h(D_1)$  est disjoint de  $D_2$  et un homéomorphisme  $\psi : A_1 \rightarrow A_2$ . Alors l'espace quotient obtenu en recollant  $A_1$  sur  $A_2$  par  $\psi$  dans  $D_1 \sqcup D_2$  est homéomorphe à l'espace quotient obtenu en recollant  $h(A_1)$  sur  $A_2$  par  $\psi h^{-1}$  dans  $h(D_1) \sqcup D_2$  i.e.*

$$D_1 \sqcup D_2 / \sim_\psi \cong h(D_1) \sqcup D_2 / \sim_{\psi h^{-1}}$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du théorème qui précède avec  $X_1 = D_1 \sqcup D_2$ ,  $X_2 = h(D_1) \sqcup D_2$  et  $\varphi$  l'homéomorphisme défini par

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in D_2 \\ h(x) & \text{si } x \in D_1 \end{cases}$$

en remarquant que  $\phi = \varphi\psi\varphi^{-1}$  est égale à  $\psi h^{-1}$  sur  $h(A_1)$ .  $\square$

Pour la suite, on se donne deux carrés de  $\mathbb{R}^2$ ,  $C_1 = [0, 1]^2$  et  $C_2 = [2, 3] \times [0, 1]$  et  $\tau$  la translation de 1 vers la droite dans  $\mathbb{R}^2$  qui est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans lui même.

**Lemme 1.4.4.** *Soit  $A_1 = \{1\} \times [0, 1]$  le côté droit de  $C_1$  et  $A_2 = \{2\} \times [0, 1]$  le côté gauche de  $C_2$ . Alors l'espace quotient obtenu en recollant  $A_1$  sur  $A_2$  par  $\tau$  dans  $C_1 \sqcup C_2$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}$  i.e.*

$$C_1 \sqcup C_2 / \sim_{\tau|_{A_1}} \cong \mathbb{D}.$$

*Démonstration.* Soit  $f : C_1 \sqcup C_2 \rightarrow [1, 3] \times [0, 1]$  l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in C_2 \\ \tau(x) & \text{si } x \in C_1 \end{cases}$$

On vérifie que  $f$  est constante sur les classes d'équivalence et induit par passage au quotient un homéomorphisme. Le rectangle  $[1, 3] \times [0, 1]$  étant homéomorphe à  $\mathbb{D}$ , ceci permet de conclure.  $\square$

**Proposition 1.4.5** (Indépendance du recollement). *Avec les mêmes notations que dans le lemme précédent, si  $h : A_1 \rightarrow A_2$  est un homéomorphisme alors l'espace obtenu en recollant  $A_1$  sur  $A_2$  par  $h$  dans  $C_1 \sqcup C_2$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}$  i.e.*

$$C_1 \sqcup C_2 / \sim_h \cong \mathbb{D}.$$

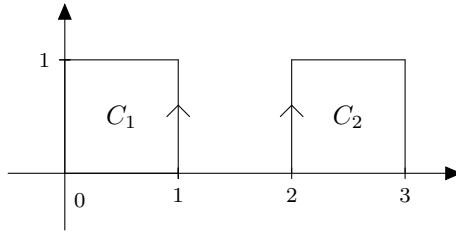


FIGURE 6 – L'espace quotient considéré

*Démonstration.* Par le lemme précédent, il suffit de montrer que les espaces  $\Sigma_1 = C_1 \sqcup C_2 / \sim_{\tau_{A_1}}$  et  $\Sigma_2 = C_1 \sqcup C_2 / \sim_h$  sont homéomorphes. Soit  $f : C_1 \sqcup C_2 \rightarrow \Sigma_2$  l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} \pi_h(\tau^{-1}(x)) & \text{si } x \in A_2 \\ \pi_h(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $\pi_h : C_1 \sqcup C_2 \rightarrow \Sigma_1$  est la projection associée à  $\sim_h$ . On vérifie aisément que  $f$  est surjective et constante sur les classes d'équivalence de  $\sim_{\tau_{A_1}}$ . On montre que  $f$  est continue. Pour se faire, on étudie la forme des ouverts de  $\Sigma_2$ .

Si  $B$  est une boule ouverte dans le carré  $C_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  qui n'intersecte pas les côtés  $A_1$  et  $A_2$  alors  $\pi_h(B)$  est un ouvert de  $\Sigma_2$  puisque  $\pi_h^{-1}(\pi_h(B)) = B$ . On dira que  $\pi_h(B)$  est un ouvert du *premier type*. On remarque que  $\pi_h$  restreinte à  $B$  est ouverte et réalise un homéomorphisme sur son image.

Si  $B_1$  est une boule ouverte dans le carré  $C_1$  et qu'elle intersecte  $A_1$ , on prend une boule  $B_2$  dans  $C_2$  qui intersecte  $A_2$  de telle sorte que  $h(B_1 \cap A_1) = B_2 \cap A_2$ . Dès lors,  $\pi_h(B_1 \sqcup B_2)$  est un ouvert de  $\Sigma_2$  puisque  $\pi_h^{-1}(\pi_h(B_1 \sqcup B_2)) = B_1 \sqcup B_2$  est un ouvert de  $C_1 \sqcup C_2$ . De même, si  $B_2$  est une boule dans  $C_2$  qui intersecte  $A_2$ , on prend une boule  $B_1$  de  $C_1$  qui intersecte  $A_1$  de telle sorte que  $h(B_1 \cap A_1) = B_2 \cap A_2$  pour obtenir un ouvert  $\pi_h(B_1 \sqcup B_2)$ . On dira que  $\pi_h(B_1 \sqcup B_2)$  est un ouvert de  $\Sigma_2$  du *second type*.

Il est alors clair que l'ensemble des ouverts de  $\Sigma_2$  du premier et second type forme une base de topologie puis que  $\Sigma_2$  est séparé. (on peut de plus prendre une telle base dénombrable en se limitant aux boules de centre et de rayon rationnels)

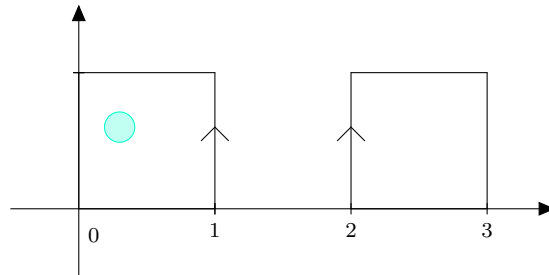
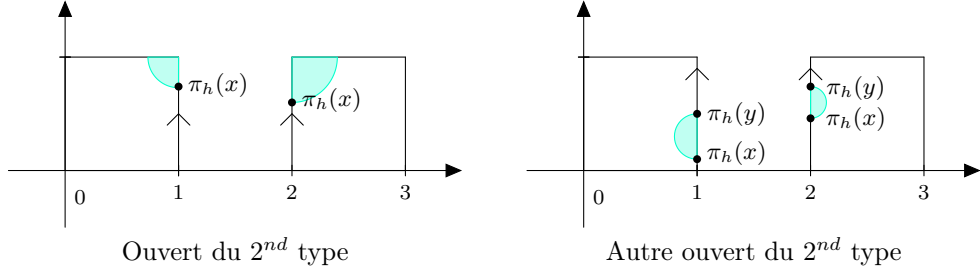


FIGURE 7 – Ouvert du 1<sup>er</sup> type



Si  $B$  est un ouvert du premier ou second type, on vérifie aisément que  $f^{-1}(B)$  est un ouvert de  $C_1 \sqcup C_2$  donc que  $f$  est une application continue qui induit une application  $\bar{f} : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  bijective continue par passage au quotient. Comme  $\Sigma_1$  est compact,  $\bar{f}$  est fermée donc c'est un homéomorphisme.  $\square$

On peut donc enfin démontrer le théorème 1.4.1.

*Démonstration du théorème de recollement de deux disques sur un segment.*  $D_1$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}$  donc au carré  $C_1$  et on peut choisir d'envoyer  $A_1$  sur  $\{1\} \times [0, 1]$ . En effet, on peut d'abord choisir un homéomorphisme qui envoie  $D_1$  sur  $\mathbb{D}$  et en particulier  $A_1$  sur  $\partial\mathbb{D}$ . Dès lors, par pseudo-dilatation (homéomorphe) on peut envoyer l'image de  $A_1$  (notée  $A'_1$  sur la figure) sur le côté d'un carré puis par rotation, translation et similitude, on obtient le résultat. Notons  $\varphi_1 : D_1 \rightarrow C_1$  cet homéomorphisme.

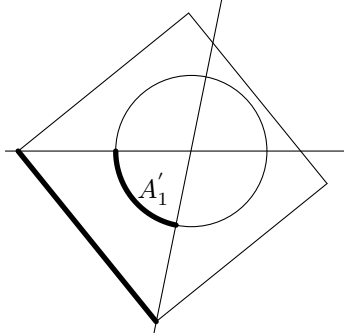


FIGURE 8 –  $\mathbb{D}$  envoyé sur un carré par pseudo-dilatation et  $A'_1$  sur un des côtés

De la même manière, soit  $\varphi_2 : D_2 \rightarrow C_2$  un homéomorphisme qui envoie  $D_2$  sur  $C_2$  et  $A_2$  sur  $\{2\} \times [0, 1]$ . De plus, quitte à utiliser 1.4.3 et traduire les carrés on peut supposer que les ensembles  $D_1, D_2, C_1$  et  $C_2$  sont disjoints deux à deux. On utilise alors la proposition 1.4.3 et le théorème 1.4.5 dans ce qui suit pour conclure. D'abord,

$$(D_1 \sqcup D_2) / (A_1 \sim_{\varphi} A_2) = (\varphi_1^{-1}(C_1) \sqcup \varphi_2^{-1}(C_2)) / (A_1 \sim_{\varphi} A_2)$$

donc cet espace quotient est homéomorphe à l'espace quotient

$$(C_1 \sqcup \varphi_2^{-1}(C_2)) / (\varphi_1(A_1) \sim_{\varphi \varphi_1^{-1}} A_2) = (\varphi_2^{-1}(C_2) \sqcup C_1) / (A_2 \sim_{\varphi_1 \varphi_1^{-1}} \varphi_1(A_1))$$

lui même homéomorphe à

$$\left(C_2 \sqcup C_1\right) / \left(\varphi_2(A_2) \sim_{\varphi_1 \varphi^{-1} \varphi_2^{-1}} \varphi_1(A_1)\right) = \left(C_1 \sqcup C_2\right) / \left(\varphi_1(A_1) \sim_{\varphi_2 \varphi \varphi_1^{-1}} \varphi_2(A_2)\right)$$

Or ce dernier espace est homéomorphe à  $\mathbb{D}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Ainsi, si  $P_1$  et  $P_2$  sont deux polygones avec leur intérieur (cf définition 1.5.1) disjoints,  $A_1$  et  $A_2$  des côtés de  $P_1$  et  $P_2$  respectivement, alors recoller  $P_1$  avec  $P_2$  en identifiant  $A_1$  et  $A_2$  selon un homéomorphisme donne encore un polygone avec son intérieur, indépendamment de l'homéomorphisme choisis. On verra en effet qu'un polygone et son intérieur est homéomorphe à  $\mathbb{D}$ .

## 1.5 $n$ -gones et mots

- Définition 1.5.1.**
1. Un *polygone*  $P$  est l'image d'une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  affine par morceaux, injective sur  $]0, 1[$  et telle que  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Un *côté* ou une *arrête* de  $P$  est l'image par  $\gamma$  d'un segment  $I$  de  $[0, 1]$ , le plus grand possible pour l'inclusion, sur lequel  $\gamma$  est affine ; un côté est donc un segment. Les extrémités des côtés sont appelées des *sommets*. Si  $P$  possède exactement  $n$  côtés distincts, on dira que  $P$  est un  *$n$ -gone*. En particulier,  $n \geq 3$  et  $P$  possède  $n$  sommets. Un 3-gone sera appelé un *triangle* et un 4-gone de côtés de même longueur est un *carré*.
  2. Un *2-gone* est un cercle  $\mathbb{S}^1$  muni de deux points distincts appelés *sommets*, les *côtés* étant les arcs de cercles fermés délimités par les sommets.

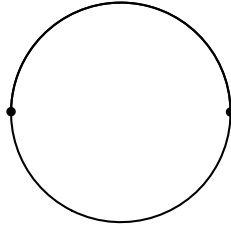


FIGURE 9 – Illustration d'un 2-gones

Le cercle  $\mathbb{S}^1$  partage le plan  $\mathbb{R}^2$  en deux composantes connexes : l'intérieur du cercle et son extérieur. Ceci reste vrai pour un  $n$ -gone,  $n \geq 3$  d'après le théorème 4.1.1.

**Définition 1.5.2.** On parlera d'un  *$n$ -gone plein* ou *polygone plein* pour désigner un  $n$ -gone et son intérieur.

**Théorème 1.5.3.** *Tout polygone plein est homéomorphe à  $\mathbb{D}$ . En particulier, un polygone est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ .*

*Démonstration.* On démontre le théorème par une récurrence sur le nombre de cotés des polygones pleins.

Le cas d'un triangle plein se traite de la même manière que précédemment par pseudo-dilatation.

Soit  $P$  un  $n$ -gone plein avec  $n \geq 4$  et supposons que tout  $(n-1)$ -gone plein soit homéomorphe à  $\mathbb{D}$  et donc au demi-disque fermé. Traçons un segment  $S$  entre deux sommets consécutifs de  $P$  de telle sorte que  $S$  soit dans l'intérieur de  $P$  et que  $S$  forme un triangle avec deux autres côtés de  $P$  - l'existence d'un tel segment  $S$  est une conséquence immédiate du théorème 4.1.4. On obtient donc deux polygones pleins : un triangle et un  $n-1$ -gone qui ont pour côté commun  $S$ . Ces deux polygones sont homéomorphes à deux polygones distincts dont leur côté correspondant à  $S$  a été identifié par un homéomorphisme. On utilise l'hypothèse de récurrence pour transformer ces deux polygones en deux demi-disques dont le diamètre correspond au côté  $S$ . Il suffit alors de les recoller sur leur diamètre en utilisant le théorème 1.4.1 pour obtenir un disque.

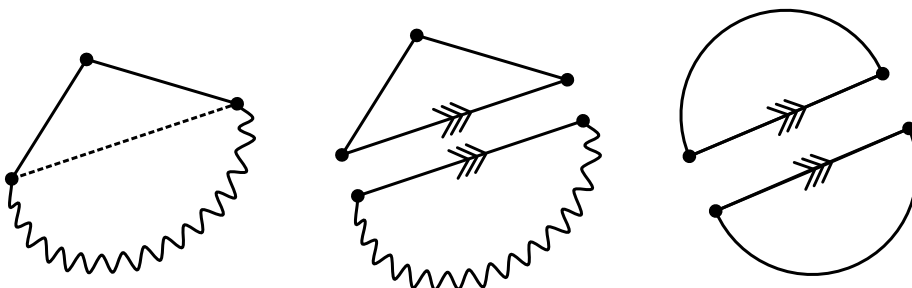


FIGURE 10 – Illustration du processus de l'hypothèse de récurrence

□

Dans la suite de la sous-section,  $P$  est un  $2n$ -gone plein,  $n \geq 1$  dont les côtés  $I_1, \dots, I_{2n}$  sont identifiés deux à deux par  $n$  homéomorphismes. Comme vu avec la figure de l'exemple 1.2.6, on peut représenter l'identification des côtés sur le polygone par des paires de flèches. Elles peuvent être représentées chacune par une lettre afin de les distinguer. Soit  $a_1, \dots, a_n$  de telles lettres, distinctes deux à deux. De plus, comme un polygone est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1$ , par le théorème 1.4.2, on peut représenter l'identification sur le cercle  $\mathbb{S}^1$ .

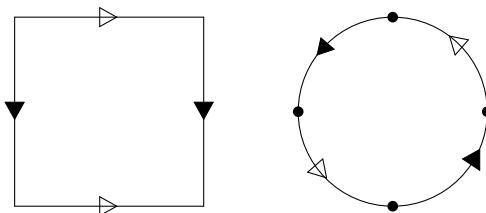


FIGURE 11 – Deux ensembles homéomorphes au sens de 1.4.2

**Définition 1.5.4.** Un *mot* associé à  $P$  est une suite finie de lettres obtenue en parcourant les côtés du polygone à partir d'un sommet quelconque, dans un sens quelconque, telle que :

- si l'on parcourt un côté identifié par la lettre  $a_i$ ,  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , dans le sens contraire de la flèche qu'elle représente, on note dans la suite  $a_i^{-1}$
- sinon on notera simplement  $a_i$  dans la suite

De plus, si  $a_i$  et  $a_i^{-1}$  sont tous deux présents dans le mot, alors on dit que les deux côtés de  $P$  associés à  $a_i$  sont de *première espèce*. Si ce n'est pas le cas, c'est à dire si  $a_i$  apparaît deux fois dans le mot, alors les deux côtés de  $P$  associés à  $a_i$  sont dits de *seconde espèce*.

De façon générale, un *mot* est une suite finie de lettres et on appellera *mot vide* un mot qui n'a pas de lettres.

**Proposition 1.5.5.** *Soit  $I_1$  et  $I_2$  deux côtés de  $P$  qui sont identifiés par un homéomorphisme  $\varphi : I_1 \rightarrow I_2$ . Soit  $h : I_1 \rightarrow I_2$  un autre homéomorphisme qui identifie les sommets de  $I_1$  sur  $I_2$  de la même façon que  $\varphi$ . Alors l'identification de  $I_1$  avec  $I_2$  dans  $P$  ne dépend pas de  $\varphi$  au sens où  $\varphi$  peut être remplacé par  $h$ .*

La preuve consiste à appliquer une méthode de "couper-coller" sur le polygone.

*Démonstration.* Dans la preuve, on confondra les polygones avec eux-même et leur intérieur. On souhaite montrer qu'on peut remplacer l'homéomorphisme d'identification des deux côtés  $\varphi$  par  $h$ .

1. On commence par tracer un segment  $S$  entre deux points de  $P$  de telle sorte à obtenir deux polygones qui ont pour côté commun  $S$  dont chacun possède un des deux côtés considérés. Sous l'identification de leurs côtés, ces deux polygones sont homéomorphes à  $P$  et à deux polygones distincts auxquels on a identifié les côtés correspondant à  $S$  et les autres côtés entre eux en utilisant le théorème 1.4.2, le théorème de recollement de deux disques sur un segment 1.4.1 et la remarque d'indépendance des étapes de recollement 1.2.17.

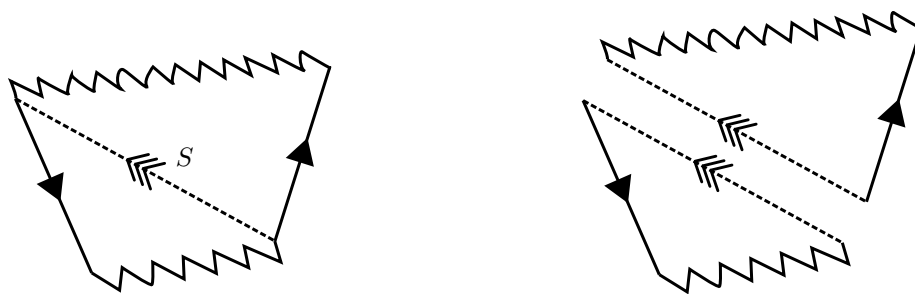


FIGURE 12 – Étape 1 de la preuve

2. On souhaite alors identifier nos deux côtés via notre nouvel espace constitué des deux polygones dont les côtés sont identifiés. Prenons un des deux polygones. Il est homéomorphe à  $\mathbb{D}$  donc au demi-disque dont le diamètre correspond à notre côté considéré. De même pour le deuxième avec l'autre côté.



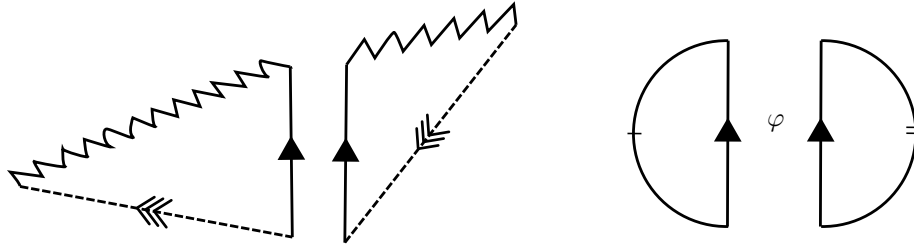


FIGURE 13 – Étape 2, a) de la preuve

Mais l'ordre d'identification des côtés n'est pas important et le recollement de deux demi-disques le long de leur diamètre par un homéomorphisme ne dépend pas de celui-ci. On peut donc remplacer  $\varphi$  par  $h$ .

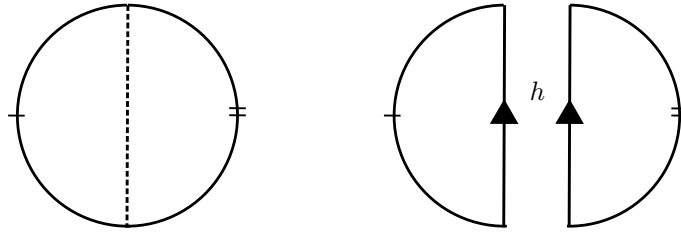


FIGURE 14 – Étape 2, b) de la preuve

□

**Remarque 1.5.6.** Par la suite, ce processus de couper-coller sera beaucoup utilisé. Il est justifié rigoureusement en utilisant le théorème 1.4.2, le théorème de recollement de deux disques sur un segment 1.4.1 et la remarque d'indépendance des étapes de recollement 1.2.17. Insistons sur le fait qu'après un processus de couper-coller, le polygone de départ dont les côtés sont deux à deux identifiés et celui d'arrivée (avec ses côtés deux à deux identifiés) sont homéomorphes.

**Définition 1.5.7.** Soit  $M_m$ ,  $m \geq 1$ , l'ensemble des suites finies  $\sigma = (x_1, \dots, x_{2m})$  constituées de  $2m$  lettres distinctes  $b_1, \dots, b_m$  et de leur inverse  $b_1^{-1}, \dots, b_m^{-1}$  telles que pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  soit  $b_i$  apparaît exactement deux fois dans  $\sigma$ , soit  $b_i$  et  $b_i^{-1}$  apparaissent chacune exactement une fois. Une telle suite  $\sigma = (x_1, \dots, x_{2m})$  est un *mot* de  $M_m$  et on le notera  $\sigma = x_1 \dots x_{2m}$ .

Plaçons  $2m$  points distincts sur le disque  $\mathbb{D}$  que l'on appellera *sommets*. On dit que l'ensemble de  $\partial\mathbb{D}$  inclus entre deux points consécutifs est un *segment* de  $\mathbb{D}$ . Soit  $\sigma = x_1 \dots x_{2m} \in M_m$ . On parcourt le bord de  $\mathbb{D}$  à partir d'un point. Lors de la rencontre avec le  $k$ -ième segment, on associe à ce segment la lettre  $x_k$  (sans l'exposant  $-1$  s'il est présent) et un sens, celui du parcours si  $x_k$  est de la forme  $b_i$  et le sens contraire sinon.

Cette construction définit à homéomorphisme près un  $2m$ -gone plein dont les côtés sont identifiés deux à deux par des homéomorphismes qui respectent le sens des segments. Cet espace s'appelle *l'espace quotient défini par  $\sigma$*  et ne

dépend ni de la position des  $2m$  points, ni du sens de parcours, ni du point de départ et ni des homéomorphismes choisis. On dit alors que deux mots de  $M_m$  sont *équivalents* si les espaces quotients définis par ces mots sont homéomorphes. C'est une relation d'équivalence.

Les mots associés à  $P$  sont des mots de  $M_n$ . Il est clair que ces mots sont équivalents. Ainsi, étudier si deux  $2n$ -gones dont chacun a ses côtés deux à deux identifiés sont homéomorphes revient à étudier s'ils admettent tous deux un mot équivalent à l'autre i.e. si les deux espaces quotients définis par leurs mots sont homéomorphes.

Voici ci-dessous des résultats permettant de simplifier l'écriture d'un mot.

**Proposition 1.5.8** (Élimination d'une paire de côtes adjacente de première espèce). *Soit  $\sigma \in M_m, m \geq 2$ , un mot de la forme  $aa^{-1}\bar{\sigma}$ . Alors  $\sigma$  est équivalent au mot  $\bar{\sigma}$ .*

*Démonstration.* On procède par une méthode de couper-coller sur le disque  $\mathbb{D}$  dont les segments sont identifiés deux à deux, l'identification étant donnée par  $\sigma$ .

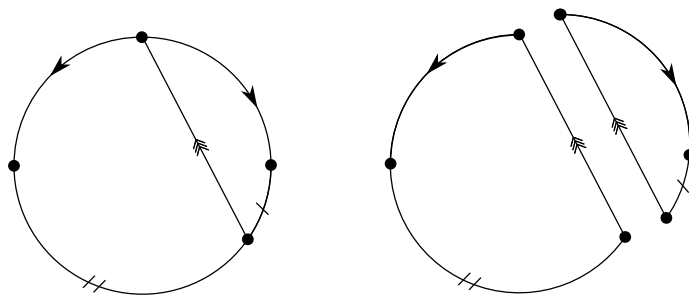


FIGURE 15 – Étape de découpage

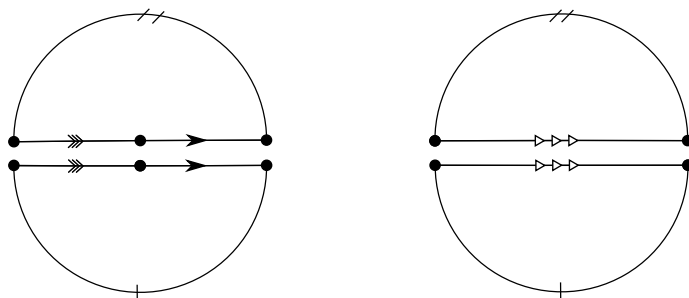


FIGURE 16 – Recollement

Les polygones étant homéomorphes au cercle, on se ramène par homéomorphisme (théorème 1.4.2) à deux demi-cercles disjoints de telle sorte que le diamètre ait pour identification le segment qui a découpé  $Q$  et un côté adjacent  $a$  de l'énoncé. Les deux diamètres sont donc identifiés et il suffit de les recoller pour obtenir l'espace quotient défini par  $\sigma$ .

□

**Remarque 1.5.9.** La proposition nous dit que l'on peut recoller les côtés adjacents de première espèce l'un sur l'autre.

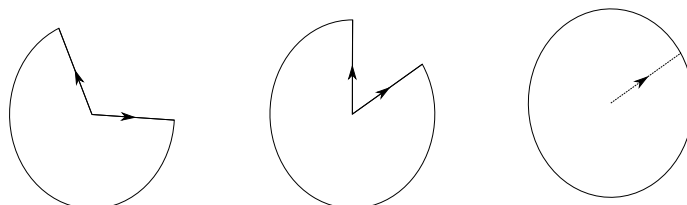


FIGURE 17 – Recollement de deux côtés adjacents de première espèce

**Définition 1.5.10.** Si  $\sigma = b_1 \dots b_r$ ,  $r \geq 1$ , est un mot, on note  $\sigma^{-1}$  le mot  $b_r^{-1} \dots b_1^{-1}$ . On dira que  $\sigma^{-1}$  est l'inverse de  $\sigma$ . L'inverse du mot vide est par définition le mot vide.

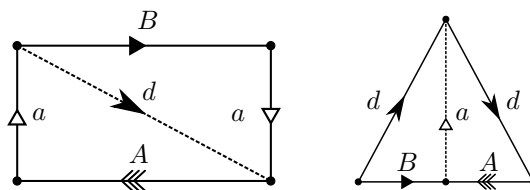
Si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont des mots, alors l'inverse du mot concaténé  $\sigma_1 \sigma_2$  est égale à  $(\sigma_1 \sigma_2)^{-1} = \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}$ . Ce fait sera utilisé dans la prochaine proposition, issue de [1] (chapitre 2, 2.4).

**Proposition 1.5.11.** La relation d'équivalence sur les mots de  $M_m$ ,  $m \geq 1$ , vérifie les propriétés suivantes.

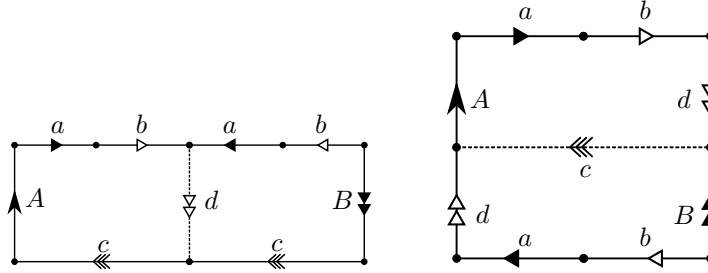
1. Le mot  $AaBaC$  est équivalent au mot  $CAB^{-1}dd$  où  $A, B, C$  sont des mots et  $a, d$  des lettres.
2. Le mot  $A(aba^{-1}b^{-1})Bcc$  est équivalent au mot  $B^{-1}ffeaA^{-1}gg$  où  $A$  et  $B$  sont des mots et  $a, b, c, e, f, g$  des lettres.

*Démonstration.* On procède par une méthode de couper-coller sur les polygones (pleins) dont les côtés sont deux à deux identifiés définis par les mots de l'énoncé.

1. Le mot  $AaBaC$  est équivalent au mot  $CAaBa$  donc quitte à concaténer les mots  $C$  et  $A$ , on se ramène à montrer que le mot  $AaBa$  est équivalent au mot  $AB^{-1}dd$ . On trace une ligne  $d$  entre les deux sommets des arrêtes  $a$  comme indiqué ci-dessous puis en coupant le long de cette ligne, on recolle les arrêtes  $a$ . On obtient un polygone dont les côtés sont identifiés deux à deux représenté par la mot  $AB^{-1}dd$ , d'où le résultat.



2. On introduit l'arrête  $d$  et en coupant le long de celle-ci, on recolle les arrêtes  $c$ .



Ainsi, le mot  $A(aba^{-1}b^{-1})Bcc$  est équivalent au mot  $AabdB^{-1}bad$ . On applique alors trois fois la proposition 1) précédente pour pouvoir conclure ; on soulignera le rôle de l'arrête  $a$  dans l'énoncé de cette proposition afin de mieux voir comment elle s'applique :  $AabdB^{-1}bad$  est équivalent à  $dAb^{-1}Bd^{-1}\underline{b}^{-1}ee$  lui même équivalent à  $eed\underline{A}dB^{-1}ff$  équivalent à  $B^{-1}ffeeA^{-1}gg$ .

□

## 2 Surfaces et Orientation

### 2.1 Définition et surfaces définies par un mot

On introduit ici la notion de surface. Une surface ou variété de dimension deux est un espace topologique qui possède une propriété locale : autour de chaque point, notre surface se comporte comme dans  $\mathbb{R}^2$ . En ce sens, la surface de la Terre est une surface puisque localement, le sol est plat.

**Définition 2.1.1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une *variété topologique de dimension  $n$*  est un espace topologique  $X$  séparé tel que pour chaque point  $x$  de  $X$ , il existe un ouvert contenant  $x$  homéomorphe au disque ouvert  $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$  de  $\mathbb{R}^n$  (où  $\|\cdot\|$  est une norme quelconque de  $\mathbb{R}^n$ ).

**Remarque 2.1.2.**

- Grâce aux propriétés des homéomorphismes, une variété topologique est localement compacte et localement connexe par arc.
- On vérifie aisément que pour une variété topologique  $X$  de dimension  $n$ , l'ensemble des ouverts de  $X$  homéomorphes au disque unité de  $\mathbb{R}^n$  forme une base de voisinage de  $X$ .

**Définition 2.1.3.** Une *surface* est une variété topologique de dimension deux à base dénombrable de voisinages qui est connexe.

**Proposition 2.1.4.** L'espace quotient  $\Sigma$  défini par un mot  $\sigma$  de  $M_n$ ,  $n \geq 1$ , est une surface compacte. On dira que  $\Sigma$  est une surface définie par le mot  $\sigma$ .

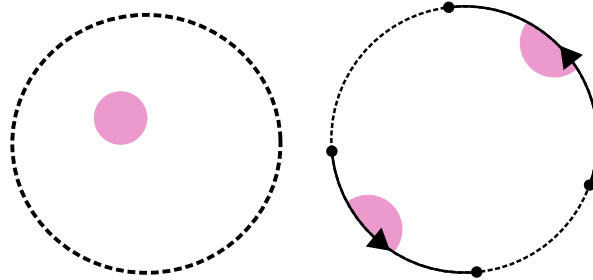
*Démonstration.* Soit  $\sigma$  un mot de  $M_n$ . On rappelle que l'espace quotient  $\Sigma$  défini par  $\sigma$  est représenté par un disque où l'on a placé  $2n$  points que l'on appelle *sommets* et où les *segments* i.e. arcs de cercle délimités par deux points sont identifiés deux à deux. Les arrêtes sont l'image des segments sous leur identification. On va définir une base de topologie sur  $\Sigma$  en s'inspirant de la preuve de la proposition 1.4.5. Soit  $\pi : \mathbb{D} \rightarrow \Sigma$  la projection associée à l'identification des segments. Rappelons que  $\mathbb{D}$  est muni de la topologie induite de  $\mathbb{R}^2$  muni d'une norme, par exemple la norme euclidienne.

- Si  $B$  est une boule ouverte dans  $\mathbb{D}$  (c'est un disque ouvert !) qui n'intersecte pas le bord de  $\mathbb{D}$  alors  $\pi(B)$  est un ouvert de  $\Sigma$  puisque  $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$  est un ouvert de  $\mathbb{D}$ . Si  $B$  est de centre et rayon rationnel, on dira que  $\pi(B)$  est un ouvert du *premier type*. On remarque que  $\pi$  restreinte à  $B$  est ouverte et donc c'est un homéomorphisme sur son image. En particulier, un ouvert du premier type est homéomorphe à  $Int(\mathbb{D})$  et l'ensemble de ces ouverts est dénombrable.
- Pour tout segment  $I$  de  $\mathbb{D}$ , on associe un homéomorphisme  $f : [0, 1] \rightarrow I$ . Si  $B_1$  est une boule ouverte dans  $\mathbb{D}$  qui intersecte exactement un seul segment  $I_1$  de  $\mathbb{D}$ , alors on prend une boule ouverte  $B_2$  dans  $\mathbb{D}$  qui intersecte exactement un seul segment  $I_2$  où  $I_1$  et  $I_2$  sont identifiés. Si  $h : I_1 \rightarrow I_2$  est l'homéomorphisme d'identification, on demande également à  $B_2$  de vérifier  $h(B_1 \cap I_1) = B_2 \cap I_2$ . Dès lors,  $\pi(B_1 \cup B_2)$  est un ouvert de  $\Sigma$  puisque  $\pi^{-1}(\pi(B_1 \cup B_2)) = B_1 \cup B_2$  est un ouvert de  $\mathbb{D}$ . Si  $B_1$  est de centre  $f_1(t)$  avec  $t$  rationnel où  $f_1$  est l'homéomorphisme associé à  $I_1$  et  $B_1$  de rayon rationnel, on dira que  $\pi(B_1 \cup B_2)$  est un ouvert du *second type*. En particulier, l'ensemble de ces ouverts est dénombrable.
- Soit  $s$  un sommet de  $\mathbb{D}$ . L'identification des segments de  $\mathbb{D}$  induit une identification des sommets de  $\mathbb{D}$ .
  - Cas où  $s$  n'est pas identifié à un autre sommet.  
Les deux segments  $I_0$  et  $I_1$  qui possèdent  $s$  sont identifiés entre eux et sont de première espèce. Soit  $a_0$  un point de  $I_0$  qui n'est pas un sommet et  $a_1$  le point sur  $I_1$  qui lui est identifié. En particulier,  $a_0$  et  $a_1$  sont différents de  $s$ . Alors si  $R$  est la région délimitée par  $I_0$ ,  $I_1$  et le segment  $[a_0 a_1]$  privée de ce segment,  $\pi(R)$  est un ouvert de  $\Sigma$  qui contient  $\pi(s)$ . En effet, l'intérieur d'un triangle (plein)  $T$  dans  $\mathbb{R}^2$  est un ouvert et  $R$  peut être vu comme l'intersection d'un tel triangle contenant  $s$  en son intérieur et de  $\mathbb{D}$ , quitte à modifier la taille des arcs de cercles. Dès lors,  $\pi^{-1}(\pi(R)) = R$  est un ouvert de  $\mathbb{D}$ .
  - Cas où  $s$  est identifié à d'autres sommets.  
Soit  $I_0$  et  $I_1$  les deux segments de  $\mathbb{D}$  qui contiennent  $s$ . On prend un point  $a_0$  de  $I_0$  et un point  $a_1$  de  $I_1$  qui ne sont pas des sommets. Comme précédemment, on obtient une région  $R_1$ .  $I_1$  est identifié à un segment  $I_2$  et on prend  $a_2$  le point sur ce segment qui est identifié à  $a_1$ .  $I_2$  contient un sommet  $s_2$  identifié à  $s$ . Si  $I_3$  est le côté différent de  $I_2$  contenant  $s_2$ , ou bien  $I_3$  est identifié à  $I_0$  et à partir du point  $a_3$  de  $I_3$  identifié à  $a_0$  on obtient une nouvelle région  $R_2$  ou bien  $I_3$  n'est pas identifié à  $I_0$  mais à un autre segment  $I_4$  et on continue de regarder les segments identifiés et de créer des régions jusqu'à tomber sur le segment identifié à  $I_0$ . On obtient donc des régions  $R_1, \dots, R_m$ . Quitte à rajouter des sommets en subdivisant les segments de  $\mathbb{D}$ , on peut de plus supposer que chaque segment est intersecté exactement une seule fois par les régions. Notons alors  $R$  la réunion des  $R_i$ . Par construction,  $\pi^{-1}(\pi(R))$  est la réunion de tous les  $R_i$  donc  $\pi(R)$  est un ouvert de  $\Sigma$  qui contient  $s$ .

Lors de la construction des régions, chaque région  $R'$  est obtenue comme intersection de l'intérieur d'un triangle plein  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  et de  $\mathbb{D}$ . On peut donc associer un triangle à chaque région. Pour chaque sommet  $s$ , on extrait

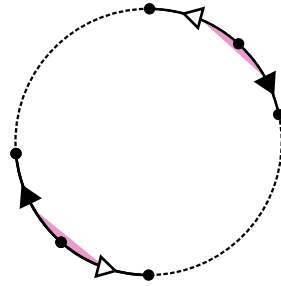
de l'ensemble des régions qui contiennent  $s$  un nombre dénombrable de régions  $R_n$  telles que l'aire de  $T_n \cap \mathbb{D}$  soit inférieure à  $2\pi \times 2^{-n}$  où  $T_n$  est le triangle associé à  $R_n$ . Au final, une fois cela effectué pour chaque sommet, on obtient un nombre dénombrable de régions  $(R'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

On se limite à ces régions pour construire  $R_1$ . Une fois cela fait, on associe à  $R_1$  des régions  $R_2, \dots, R_m$ . Si  $R$  est la réunion de  $R_1, \dots, R_m$ , on dit que  $\pi(R)$  est un ouvert du *troisième* type. Ces ouverts sont dénombrables par construction. Avec les mêmes notations que précédemment, remarquons qu'en choisissant l'aire de  $T_1 \cap \mathbb{D}$  assez petite, on peut toujours avoir l'aire des  $T_i \cap \mathbb{D}$  inférieure à une constante strictement positive donnée.



Ouvert du 1<sup>er</sup> type

Ouvert du 2<sup>nd</sup> type



Ouvert du 3<sup>e</sup> type (avec deux régions)

Soit  $\mathcal{B}$  l'ensemble des ouverts du premier, second et troisième type. Alors  $\mathcal{B}$  est par construction une base de topologie dénombrable qui sépare l'espace  $\Sigma$ . La projection  $\pi$  étant continue,  $\Sigma$  est compacte et connexe comme  $\mathbb{D}$ .

Il reste à voir que  $\Sigma$  est une variété de dimension deux pour conclure la preuve. Soit  $y$  un point de  $\Sigma$  et  $x$  un représentant de  $y$ .

- Si  $x$  est dans l'intérieur de  $\mathbb{D}$ ,  $y$  est contenu dans un ouvert du premier type qui est homéomorphe à  $Int(\mathbb{D})$  par ce qui précède.
- Si  $x$  est sur un segment de  $\mathbb{D}$  et  $x$  n'est pas un sommet,  $y$  est contenu dans un ouvert du second type  $O = \pi(B_1 \cup B_2)$  de  $\mathcal{B}$ . Or  $O$  est la réunion des deux "demi-disques"  $B_1$  et  $B_2$  dont les diamètres, c'est à dire leur bord, sont identifiés. Le théorème 1.4.1 permet d'affirmer que  $O$  est homéomorphe à  $Int(\mathbb{D})$ .
- Cas où  $x$  est un sommet de  $\mathbb{D}$ .

Montrons que les ouverts du troisième type sont homéomorphe à  $Int(\mathbb{D})$ . Comme  $y$  est contenu dans un ouvert du troisième type, il s'en suivra que  $y$  possède un voisinage homéomorphe à  $Int(\mathbb{D})$ . Les ouverts du troisième type sont l'identification d'un certain nombre de régions. Une récurrence

sur le nombre  $n$  de régions montre que ces ouverts sont homéomorphes à  $Int(\mathbb{D})$ . Le cas  $n = 1$  est clair. Pour le cas  $n = 2$ , l'illustration ci-dessus d'un ouvert du troisième type permet de voir qu'il suffit de recoller les côtés identifiés des deux régions l'un après l'autre en utilisant le théorème 1.4.1 et la remarque d'indépendance des étapes de recollement 1.2.17 pour voir que l'ouvert est homéomorphe à  $Int(\mathbb{D})$ .

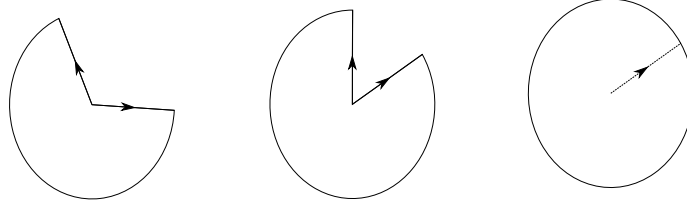


FIGURE 18 – Cas  $n = 1$

Soit  $n \geq 2$ . Supposons que tous les ouverts du troisième type  $\pi(R_1 \cup \dots \cup R_{n-1})$  formés de  $n - 1$  régions  $R_i$  de n'importe quel espace quotient défini par un mot de  $M_r$  pour tout  $r \geq 1$  (et  $r \geq n$  sinon on ne peut pas avoir  $n$  régions) soient homéomorphes à  $Int(\mathbb{D})$ . Par un processus de couper-coller illustré ci-dessous, on montre qu'un ouvert du troisième type formé de  $n$  régions est homéomorphe à un ouvert du troisième type formé de  $n - 1$  régions. Le processus fait diminuer de 1 le nombre de sommets identifiés à  $x$ .

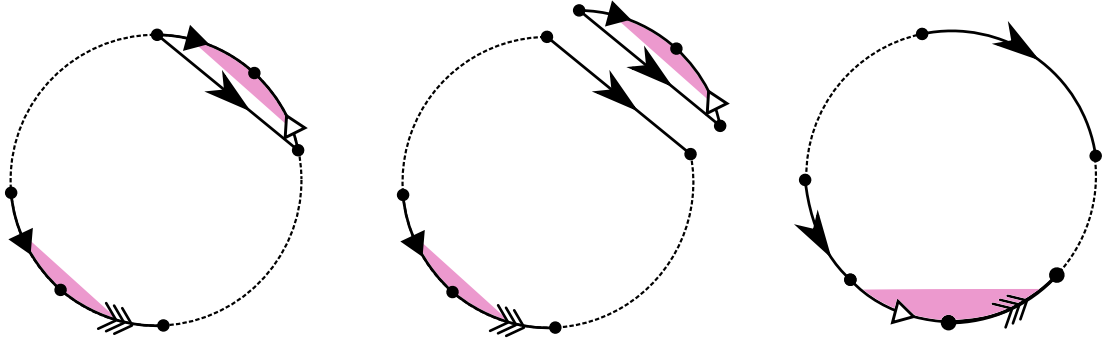


FIGURE 19 – Processus pour la récurrence

Ainsi, si  $O = \pi(R_1 \cup \dots \cup R_n)$  est un ouvert du troisième type de  $\Sigma$ , il est homéomorphe à un ouvert  $O' = \pi'(R'_1 \cup \dots \cup R'_n)$  de  $\Sigma'$  où  $\Sigma'$  est l'espace quotient défini par un mot (équivalent à  $\sigma$ ) homéomorphe à  $\Sigma$  obtenu après le processus de couper-coller. Par construction, on peut décider que  $O'$  est un ouvert du troisième type de  $\Sigma'$  donc  $O'$  est un ouvert du troisième type formé de  $n - 1$  régions et l'hypothèse de récurrence implique que  $O'$  est homéomorphe à  $Int(\mathbb{D})$  donc il en est de même de  $O$ . Ceci termine la récurrence.

Comme  $y$  est un point quelconque de  $\Sigma$ , on conclut que  $\Sigma$  est une variété de dimension deux.  $\square$

Ainsi, à tout mot de  $M_m$ ,  $m \geq 1$ , on peut associer une surface compacte, unique à équivalence près des mots c'est à dire que deux mots équivalents donnent deux surfaces homéomorphe entre elles. On verra dans 3.1 que la réciproque est vraie i.e. qu'à toute surface compacte on peut associer un mot, unique à équivalence près donc que toute surface compacte est homéomorphe à un  $2n$ -gone dont les côtés sont identifiés deux à deux. Ceci sera supposé vrai pour l'instant.

## 2.2 La sphère, le tore et le plan réel projectif

On note  $\mathbb{P}$  l'espace quotient  $[0, 1] \times [0, 1] / \approx$  où  $\approx$  est la relation d'équivalence sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  qui recolle les côtés deux à deux opposés de la façon suivante : si  $t \in [0, 1]$ , alors  $(0, t) \approx (1, 1 - t)$ ,  $(t, 0) \approx (1 - t, 1)$ .

**Définition 2.2.1.** Soit  $X$  un espace topologique. On dira que  $X$  est une *sphère* s'il est homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$ , un *tore* s'il est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  et un *plan projectif (réel)* s'il est homéomorphe à  $\mathbb{P}$ .

**Proposition 2.2.2.** La surface définie par le mot  $\sigma = aa^{-1}$  est une sphère. En particulier, la sphère est une surface compacte.

*Démonstration.* On procède par une méthode de couper-coller. On prend notre 2-gone dont les côtés sont identifiés selon  $\sigma$ . On coupe le 2-gone pour obtenir deux demi-disques dont les diamètres sont identifiés par un homéomorphisme arbitraire. Or un demi-disque est homéomorphe à un disque. Ceci permet alors d'obtenir deux 2-gones de côtés identifiés.

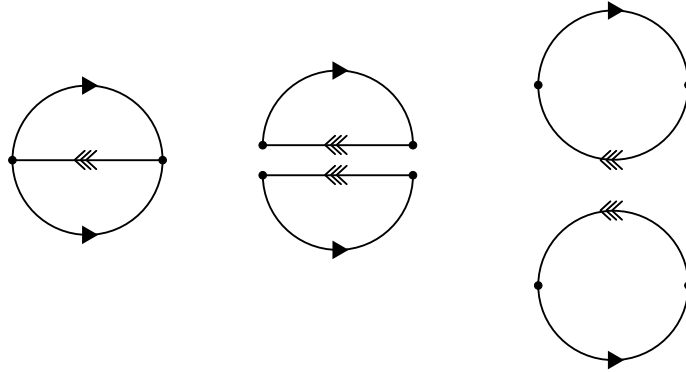


FIGURE 20 – Processus de couper-coller

Mais par projection stéréographique un disque est homéomorphe à un hémisphère de  $\mathbb{S}^2$ , par exemple  $\{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid z \geq 0\}$ , donc on se ramène à recoller deux hémisphères le long de leur équateur selon un certain homéomorphisme. Or les recollements ne dépendent pas des homéomorphismes. Par translation et rotation, on peut prendre deux-hémisphères dont l'équateur de l'un est en face de l'autre puis choisir comme homéomorphisme d'identification une simple translation, tel que cela a été fait dans le lemme 1.4.4. On obtient ainsi que le 2-gone du départ est homéomorphe à  $\mathbb{S}^2$ .

□



**Proposition 2.2.3.** *Les espaces topologiques suivants sont des tores.*

1.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$
2. L'espace quotient  $[0, 1] \times [0, 1] / \sim$  où  $\sim$  est la relation d'équivalence sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  qui recolle les côtés opposés du carré comme suit : si  $t \in [0, 1]$  alors  $(0, t) \sim (1, t)$  et  $(t, 0) \sim (t, 1)$ .
3. La surface définie par le mot  $\sigma = aba^{-1}b^{-1}$ .

En particulier, le tore est une surface compacte.

*Démonstration.* Le deuxième espace est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  et au troisième espace. On montre facilement que le premier est homéomorphe à  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .  $\square$

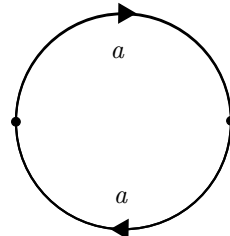
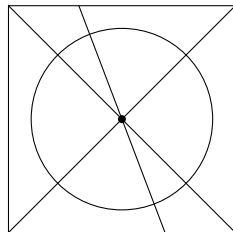
**Proposition 2.2.4.** *Les espaces topologiques suivants sont des plans projectifs (réels).*

1. L'espace quotient obtenu de  $\mathbb{S}^2$  en identifiant ses points antipodaux.
2. L'espace quotient obtenu de l'hémisphère Nord fermé de  $\mathbb{S}^2$   $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z \geq 0\}$  en identifiant les points antipodaux de l'équateur.
3. L'espace quotient issu de  $\mathbb{D}$  obtenu en identifiant ses points antipodaux.
4. La surface définie par le mot  $\sigma = aa$ .

En particulier, le plan projectif est une surface compacte.

*Démonstration.*  $H$  est homéomorphe à  $\mathbb{D}$  par projection stéréographique lui-même homéomorphe au carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par pseudo-dilatation. L'identification des points antipodaux de  $H$  correspond alors à l'identification sur le carré défini par la relation d'équivalence  $\approx$  définie en début de sous-section. D'autre part, la surface définie par le mot  $\sigma = aa$  peut être représentée par un 2-gone plein. Par indépendance du choix des homéomorphismes d'identification (1.5.5), la surface est homéomorphe au troisième espace et au deuxième (vu comme un disque).

Soit respectivement  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  le premier et deuxième espace quotient et  $\pi_1, \pi_2$  les projections respectives associées. L'application  $f : H \rightarrow \Sigma_1$  qui à  $x$  associe  $\pi_1(x)$  est continue surjective et constante sur les classes d'équivalence de  $\pi_2$  donc induit une application bijective continue  $\bar{f} : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ . On remarque facilement que  $\Sigma_1$  est séparé.  $\Sigma_2$  l'est aussi (par le même argument ou par le fait que l'espace est homéomorphe à une surface) donc est compact comme  $H$ . Ainsi  $\bar{f}$  est fermée donc c'est un homéomorphisme.  $\square$



Pseudo-dilatation d'un cercle sur un carré      Représentation du plan projectif  $aa$

### 2.3 Orientation

Soit  $S$  une surface. Imaginons que l'on puisse marcher sur notre surface. Marchons donc sur un chemin de  $S$  qui nous ramène au point de départ i.e. sur un chemin qui boucle. Au voisinage de chaque point, la surface est plate. Nous pouvons donc choisir une orientation en toute position. Si l'on se promène le long de ce chemin, on aimerait que notre orientation reste inchangée du début jusqu'à la fin et en particulier que ce qui était à notre droite au début reste à notre droite à la fin et ne soit pas à gauche ! Si ceci est vrai pour tous les chemins qui bouclent que nous empruntons, c'est à dire que sur toute portion de  $S$  sur laquelle nous voyageons l'orientation ne change pas, alors  $S$  est dite orientable. Nous allons construire une définition rigoureuse dans ce qui suit.

**Exemple 2.3.1** (Ruban de Möbius). Soit l'espace quotient  $R = [0, 1] \times ]0, 1[ / \sim$  où  $\sim$  est la relation d'équivalence sur  $[0, 1] \times ]0, 1[$  qui recolle les côtés  $\{0\} \times ]0, 1[$  et  $\{1\} \times ]0, 1[$  de la façon suivante : si  $t \in ]0, 1[$ , alors  $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ .  $R$  est appelé le *ruban de Möbius*. Soit  $\pi$  la projection associée à  $\sim$ . Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow R$  un lacet qui à  $t$  associe

$$\gamma(t) = \begin{cases} \pi\left(\frac{1}{2} + t, \frac{1}{2}\right) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \pi\left(t - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ci-dessous est représentée la trajectoire de  $\gamma$ . La flèche perpendiculaire à la trajectoire est un choix arbitraire pour définir la gauche lorsque  $\gamma$  "avance".

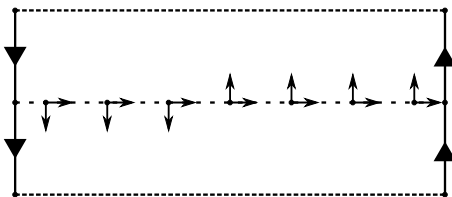


FIGURE 21 – Trajectoire de  $\gamma$  sur  $R$

Lorsque  $\gamma$  passe par un côté identifié, sous l'identification, la gauche est inversée. Ainsi, la gauche définie en  $\gamma(0)$  n'est pas la même qu'en  $\gamma(1)$  : elles ont été interverties.

Remarquons que si  $\sim$  avait été définie par  $(0, t) \sim (1, t)$  pour  $t \in ]0, 1[$  alors il n'y aurait pas eu une inversion de l'orientation.

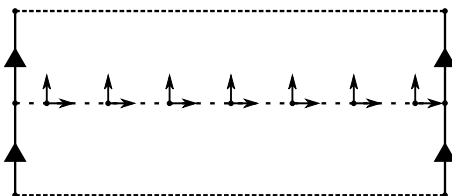


FIGURE 22 – Si  $\sim$  avait été définie autrement

Il y a donc une importance capitale du recollement des côtés. On peut imaginer les côtés de  $R$  comme des arrêtes de seconde espèce.

Cet exemple inspire la définition suivante.

**Définition 2.3.2.** Soit  $S$  une surface. On dit que  $S$  est *non-orientable* si et seulement si elle contient un sous-ensemble homéomorphe au ruban de Möbius. Dans le cas contraire,  $S$  est dite *orientable*.

Il s'en suit immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 2.3.3.** Deux surfaces homéomorphes ont même orientation.

**Proposition 2.3.4.** Tout  $2n$ -gone plein  $\Sigma$  d'arrêtes identifiées par paire qui contient une paire d'arrêtes de seconde espèce est non orientable.

*Démonstration.*  $\Sigma$  peut-être représenté par un disque avec  $2n$  points sur le bord dont les arcs de cercle délimités par ces points sont identifiés par paire.  $\Sigma$  contient donc un ensemble homéomorphe au ruban de Möbius comme indiqué sur la figure ci-dessous.

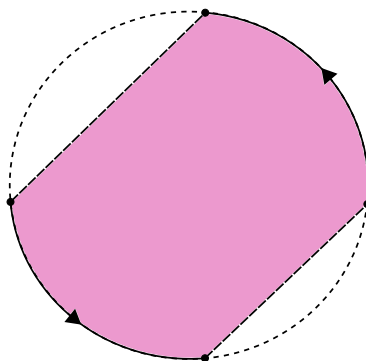


FIGURE 23 –  $\Sigma$  contient un ensemble homéomorphe au ruban de Möbius

□

Voici deux résultats qui seront démontrés en annexe. Leur preuve demande d'utiliser des objets que l'on verra plus tard ou d'introduire des outils supplémentaires. Ces résultats sont cependant intuitifs.

**Proposition 2.3.5.** Soit  $S$  une surface compacte. Si  $S$  est non orientable alors il existe un  $2n$ -gone plein d'arrêtes identifiées par paire homéomorphe à  $S$  qui possède une paire d'arrête de seconde espèce.

**Proposition 2.3.6.** La sphère  $\mathbb{S}^2$  est orientable.

Le résultat suivant sera justifié en annexe.

**Proposition 2.3.7.** Soit  $\Sigma$  un  $2n$ -gone plein d'arrêtes identifiées par paire. Si  $\Sigma$  est non-orientable alors  $\Sigma$  contient une paire de seconde espèce.

On obtient donc un corollaire très important pour la suite.

**Corollaire 2.3.8.** Soit  $\Sigma$  un  $2n$ -gone plein d'arrêtes identifiées par paire.

La surface  $\Sigma$  est non-orientable si et seulement si elle possède une paire d'arrêtes de seconde espèce.

*Soulignons la contraposé :*

*La surface  $\Sigma$  est orientable si et seulement si  $\Sigma$  n'a que des arrêtes de première espèce.*

Ce résultat permet de connaître l'orientation d'une surface compacte pourvu qu'on connaisse un  $2n$ -gone plein identifié qui lui est homéomorphe.

**Proposition 2.3.9.** *Le tore est une surface orientable. Le plan projectif est une surface non orientable.*

*Démonstration.* Le tore est une surface définie par un mot qui ne contient que des arrêtes de première espèce ; il est donc orientable. Le plan projectif est défini par le mot  $aa$  dont les arrêtes sont de seconde espèce ; il est donc non-orientable.  $\square$

## 2.4 Sommes connexes de surfaces compactes

L'opération de la somme connexe permet à partir de deux surfaces compactes d'en fabriquer une troisième.

Soit  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces compactes disjointes. Leur somme connexe notée  $S_1 \# S_2$  est formée de la façon suivante. On prend deux sous-ensembles  $D_1 \subset S_1$  et  $D_2 \subset S_2$  homéomorphes à  $\mathbb{D}$  et un homéomorphisme  $h$  de  $\partial D_1$  sur  $\partial D_2$ . Soit  $S'_i$  le complémentaire de l'intérieur de  $D_i$  dans  $S_i$  pour  $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ . Alors, la somme connexe de  $S_1$  et  $S_2$  est l'espace quotient obtenu à partir de  $S'_1 \sqcup S'_2$  en recollant  $\partial D_1$  sur  $\partial D_2$  selon  $h$  c'est à dire en identifiant  $x$  et  $h(x)$  pour tout  $x \in \partial D_1$ .

Concrètement, cela revient à faire un petit trou circulaire sur chaque surface et à recoller les ensembles obtenus le long des bords circulaires des deux trous. On remarque que l'opération  $\#$  est commutative. Dans la suite, on admettra que  $S_1 \# S_2$  est une surface compacte et qu'à homéomorphisme près, elle ne dépend ni du choix des disques  $D_1$  et  $D_2$ , ni du choix du recollement  $h$ , que de plus l'opération  $\#$  est associative à homéomorphisme près et que la somme connexe de la sphère et d'une surface est homéomorphe à cette surface i.e. la sphère joue le rôle d'élément "neutre" pour  $\#$ .

Le théorème 1.4.2 montre que si  $S_1, S_2$  et  $S_3$  sont trois surfaces compactes et que  $S_1$  et  $S_2$  sont homéomorphes, alors  $S_1 \# S_3$  est homéomorphe à  $S_2 \# S_3$ .

**Proposition 2.4.1.** *Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux surfaces définies respectivement par des mots  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , alors leur somme connexe  $S_1 \# S_2$  est une surface définie par la concaténation des mots  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2$ .*

*Démonstration.* On commence par regarder  $S_1$ . Par indépendance du choix des disques, on peut prendre  $D_1$  comme indiqué sur la figure ci-dessous en rose. l'idée est de procéder à un processus de couper-coller pour se ramener au cas où  $S_1 - \text{Int}(D_1)$  est un  $(2n+1)$ -gone plein dont  $2n$  côtés sont identifiés deux à deux et le dernier côté correspond au bord du disque. Ici,  $\sigma_1$  est la concaténation de deux mots  $A$  et  $B$ .  $\sigma_1 = AB$ .

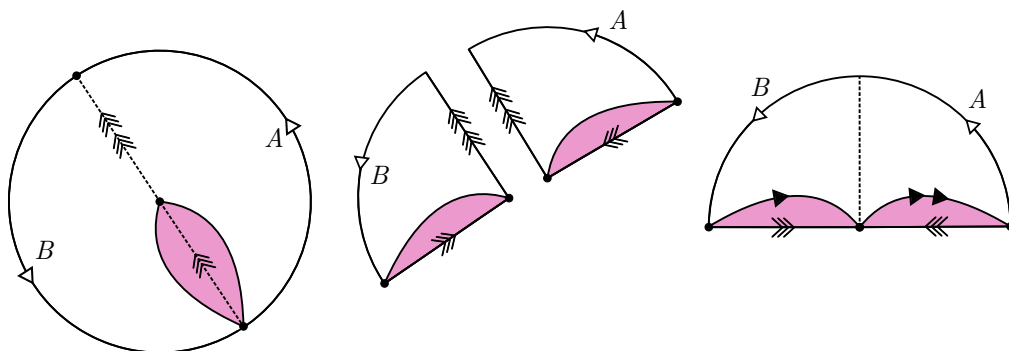


FIGURE 24 – Processus de couper-coller sur  $S_1$

En enlevant l'intérieur de  $D_1$ , on obtient  $S_1 - \text{Int}(D_1)$  sous la forme d'un demi-disque dont le diamètre correspond au bord du disque  $D_1$ .

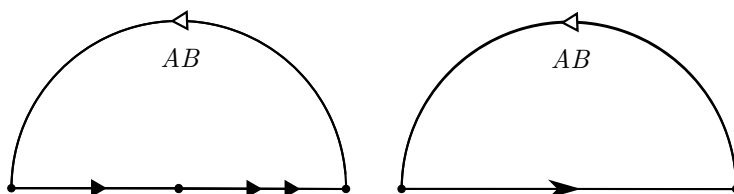


FIGURE 25 –  $S_1 - \text{Int}(D_1)$  sous forme de  $(2n + 1)$ -gone

Il suffit de faire de même pour  $S_2 - \text{Int}(D_2)$  et de recoller les diamètres des deux demi-disques en utilisant l'indépendance du recollement dans la somme connexe et l'indépendance de l'ordre des recollements des arcs de cercle sur le bord des demi-disques. □

**Corollaire 2.4.2.** 1. La somme connexe de  $n$  tores,  $n \geq 1$ , est une surface compacte définie par le mot  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ .

2. La somme connexe de  $n$  plans projectifs,  $n \geq 1$ , est une surface compacte définie par le mot  $a_1 a_1 \dots a_n a_n$ .

*Démonstration.* La preuve est une récurrence immédiate en utilisant les propositions 2.4.1, 2.2.3 et 2.2.4. □

Surface	Un mot associé
Sphère	$aa^{-1}$
Somme connexe de $n$ tores	$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$
Somme connexe de $n$ plans projectifs	$a_1 a_1 \dots a_n a_n$

FIGURE 26 – Tableau récapitulatif

**Corollaire 2.4.3.** Soit  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces compactes. Alors

- si  $S_1$  et  $S_2$  sont toutes deux orientables, il en est de même de leur somme connexe  $S_1 \# S_2$
- si  $S_1$  ou  $S_2$  est non orientable, il en est de même de leur somme connexe  $S_1 \# S_2$

*Démonstration.* Cela découle de 2.4.1 et de 2.3.8. □

## 2.5 Triangulation des surfaces compactes

**Définition 2.5.1.** Soit  $S$  une surface compacte. Une *triangulation* de  $S$  est une famille finie de sous-ensembles de  $S$ ,  $\{T_1, \dots, T_n\}$ , qui recouvre  $S$  et qui vérifie les conditions suivantes. Pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe un homéomorphisme  $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$  où  $T'_i$  est un triangle plein ; par abus, les  $T_i$  seront aussi appelés des "triangles" et les images des arêtes et sommets de  $T'_i$  par  $\varphi_i$  seront appelées "arêtes" et "sommets" respectivement. Si  $T_i$  et  $T_j$  sont deux triangles distincts, on demande à ce qu'ils aient une unique arête ou un unique sommet en commun ou bien qu'ils soient distincts.

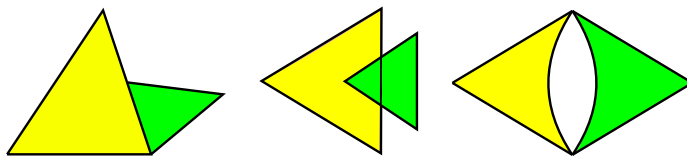
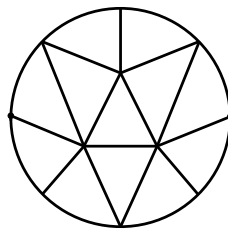
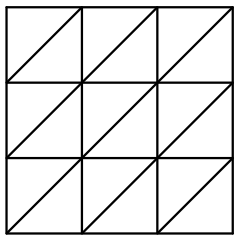
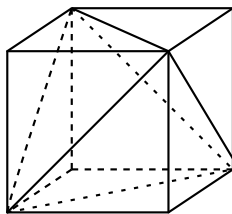


FIGURE 27 – Quelques intersections interdites dans une triangulation

**Exemple 2.5.2.** Voici ci-dessous trois triangulations. Pour le tore, la triangulation a été faite sur un 4-gone associé dont les côtés ont été identifiés deux à deux ; de même pour le plan projectif avec un 2-gone.

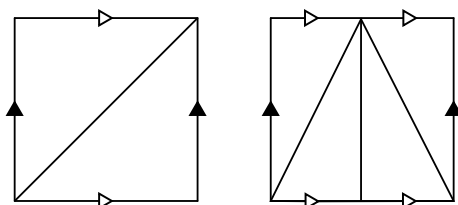


Une triangulation du tore    Une triangulation du plan projectif



Une triangulation du cube

Ci-dessous, les découpages du tore en triangles ne sont *pas* des triangulations du tore.



Ces découpages ne sont *pas* des triangulations du tore.

Pour la suite, on supposera le théorème et la proposition qui suivent.

**Théorème 2.5.3** (Rado). *Toute surface compacte admet une triangulation.*

**Proposition 2.5.4.** *Soit  $S$  une surface compacte. Alors  $S$  admet une triangulation  $\{T_1, \dots, T_n\}$  qui vérifie :*

1. *Chaque arête est l'arête d'exactly deux triangles.*
2. *Soit  $v$  un sommet de la triangulation et  $\{T_{i_1}, \dots, T_{i_r}\}$  l'ensemble des triangles dont  $v$  est un sommet. Alors, quitte à les renuméroter, on peut supposer que  $T_{i_k}$  et  $T_{i_{k+1}}$  ont une arête en commun pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$  avec  $T_{i_{r+1}} = T_{i_1}$ .*

### 3 Classification des surfaces compactes

Le but de cette section est de classifier les surfaces compactes. On pourra se référer à [3]. Voici le théorème démontré.

**Théorème 3.0.1.** *Une surface compacte est, à homéomorphisme près, une sphère, la somme connexe d'un ou plusieurs tores ou la somme connexe d'un ou plusieurs plans projectifs.*

Soit  $S$  une surface compacte.

La preuve consiste en cinq étapes. Il s'agit essentiellement de mettre une triangulation sur  $S$  puis de la "déplier" afin d'obtenir un  $2n$ -gone plein dont les côtés sont identifiés deux à deux. La surface est dès lors représentée par un mot et il suffira d'appliquer des méthodes de couper-coller afin d'obtenir un mot équivalent que l'on reconnaît.

#### 3.1 Étape 1 : Associer un mot à la surface

D'après le théorème 2.5.3, on peut supposer que  $S$  admet une triangulation.

On va montrer que l'on peut numéroter les triangles de la triangulation  $T_1, \dots, T_n$  de telle sorte que  $T_i$  ait un côté  $e_i$  en commun avec au moins un des triangles  $T_1, \dots, T_{i-1}$  où  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ . Pour se faire, on va choisir les triangles de proche en proche. Soit  $T_1$  un triangle de la triangulation choisi arbitrairement et  $T_2$  un autre triangle qui a un côté  $e_2$  en commun avec  $T_1$ . Pour  $T_3$ , on choisit un triangle qui a un côté en commun  $e_3$  avec  $T_1$  ou  $T_2$ . Si à l'étape  $k$ ,  $k \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket$ , on ne peut plus continuer le processus, on aurait deux ensembles de triangles  $\{T_1, \dots, T_{k-1}\}$  et  $\{T_k, \dots, T_n\}$  tels qu'aucun triangle du premier ensemble ait un côté ou sommet (par la proposition 2.5.4) en commun avec les triangles du

second ensemble. Ceci donnerait alors une partition de  $S$  en deux ensembles disjoints non vides et fermés ce qui contredirait la connexité de  $S$ .

On utilise maintenant ces triangles  $T_1, \dots, T_n$  et ces côtés  $e_2, \dots, e_n$  pour montrer que la surface  $S$  est homéomorphe à un  $2n$ -gone plein dont les côtés sont identifiés deux à deux. i.e. que  $S$  est définie par un mot  $\sigma$  de  $M_n$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , soit  $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$  l'homéomorphisme associé à la triangulation de  $S$ , où  $T'_i$  est un triangle plein. Quitte à translater on peut supposer les triangles  $T'_i$  disjoints. Soit  $T'$  l'union disjointe de ces triangles et  $\varphi : T' \rightarrow S$  l'application qui restreinte à  $T'_i$  vaut  $\varphi_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  $\varphi$  est continue par le principe de recollement 1.1.1 et surjective par construction.

On va montrer que  $S$  est homéomorphe à un certain espace quotient de  $T'$  en passant  $\varphi$  au quotient. Pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $e_i$  est le côté du triangle  $T_i$  et d'un autre triangle  $T_j$  où  $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$  donc  $\varphi^{-1}(e_i)$  est l'union d'un côté du triangle  $T'_i$  et d'un côté du triangle  $T'_j$ ; on identifie ces deux côtés de telle sorte que deux points de cette union sont équivalents si et seulement si ils ont la même image par  $\varphi$  c'est à dire s'ils correspondent au même point sur le côté  $e_i$ , autrement dit on recolle ces deux côtés. Notons  $D$  l'espace quotient obtenu de  $T'$  une fois toutes ces identifications faites. Dès lors,  $\varphi : T' \rightarrow S$  est constante sur les classes d'équivalence par construction et induit par passage au quotient une application  $\psi : D \rightarrow S$  continue et bijective.  $S$  étant séparé, il en est de même de  $D$  donc  $D$  est compacte comme  $T'$  et il s'en suit que  $\psi$  est fermée. Ainsi  $\psi$  est un homéomorphisme.

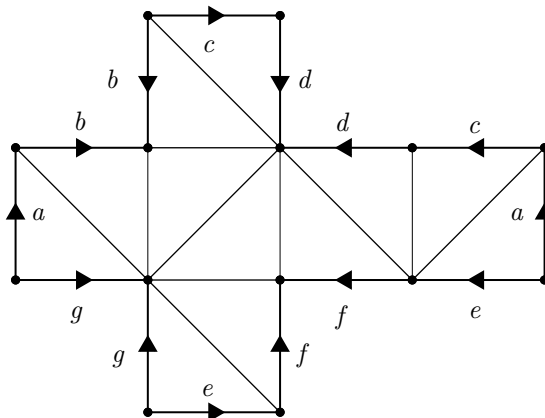
Il reste à voir que  $D$  est un  $2n$ -gone dont les côtés ont été deux à deux identifiés. On se sert pour cela de deux faits, vus précédemment :

1. Le théorème 1.4.1 de recollement de deux disques sur un segment.
2. La remarque 1.2.17 d'indépendance des étapes de recollement qui assure que recoller les côtés les uns après les autres ou tous en même temps donne le même espace  $D$ .

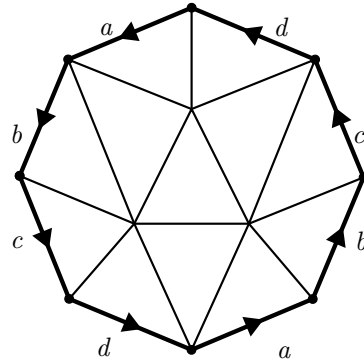
Les  $T'_i$  sont homéomorphes à  $\mathbb{D}$ . Ainsi, l'espace quotient obtenu de  $T'_1 \cup T'_2$  en identifiant les points de  $\varphi^{-1}(e_2)$  est un 4-gone plein. Ensuite, l'espace quotient obtenu à partir de ce carré (plein) et de  $T'_3$  en identifiant les points de  $\varphi^{-1}(e_3)$  est un 6-gone plein. On continue ces identifications étape par étape pour obtenir  $D$  qui est alors un  $2n$ -gone plein dont les côtés ont été deux à deux identifiés.  $\psi$  étant un homéomorphisme, on obtient bien que  $S$  est définie par un mot de  $M_n$ . Soit  $\sigma$  un tel mot.

**Exemple 3.1.1.** Voici par exemple ce qu'on peut obtenir pour le cube et le plan projectif en utilisant les triangulations de 2.5.2.





Pour le cube



Pour le plan projectif

### 3.2 Étape 2 : Éliminer les côtés adjacents de première espèce

On élimine les paires de côtés adjacents de première espèce dans le mot  $\sigma$  pour obtenir un mot équivalent, et ce jusqu'à ce que le nouveau mot équivalent ne puisse plus être simplifié de la sorte. C'est en effet possible en utilisant la proposition 1.5.8 et l'indépendance des étapes de recollement 1.2.17. On note encore  $\sigma$  le mot équivalent final obtenu. Si  $\sigma$  est de la forme  $aa$  ou  $aa^{-1}$ , la preuve se termine car  $S$  est alors une sphère ou un plan projectif en utilisant les propositions 2.2.2 et 2.2.4. Dans le cas contraire, la preuve continue.

### 3.3 Étape 3 : Une seule classe d'équivalence pour les sommets

L'identification des côtés sur la surface définie par  $\sigma$  induit une identification des sommets. C'est une relation d'équivalence.

On souhaite transformer la surface définie par  $\sigma$  de telle sorte à obtenir une surface définie par un mot équivalent où les sommets du polygone associé appartiennent à une seule classe d'équivalence. On va procéder par une méthode de couper-coller.

Supposons qu'il y ait au moins deux classes d'équivalence de sommets pour  $\sigma$ . On peut donc trouver deux sommets adjacents  $P$  et  $Q$  qui ne sont pas équivalents. La figure ci-dessous illustre le processus de couper-coller que l'on va effectuer. On note  $a$  et  $b$  les arrêtes comme sur la figure. Suite à l'étape 2, ces arrêtes ne sont pas identifiées entre elles. On trace une ligne  $c$  qui part de  $Q$  et qui arrive sur le sommet de l'arrête  $a$ , différent de  $P$ . On a donc un triangle d'arrêtes  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Par la méthode de couper-coller, on coupe le polygone dont les côtés sont identifiés le long de  $c$  pour recoller les deux arrêtes nommées  $a$  entre elles.

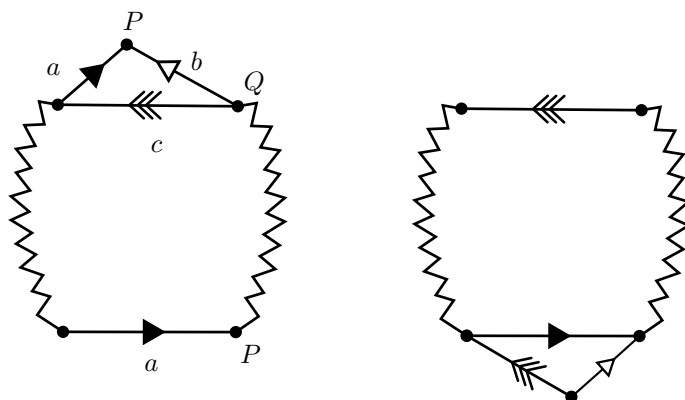


FIGURE 28 – Processus de couper-coller de l'étape 3

On obtient alors un polygone dont les côtés sont deux à deux identifiés avec un sommet de moins dans la classe d'équivalence de  $P$  et un sommet de plus dans celle de  $Q$ , les autres sommets ayant encore une classe d'équivalence de même cardinal. Dès lors, on applique de nouveau l'étape 2 si cela est possible puis ré-applique cette méthode de couper-coller pour réduire le nombre de sommet dans la classe d'équivalence de  $P$  (si elle existe encore après l'étape 2). On continue ce processus jusqu'à ce que la classe de  $P$  soit complètement éliminée. S'il existe au moins deux classes d'équivalence de sommets, ce processus permet d'en éliminer une. Par récurrence finie, on obtient un polygone dont les côtés sont deux à deux identifiés et qui possède une seule classe d'équivalence de sommets.

On note qu'après élimination d'un sommet dans la classe de  $P$ , si cette classe ne contient plus qu'un sommet, l'étape 2 permet d'éliminer ce dernier sommet.

### 3.4 Étape 4 : Rendre les paires d'arrêtes de seconde espèce adjacentes

On souhaite maintenant transformer le polygone obtenu dont les côtés sont deux à deux identifiés de telle sorte que deux arrêtes identifiées de seconde espèce soient adjacentes.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 1.5.11,1) que l'on redétaille. Supposons avoir une paire d'arrêtes  $(b, b)$  de seconde espèce qui ne soient pas adjacentes. On applique le processus de couper-coller suivant. On trace une ligne  $a$  entre les deux arrêtes  $b$  qui commence par un sommet de l'une et finit par un sommet de l'autre comme illustré sur la figure ci-dessous. On obtient alors deux polygones dont les côtés sont identifiés et qui ont pour côté commun  $a$ . En coupant le long de  $a$  et recollant les arrêtes nommées  $b$ , on obtient un polygone dont les côtés sont deux à deux identifiés avec exactement le même nombre de paires d'arrêtes de seconde espèce qu'au départ, le nombre des paires adjacentes ayant augmenté de 1. Une récurrence finie permet alors d'obtenir le résultat.

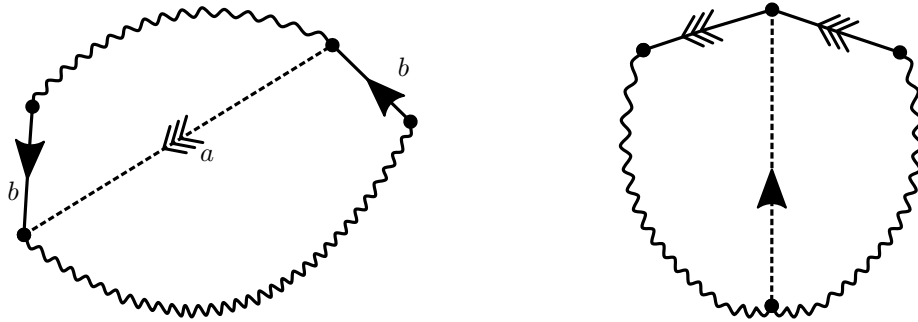


FIGURE 29 – Processus de couper-coller de l'étape 4

On note toujours  $\sigma$  le mot obtenu à la fin de ce processus. Si  $\sigma$  ne contient pas d'arrêtes de première espèce alors  $\sigma$  est de la forme  $a_1 a_1 \dots a_r a_r$  et donc  $S$  est la somme connexe de plusieurs plans projectifs.

Supposons dans la suite qu'il existe au moins une paire d'arrêtes de première espèce, notée  $(a, a)$ . On va montrer en raisonnant par l'absurde qu'il existe une autre paire d'arrêtes de première espèce  $(b, b)$  qui *sépare* la paire  $(a, a)$  i.e. que  $\sigma$  est un mot équivalent à un mot de la forme  $\dots a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1} \dots$ , où les points  $\dots$  dénote la possible présence d'autres lettres. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors  $\sigma$  définit un polygone dont les côtés sont deux à deux identifiés qui a l'apparence de la figure ci-dessous, où  $A$  et  $B$  désigne une suite de côté du polygone (donc un mot).

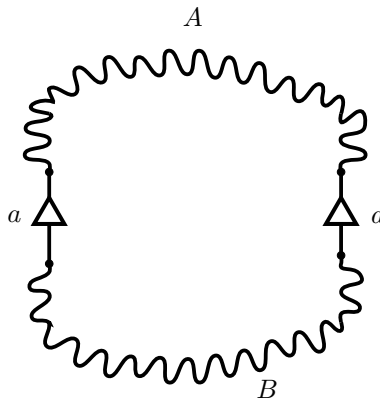


FIGURE 30 – Ensemble homéomorphe à  $S$  dans la preuve par l'absurde

Mais chaque côté de  $A$  est identifié à un côté de  $A$  et de même pour  $B$ . Aucun côté de  $A$  n'est identifié avec un côté de  $B$ . Or ceci contredit le fait que les sommets initiaux et finaux des arrêtes nommées  $a$  doivent être identifiés, d'après l'étape 3.

### 3.5 Étape 5 : Rendre adjacentes les arrêtes de première espèce qui se séparent

Par l'étape précédente, la surface  $S$  est homéomorphe à un polygone plein dont les côtés sont deux à deux identifiés qui contient au moins deux paires d'arrêtes de première espèce  $(a, a)$  et  $(b, b)$  qui se séparent. On montre par un processus de couper-coller qu'on peut se ramener à un polygone plein dont les côtés sont deux à deux identifiés représenté par un mot de la forme  $\dots aba^{-1}b^{-1}$  où les points  $\dots$  dénote la possible présence d'autres lettres.

On commence par tracer une ligne  $c$  entre les sommets des arrêtes  $a$  comme sur la figure ci-dessous. En coupant le long de cette ligne et recollant le long des arrêtes  $b$ , on obtient un nouveau polygone dont les côtés sont deux à deux identifiés.

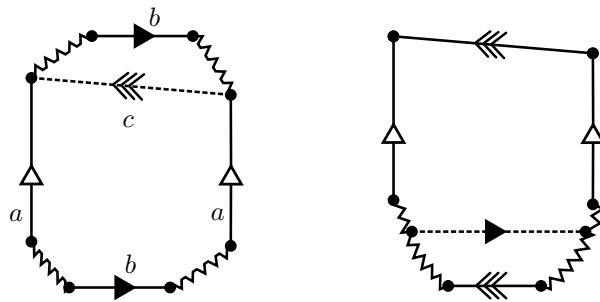


FIGURE 31 – Étape 5, a) du processus de couper-coller

Sur ce nouveau polygone, on trace une ligne  $d$  entre les sommets des arrêtes  $c$  comme indiqué sur la figure ci-dessous. En coupant le long de cette ligne et recollant le long des arrêtes  $a$ , on obtient un nouveau polygone dont les côtés sont deux à deux identifiés représenté par un mot de la forme  $\dots cdc^{-1}d^{-1}$ .

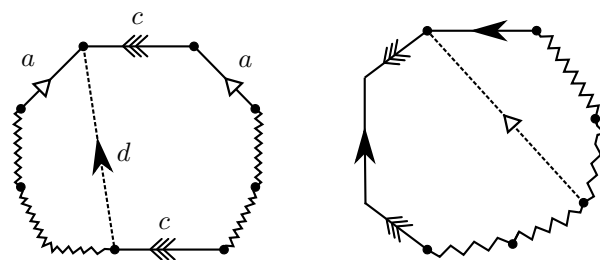


FIGURE 32 – Étape 5, b) du processus de couper-coller

Ce processus préserve le nombre de paires d'arrêtes adjacentes de seconde espèce, les doubles paires d'arrêtes adjacentes de première espèce qui se séparent et la nature des arrêtes (première ou seconde espèce). Ainsi, si à la fin de ce processus, il existe encore des paires d'arrêtes de première espèce qui se séparent et qui ne sont pas adjacentes, on réitère l'étape 5 et ce jusqu'à obtenir un

polygone dont les côtés sont deux à deux identifiés représenté par un mot, noté encore  $\sigma$  qui est une concaténation de mots de la forme  $aa$  et de la forme  $aba^{-1}b^{-1}$ .

Si  $\sigma$  est de la forme  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_rb_ra_r^{-1}b_r^{-1}$ ,  $r \geq 1$ , alors  $S$  est la somme connexe de plusieurs tores et la preuve se termine. On suppose pour la suite que  $\sigma$  contient au moins une paire d'arrêtes de seconde espèce.

L'argument final est une conséquence du lemme ci-dessous.

**Lemme 3.5.1.** *La somme connexe d'un tore et d'un plan projectif est homéomorphe à la somme connexe de trois plans projectifs. Autrement dit, le mot  $aba^{-1}b^{-1}cc$  est équivalent au mot  $ffegg$ .*

*Démonstration.* La proposition 1.5.11,2) montre que le mot  $aba^{-1}b^{-1}cc$  est équivalent au mot  $ffegg$  où  $A$  et  $B$  sont le mot vide dans la proposition ce qui donne le résultat.  $\square$

Si  $\sigma$  est une concaténation de  $m$  paires ( $m \geq 1$ )  $aa$  d'arrêtes adjacentes de seconde espèce, et de  $n$  quadruples ( $n \geq 1$ )  $bc b^{-1}c^{-1}$  issus de deux paires d'arrêtes de première espèce qui se séparent, alors en utilisant le lemme,  $\sigma$  est équivalent à la concaténation de  $m + 2n$  plans projectifs et ceci complète donc la preuve du théorème de classification 3.0.1.

**Remarque 3.5.2.** Soit  $n \geq 1$ .

1. La preuve donne un algorithme qui permet de simplifier tout mot de  $M_n$  sous l'une des trois formes  $aa^{-1}$ ,  $a_1\dots a_r$  ou  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_rb_ra_r^{-1}b_r^{-1}$ .
2. Si  $\sigma \in M_n$  est un mot définissant une surface  $\Sigma$  qui ne contient que des arrêtes de première espèce, on remarque que la surface définie par son mot simplifié après l'algorithme contient une paire d'arrête de première espèce.  $\Sigma$  est donc une sphère ou un recollement de tores.
3. Si  $\sigma \in M_n$  est un mot définissant une surface  $\Sigma$  qui contient au moins une arrête de seconde espèce, on remarque également que la surface définie par son mot simplifié possède une paire d'arrête de seconde espèce.  $\Sigma$  est donc un recollement de plans projectifs.

Le théorème 3.0.1 peut aussi s'énoncer en fonction de l'orientation des surfaces.

**Définition 3.5.3.** La somme connexe de deux plans projectifs est appelée la *bouteille de Klein*. C'est une surface compacte non-orientable.

**Théorème 3.5.4.** *Toute surface compacte orientable est homéomorphe à une sphère ou une somme connexe de tores. Toute surface compacte non-orientable est homéomorphe à la somme connexe d'un plan projectif ou d'une bouteille de Klein avec une surface compacte orientable.*

### 3.6 Caractéristique d'Euler d'une surface compacte

Le théorème 3.0.1 montre que toute surface compacte est homéomorphe à la sphère, la somme connexe de tores ou la somme connexe de plans projectifs. Cependant, il n'a pas été montré que ces ensembles sont topologiquement différents. Si la notion d'orientation nous permet d'affirmer que la somme connexe de plans projectifs n'est pas homéomorphe à la sphère ou la somme connexe de

tores, la somme connexe de  $n$  tores (resp. plans projectifs) pourrait être homéomorphe à la sphère ou la somme connexe de  $m$  tores (resp. la somme connexe de  $m$  plans projectifs) avec  $n \neq m$ . On va montrer que ceci n'est pas possible en introduisant un invariant topologique appelé la caractéristique d'Euler.

D'abord, on définit la caractéristique d'Euler d'une surface triangulée. Soit  $M$  une surface compacte munie d'une triangulation  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ . Soit

$s$  le nombre total de sommets de  $M$

$a$  le nombre total d'arrêtes de  $M$

$t$  le nombre total de triangles (ici  $t = n$ )

On pose alors

$$\chi(M) = s - a + t$$

où  $\chi(M)$  est appelé la *caractéristique d'Euler* de  $M$ . A priori  $\chi(M)$  dépend de la triangulation  $\mathcal{T}$  choisie. Il n'en est rien. Ceci sera supposé vrai. Essayons cependant d'en donner une justification. Pour cela, on ne se limite plus aux triangles et on s'autorise de recouvrir  $M$  par des polygones pleins arbitraires. Ces polygones peuvent avoir n'importe quel nombre  $n$  de côtés et sommets avec  $n \geq 1$  (pour le cas  $n = 1$ , on dira qu'un 1-gone est un cercle muni d'un point). On autorise également les arrêtes qui ne divisent pas une région comme dans l'exemple ci-dessous.

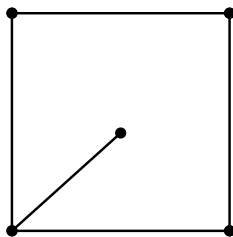


FIGURE 33 – Une arrête dans un carré plein qui ne divise pas de région

Enfin, on impose que le nombre de sommets, arrêtes et régions polygonales i.e. (intérieur des polygones) soit fini. Comme précédemment, on définit la caractéristique d'Euler d'une telle division d'une surface compacte  $M$  par  $\chi(M) = s - a + r$  où  $s$  est le nombre de sommets,  $a$  le nombre d'arrêtes et  $r$  le nombre de régions polygonales. On vérifie alors que la caractéristique d'Euler est invariante sous les opérations suivantes :

1. Diviser une arrête en ajoutant un sommet dans son intérieur (pas sur les extrémités i.e. le bord de l'arrête). Inversement, si deux arrêtes se rencontrent en un sommet donné, confondre les deux arrêtes en enlevant ce sommet.
2. Diviser un  $n$ -gone,  $n \geq 1$ , en connectant deux sommets par une nouvelle arrête. Inversement, confondre deux régions polygonales en une en enlevant une arrête.
3. Introduire un sommet et une arrête dans une région polygonale de telle sorte à ce que l'arrête ne divise pas la région, comme dans l'exemple ci-dessus. Inversement, éliminer un tel sommet et une telle arrête.

L'invariance de la caractéristique d'Euler serait démontrée si l'on peut passer d'une triangulation donnée à une autre par l'intermédiaire des trois opérations ci-dessus en un nombre fini d'étape. Supposons avoir deux triangulations d'une surface compacte  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$  et  $\mathcal{T}' = \{T'_1, \dots, T'_n\}$ . Si l'intersection de chaque arête de la triangulation  $\mathcal{T}$  avec n'importe quelle arête de la triangulation  $\mathcal{T}'$  est un nombre fini de points, on peut aisément se convaincre que l'on peut passer de la triangulation  $\mathcal{T}$  à la triangulation  $\mathcal{T}'$  comme voulu. En revanche, si une arête de  $\mathcal{T}$  intersecte une arête de  $\mathcal{T}'$  en un nombre infini de points, il semble impossible de passer de  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{T}'$  en un nombre fini d'opérations. L'idée est alors de "décaler" légèrement une des deux arêtes pour éviter ce genre d'intersection. Ceci peut être prouvé rigoureusement.

Il vient dès lors les propositions suivantes.

**Proposition 3.6.1.** *Soit  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces compactes. Les caractéristiques d'Euler  $\chi(S_1)$ ,  $\chi(S_2)$  et  $\chi(S_1 \# S_2)$  sont reliées par la formule suivante.*

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

*Démonstration.* Triangulons  $S_1$  et  $S_2$ . La somme connexe de ces deux surfaces peut être obtenue en enlevant l'intérieur d'un triangle (plein) sur chaque triangulation et en identifiant ensuite les sommets et arêtes du bord de ces triangles. La formule découle en comptant les sommets, arêtes et triangles avant et après la formation de la somme connexe.  $\square$

La caractéristique d'Euler de la sphère est égale à 2, celle du tore à 0 et du plan projectif à 1 en regardant une de leur triangulation. On obtient donc le tableau suivant par récurrence.

Surface	Caractéristique d'Euler
Sphère	2
Somme connexe de $n$ tores	$2 - 2n$
Somme connexe de $n$ plans projectifs	$2 - n$
Somme connexe d'un plan projectif et de $n$ tores	$1 - 2n$
Somme connexe d'une bouteille de Klein et de $n$ tores	$-2n$

Ainsi, la sphère, la somme connexe de  $n$  tores et la somme connexe de  $m$  plans projectifs sont trois surfaces qui ne sont pas homéomorphes. On remarque en particulier que toute surface orientable a une caractéristique d'Euler paire tandis que pour une surface non-orientable, sa caractéristique d'Euler peut être paire ou impaire. Ceci permet dénoncer le résultat suivant.

**Proposition 3.6.2.** *Soit  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces compactes. Alors  $S_1$  et  $S_2$  sont homéomorphes si et seulement si  $S_1$  et  $S_2$  ont à la fois la même caractéristique d'Euler et la même orientation.*

On termine cette sous-section par la définition du genre d'une surface compacte.

**Définition 3.6.3.** Soit  $S$  une surface compacte. Le genre  $g$  de  $S$  est le nombre défini par la formule suivante :

$$g = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(S)) & \text{si } S \text{ est orientable} \\ 2 - \chi(S) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, le genre est un invariant topologique.

La somme connexe de  $n$  tores est de genre  $n$  tandis que le genre de la sphère est de genre 0. Dit grossièrement, pour le cas orientable, le genre correspond au nombre de "trous" que la surface possède.

## 4 Annexe

### 4.1 Théorème de Jordan et oreilles de polygones

On montre ici une version du théorème de Jordan pour les polygones. On pourra se référer à [2].

**Théorème 4.1.1.** *Soit  $P$  un polygone. Alors  $P$  sépare le plan en deux composantes connexes ouvertes disjointes, l'une bornée qu'on appelle l'intérieur de  $P$  et l'autre non bornée appelée l'extérieur de  $P$ . De plus, elles ont la même frontière qui est exactement  $P$ .*

*Démonstration.* Choisissons une direction dans le plan  $\mathbb{R}^2$  qui ne soit parallèle à aucun côté de  $P$ . Ceci est possible puisque  $P$  possède un nombre fini de côtés. Pour fixer les idées, on peut supposer quitte à faire une rotation que cette direction est horizontale. Elle est caractérisée par le vecteur directeur  $v = (1, 0)$ .

Soit  $A$  (resp.  $B$ ) l'ensemble des points  $p$  de  $\mathbb{R}^2 - P$  tels que la demi-droite  $p + \mathbb{R}_+v$  intersecte un nombre pair de fois  $P$  (resp. un nombre impair de fois), l'intersection avec un sommet de  $P$  ne sera pas comptée si les côtés comportant le sommet sont du même côté de la demi-droite ; l'intersection comptera comme l'intersection d'un côté dans le cas contraire.

On dira que les points de  $A$  sont pairs et ceux de  $B$  impairs. Avoir la même parité forme une relation d'équivalence  $\sim$  sur  $A \cup B$ .

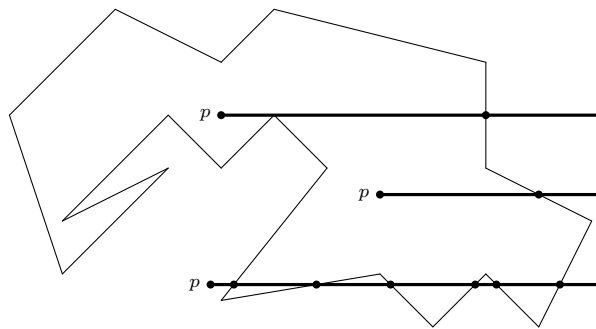


FIGURE 34 – Exemple

D'abord, on observe que les points sur un segment qui n'intersectent pas  $P$  ont la même parité. En effet, la parité d'un point bougeant sur ce segment ne peut changer que lorsque la demi-droite  $p + \mathbb{R}_+v$  intersecte un côté de  $P$  ou un sommet mais aucun des deux cas ne peut changer la parité par construction.



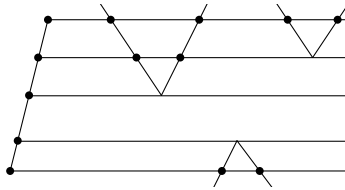


FIGURE 35 – Les points sur un segment n’intersectant pas  $P$  ont la même parité

**Définition 4.1.2.** Un *chemin polygonal* est une application  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  continue et affine par morceaux. On dit qu’un chemin polygonal  $\gamma$  rencontre un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  s’il existe  $t \in [0, 1]$  tel que  $\gamma(t) \in X$ .

En utilisant la transitivité de  $\sphericalangle$ , il s’en suit par récurrence que deux points reliés par un chemin polygonal qui ne rencontre pas  $P$  ont même parité. En particulier, un chemin polygonal qui relie un point  $p_1$  de  $A$  à un point de  $p_2$  de  $B$  rencontre  $P$ .

Montrons que tout point de  $A$  (resp.  $B$ ) peuvent être relié par un chemin polygonal ne rencontrant pas  $P$ . Prenons deux points  $p$  et  $q$  dans la même classe,  $A$  ou  $B$ . Si le segment  $[pq]$  n’intersecte pas  $P$ , le chemin polygonal correspondant à ce segment convient. Dans le cas contraire notons  $p'$  le premier point d’intersection avec  $[pq]$  et  $q'$  le dernier. On construit un chemin polygonal qui commence en  $p$ , suit le segment  $[pp']$  puis tourne juste avant  $p'$  et contourne  $P$  jusqu’à revenir sur le segment  $[pq]$  au niveau de  $q'$  en un point  $z$ . Lorsque l’on contourne un côté de  $P$ , on s’assure de rester suffisamment proche de lui afin de ne pas rencontrer d’autres côtés.

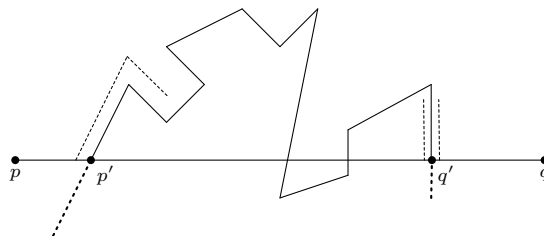


FIGURE 36 – Exemple

Si on prouve que  $z$  appartient au segment  $[q'q]$  et non au segment  $[pq']$ , alors en continuant le chemin vers  $q$  le long de  $[z'q]$  on obtient un chemin polygonal de  $p$  vers  $q$  qui n’intersecte pas  $P$ .

Il est clair que deux points  $r$  et  $s$  suffisamment proches et de part et d’autre d’un côté de  $P$  ont une parité différente puisque une des demi-droites  $r + \mathbb{R}_+v$  et  $s + \mathbb{R}_+v$  intersecte  $P$  une fois de plus que l’autre. Dès lors, si  $z$  est sur le segment  $[pq']$ , la parité change lorsque l’on croise le point  $q'$ . Ainsi,  $z$  est sur le segment  $[q'q]$  puisqu’il a la même parité que  $p$  et  $q$ .

Ainsi  $A$  et  $B$  sont connexes. Ces ensembles sont clairement ouverts. Comme  $P$  est borné, il est contenu dans une boule  $B$  de centre 0 et de rayon  $R > 0$ . On peut donc trouver un droite horizontale qui n’intersecte pas cette boule donc n’intersecte pas  $P$ . Elle droite est contenue dans  $A$  donc  $A$  est non borné. De plus, comme les points du complémentaire de  $B$  peuvent être reliés par un

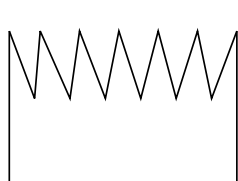
chemin polygonal, le complémentaire de  $B$  est inclus dans  $A$ . Il s'en suit que  $B$  est borné,  $A$  et  $B$  étant disjoints.

Ceci termine la preuve.  $A$  est la composante connexe qui correspond à l'extérieur de  $P$  et  $B$  celle qui correspond à l'intérieur.  $\square$

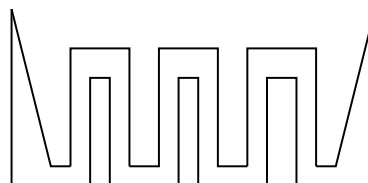
On va maintenant voir une propriété intéressante sur les polygones. On pourra se référer à [4].

- Définition 4.1.3.**
1. Soit  $P$  un polygone à  $n$  côtés ( $n \geq 3$ ) et  $v_1, \dots, v_n$  ses sommets distincts. On dit que deux sommets sont consécutifs s'ils sont sur un même côté de  $P$ . Si  $v_i$  et  $v_{i+1}$  sont consécutifs pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $v_{n+1} = v_1$ , on note  $P = v_1v_2\dots v_n$ .
  2. Trois sommets consécutifs  $v_1, v_2, v_3$  d'un polygone  $P = v_1v_2\dots v_n$  qui possède au moins 4 côtés ( $n \geq 4$ ) forme une *oreille*  $T = v_1v_2v_3$  au sommet  $v_2$  si l'intérieur du segment  $[v_2v_3]$  est inclus dans l'intérieur de  $P$ . L'oreille  $T$  est un triangle.
  3. On dira que deux oreilles d'un polygone avec au moins 4 côtés ne se chevauchent pas si leur intérieur est disjoint. Dans le cas contraire, on dit que les oreilles se *chevauchent*.

Notons que si un polygone  $P = v_1v_2\dots v_n$  possède une oreille  $T = v_1v_2v_3$  au sommet  $v_2$  alors "enlever" cette oreille donne un polygone  $P' = v_1v_3v_4\dots v_n$  avec un sommet de moins que  $P$ .



Un polygone avec pleins d'oreilles



Un polygone avec exactement deux oreilles

**Théorème 4.1.4.** *Tout polygone à au moins quatre côtés possède au minimum deux oreilles qui ne se chevauchent pas.*

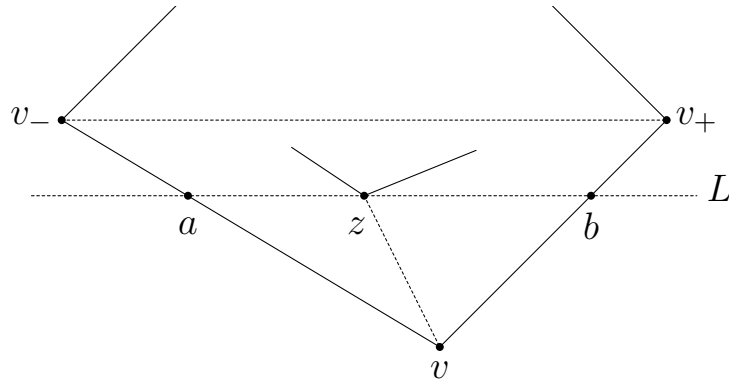
*Démonstration.* On démontre le théorème par récurrence sur le nombre  $n$  de côtés des polygones à au moins 4 côtés. Comme la preuve pour les polygones à quatre côtés et pour ceux à  $n > 4$  côtés peut être divisée en deux mêmes cas, on traitera le cas des polygones à 4 côtés au début de ces deux cas.

Soit  $P$  un polygone qui possède au moins 4 côtés. Prenons un sommet  $v$  de  $P$  dont l'angle intérieur est inférieur strictement à  $\pi$ . Soit  $v_-$  et  $v_+$  les deux sommets adjacents de  $v$ .

1. Supposons d'abord que  $P$  ait une oreille en  $v$ . Si on "enlève" cette oreille alors le polygone  $P'$  obtenu est soit un triangle (qui forme alors une deuxième oreille pour  $P$  ne se chevauchant pas avec l'oreille formée en  $v$ ) soit un polygone avec au moins 4 côtés et l'hypothèse de récurrence implique l'existence de deux oreilles de  $P'$ ,  $E_1$  et  $E_2$ , qui ne se chevauchent pas. En particulier, une des deux, disons  $E_1$ , n'est ni une oreille en  $v_-$  ni une oreille en  $v_+$ . Comme toutes les oreilles de  $P'$  (exceptées les oreilles

en  $v_-$  et en  $v_+$ ) sont des oreilles de  $P$ , les oreilles  $E_1$  et  $T = v_-vv_+$  sont deux oreilles de  $P$  qui ne se chevauchent pas.

2. Supposons maintenant que  $P$  n'est pas une oreille en  $v$ . Alors le triangle  $T = v_-vv_+$  doit contenir dans son intérieur ou sur l'intérieur de son côté  $[v_-v_+]$  au moins un sommet de  $P$ . Soit  $z$  un tel sommet avec la propriété supplémentaire que la droite  $L$  parallèle à  $[v_-v_+]$  passant par  $z$  soit la plus proche possible (pour la distance euclidienne) de  $v$ . Il est clair qu'un tel  $z$  existe. On note  $a$  (resp.  $b$ ) l'intersection de  $L$  et de  $[vv_-]$  (resp. de  $L$  et de  $[vv_+]$ ).



L'intérieur du triangle  $vab$  ne peut pas contenir un sommet (ou côté) de  $P$  par choix de  $z$ . Ainsi l'intérieur du segment  $[vz]$  est entièrement contenu dans l'intérieur de ce triangle donc dans l'intérieur de  $P$ . Ce segment divise  $P$  en deux polygones  $P_- = vz...v_-$  et  $P_+ = vv_+...zv$  qui possèdent moins de côtés que  $P$  ( $P_+$  ne contient pas  $v_-$  et  $P_-$  ne contient pas  $v_+$ ).

Si  $P$  a exactement 4 côtés, alors  $vv_-z$  et  $vv_+z$  sont deux oreilles de  $P$  qui ne se chevauchent pas. Dans le cas contraire, si  $P$  a au moins 5 côtés, alors au moins un des deux polygones, disons  $P_+$  n'est pas un triangle.

- Supposons que  $P_-$  soit un triangle. Alors  $vv_-z$  est une oreille de  $P$  et le polygone  $P_+$  possède par hypothèse de récurrence deux oreilles,  $E_1$  et  $E_2$ , qui ne se chevauchent pas et au moins une, disons  $E_1$ , qui n'est ni une oreille en  $v$  ni une oreille en  $z$ . L'oreille  $E_1$  de  $P_+$  est aussi une oreille de  $P$  qui ne se chevauche clairement pas avec l'oreille  $vv_-z$ .
- Supposons que  $P_-$  ne soit pas un triangle. L'hypothèse de récurrence implique l'existence de deux oreilles de  $P_+$ ,  $E_1^+$  et  $E_2^+$ , qui ne se chevauchent pas et deux oreilles de  $P_-$ ,  $E_1^-$  et  $E_2^-$ , qui ne se chevauchent pas. Au moins une des oreilles de la paire  $(E_1^-, E_2^-)$ , disons  $E_1^-$ , n'est ni une oreille en  $v$  ni une oreille en  $z$  et de même, au moins une des oreilles de la paire  $(E_1^+, E_2^+)$ , disons  $E_1^+$ , n'est pas une oreille en ces sommets. Ainsi,  $E_1^-$  et  $E_1^+$  sont deux oreilles de  $P$  qui ne se chevauchent pas.

Ceci termine la preuve. □

## 4.2 Orientation

Pour donner une preuve des propositions non démontrées dans la sous-section 2.3, on introduit la notion de surface à bords.

- Définition 4.2.1.**
1. Une *variété topologique à bords* de dimension  $n \geq 1$  est un espace topologique  $X$  séparé tel que pour chaque point  $x$  de  $X$ , il existe un ouvert contenant  $x$  homéomorphe au disque ouvert  $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$  de  $\mathbb{R}^n$  ou au demi-disque ouvert  $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1, x_n \geq 0\}$  de  $\mathbb{R}^n$  avec  $x$  sur son bord. On impose de plus qu'il existe au moins un point de  $X$  qui possède un voisinage homéomorphe au demi-disque avec ce point sur son bord.
  2. L'ensemble des points qui ont un voisinage homéomorphe au disque ouvert est appelé l'*intérieur* de la variété tandis que l'ensemble des points  $x$  qui possède un voisinage homéomorphe au demi-disque ouvert avec  $x$  sur son bord est appelé le *bord* de la variété.
  3. Une *surface à bords* est une variété topologique à bords de dimension deux, connexe et à base dénombrable de voisinages.
  4. Une surface à bords  $S$  est dite *non-orientable* si et seulement si elle contient un sous-ensemble homéomorphe au ruban de Möbius. Dans le cas contraire,  $S$  est dite *orientable*.

La définition de triangulation d'une surface compacte à bords est identique à celle pour les surfaces - cf 2.5.1. Notons cependant que dans le cas d'une surface compacte, chaque arête d'un triangle est exactement l'arête de deux triangles tandis que dans le cas d'une surface compacte à bords, certaines arêtes peuvent être l'arête d'exactly un triangle. Une telle arête est contenue dans le bord de la surface. On admettra que toute surface compacte à bords admet une triangulation.

**Théorème 4.2.2.** *Toute surface compacte à bords admet une triangulation.*

Ceci permet d'obtenir une preuve des propositions suivantes.

**Proposition 4.2.3.** *Soit  $S$  une surface compacte. Si  $S$  est non-orientable alors il existe un  $2n$ -gone plein d'arêtes identifiées par paire homéomorphe à  $S$  qui possède une paire d'arête de seconde espèce.*

*Démonstration.* On appelle l'espace quotient  $[0, 1] \times [0, 1] / \sim$  *ruban de Möbius avec bord* où  $\sim$  est la relation d'équivalence sur  $[0, 1] \times [0, 1]$  qui recolle les côtés  $\{0\} \times [0, 1]$  et  $\{1\} \times [0, 1]$  de la façon suivante : si  $t \in [0, 1]$ , alors  $(0, t) \sim (1, 1-t)$ . C'est une surface à bords.

$S$  étant non-orientable, elle contient par définition un sous-ensemble  $M$  homéomorphe à un ruban de Möbius et on peut supposer que ce ruban est avec bord - un ruban de Möbius contenant un ruban de Möbius avec bord.

$S - \text{Int}(M)$  et  $M$  sont des surfaces à bords donc elles admettent une triangulation. On va recoller ces deux surfaces par un homéomorphisme  $h : \partial M \rightarrow \partial(S - \text{Int}(M))$ . Ce recollement est exactement  $S$ . On modifie leur triangulation comme suit pour obtenir après recollement une triangulation de  $S$  particulière. Si certains sommets de  $\partial M$  (resp.  $\partial(S - \text{Int}(M))$ ) ne sont pas identifiés à des sommets de  $\partial(S - \text{Int}(M))$  (resp.  $\partial M$ ) alors on les ajoute. Une subdivision des

triangles comme illustré ci-dessous permet d'obtenir une triangulation de nos deux surfaces avec ces sommets là.

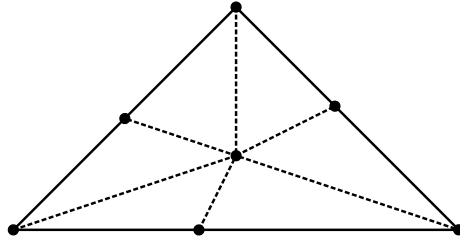


FIGURE 37 – Subdivision d'un triangle

Dès lors, chaque arête sur le bord d'une surface est identifiée à une arête sur le bord de l'autre. De plus, si  $R$  est un ruban de Möbius avec bord représenté dans le plan, la triangulation de  $M$  donne une triangulation de  $R$  avec les mêmes propriétés. Il suffit alors de recoller un  $2n$ -gone plein d'arêtes identifiées par paire homéomorphe à  $\partial(S - \text{Int}(M))$  qui a été obtenu via la triangulation avec celui de  $R$  pour obtenir un  $2n$ -gone plein d'arêtes identifiées par paire homéomorphe à  $S$  qui contient une paire de seconde espèce.  $\square$

**Proposition 4.2.4.** *La sphère  $\mathbb{S}^2$  est orientable.*

*Démonstration.* On utilise la proposition précédente. Supposons par l'absurde que la sphère soit non-orientable. Soit  $\Sigma$  un  $2n$ -gone plein d'arêtes identifiées par paire qui lui est homéomorphe et qui contient une paire de seconde espèce. La remarque 3.5.2 permet d'affirmer que  $\Sigma$  est homéomorphe à la somme connexe de  $m$  plans projectifs,  $m \geq 1$ . Sa caractéristique d'Euler est donc à la fois égale à 2 et à  $2 - m$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

**Proposition 4.2.5.** *Soit  $\Sigma$  un  $2n$ -gone plein d'arêtes identifiées par paire. Si  $\Sigma$  est non-orientable alors  $\Sigma$  contient une paire de seconde espèce.*

*Justification.* Soit  $P$  le polygone plein associé à  $\Sigma$  et  $\pi : P \rightarrow \Sigma$  l'identification des côtés. Supposons  $\Sigma$  non-orientable.  $\Sigma$  contient alors par définition un sous-ensemble  $M$  homéomorphe au ruban de Möbius  $R$ . On peut de plus supposer que  $R$  est avec bord ;  $R$  est donc compact. On représentera  $\Sigma$  par un disque dont les arcs de cercle sont identifiés deux à deux.

D'abord,  $M$  ne peut pas être dans l'intérieur du polygone i.e. dans  $\pi(\text{Int}(P))$  sinon  $M$  serait inclus dans un disque puis par projection stéréographique, la sphère  $\mathbb{S}^2$  contiendrait un sous-ensemble homéomorphe à un ruban de Möbius, ce qui est contradictoire avec son orientation. Ainsi,  $M$  intersecte l'ensemble des côtés  $\pi(\partial P)$  du polygone. Pour se donner une idée de comment est représentée  $M$  sur  $\Sigma$ , on parcourt  $\partial M$ .

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial M$  un lacet continu surjectif sur  $\partial M$  et injectif sur  $]0, 1[$ . On dira que  $\gamma$  sort du bord  $\pi(\partial P)$  du polygone en  $t \in ]0, 1[$  si  $\gamma(t) \in \pi(\partial P)$  et s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $t + \epsilon \in ]0, 1[$  et  $\gamma(]t, t + \epsilon]) \cap \pi(\partial P) = \emptyset$ . Similairement, on dira que  $\gamma$  entre sur le bord  $\pi(\partial P)$  du polygone en  $t \in ]0, 1[$  si  $\gamma(t) \in \pi(\partial P)$  et s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $t - \epsilon \in ]0, 1[$  et  $\gamma(]t - \epsilon, t]) \cap \pi(\partial P) = \emptyset$ .

Pour chaque fois que  $\gamma$  entre ou sort du bord  $\pi(\partial P)$  du polygone en  $t$ , si  $\gamma(t)$  n'est pas un sommet, on le rajoute, ce qui subdivise une arête et son identification en deux. L'ensemble obtenu est toujours homéomorphe à  $\Sigma$  et on gardera pas abus les mêmes notations pour  $P$  et  $\Sigma$  modifiés.

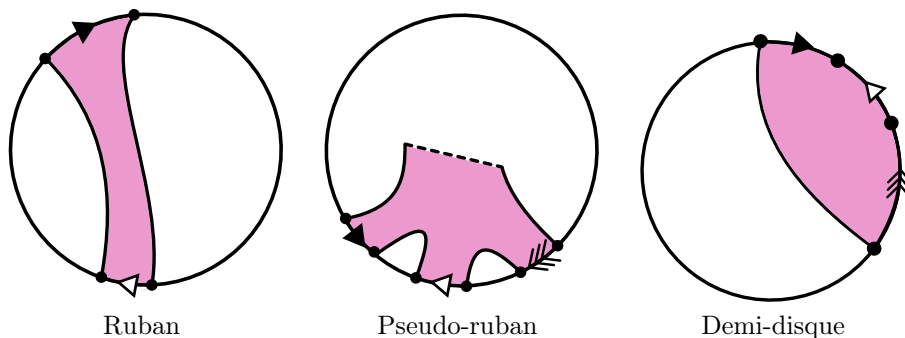
Pour chaque sommet rajouté, on peut lui associer un unique rationnel (pris dans l'intervalle  $]t, t + \epsilon[$  ou  $]t - \epsilon, t[$  de la définition). On a donc au total un nombre au plus dénombrable de sommets. On se limite au cas où ce nombre est fini pour la suite. Le cas infini ne peut être traité de la même manière. Ceci montre les limites de la justification.

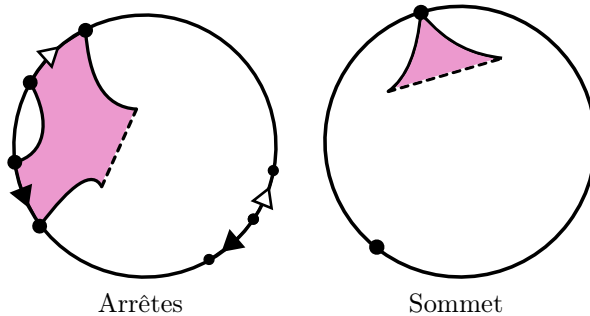
En parcourant  $\partial M$ , ou bien  $\gamma$  sort d'une arête et entre (ou inversement) dans une autre arête identifiée ou non à la première, ou bien  $\gamma$  longe le bord  $\pi(\partial P)$  du polygone. Dans le premier cas, il se peut que  $\gamma$  entre et sorte au même instant  $t$ . Ainsi,  $\pi^{-1}(M)$  a exactement des composantes connexes de la forme :

- d'un ruban dont deux bords opposés sont sur  $\partial P$  et les deux autres dans  $Int(P)$  (hormis les extrémités)
- d'un "pseudo-ruban". On peut le voir comme un ruban qui "saute" certaines arêtes formant un "pont" entre celles-ci - cf illustration en dessous.
- d'un demi-disque dont le "diamètre" est dans  $\partial P$
- d'un ensemble connexe inclus dans  $\partial P$ . Ce sont les arcs de cercles dans le cas où  $P$  est représenté sous forme d'un disque.
- d'un point dans  $\partial P$ . Ce sont des sommets.

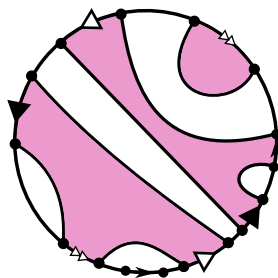
Une fois l'identification des côtés de  $P$  effectuée, les parties de ces ensembles incluses dans  $\partial P$  peuvent être une ou plusieurs arêtes. De plus, ces arêtes sont identifiées par paires. Le nombre de composantes connexes est également fini.

Voici ci-dessous comment sont représentées les différentes composantes connexes dans  $\Sigma$ . Ici le ruban de Möbius en rose n'est pas en entier.





**Exemple 4.2.6.** Concrètement, un ruban de Möbius dans  $\Sigma$  peut avoir cette forme là :



Un ruban de Möbius dans  $\Sigma$

L'idée est de transformer notre surface  $\Sigma$  en une surface  $\Sigma'$  homéomorphe à  $\Sigma$  par un processus que préserve l'espèce des arrêtes de telle sorte à n'avoir que des rubans, des pseudo-rubans et des demi-disques. On sait de plus qu'une fois identifiés entre eux, ces rubans et demi-disques forment un ruban de Möbius (à homéomorphisme près) et cela nous permettra de conclure que  $\Sigma'$  et donc  $\Sigma$  possèdent une paire d'arrêtes de seconde espèce. On suppose par l'absurde que  $\Sigma$  ne contient que des arrêtes de première espèce.

Voici dans l'ordre les étapes qui nous permettront d'obtenir  $\Sigma'$ . Il s'agit essentiellement de procéder par pseudo-dilatation et processus de couper-coller.

1. On commence par se débarasser des arcs de cercle en se ramenant au cas où les ensembles sont des sommets. Une fois identifiés, les arcs de cercle comprennent une ou plusieurs arrêtes.  
On procède comme indiqué sur la figure ci-dessous. Dans la figure, notre ensemble est constitué de deux arrêtes. Dit grossièrement, il s'agit de pousser le ruban  $M$ . On commence par le faire pour une arrête puis on fait de même pour la deuxième.

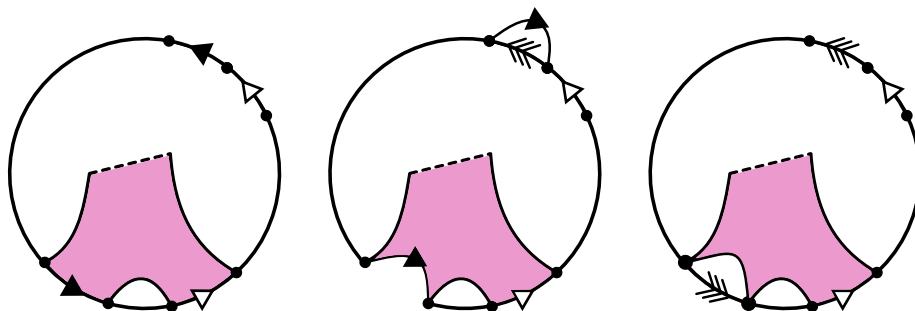


FIGURE 38 – Elimination des arcs de cercles

2. On se débarrasse ensuite des sommets.

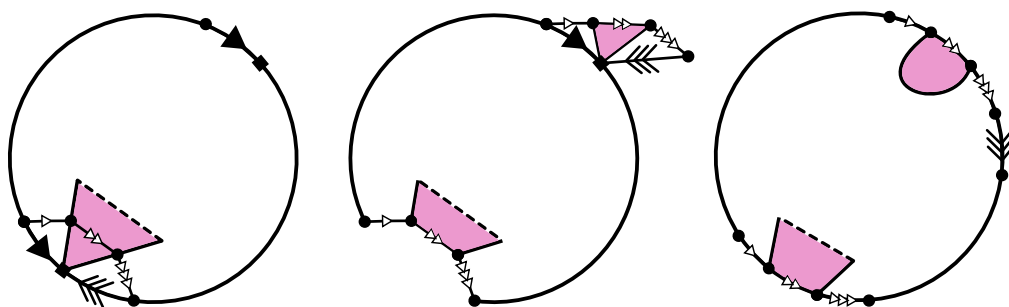


FIGURE 39 – Elimination des sommets

On peut donc se ramener au cas où les composantes connexes de  $\pi^{-1}(M)$  ne soient que sous forme de ruban, pseudo-ruban ou de demi-disque. Quitte à subdiviser certaines arêtes, on suppose qu'une fois identifiés, les demi-disques et rubans contiennent au moins trois arêtes sur chaque côté identifié.

On longe de nouveau le bord de  $M$ . Ceci consiste à longer les bords des rubans et demi-disques (une fois identifiés). On prend un petit voisinage fermé autour du bord de telle sorte à ce que, lorsqu'on traverse un côté identifié  $e$  d'un ruban, pseudo-ruban ou demi-disque, ce voisinage ne contienne qu'une arête de  $e$ . Ce voisinage  $M'$  est homéomorphe à un ruban de Möbius avec bord. La représentation de  $M'$  dans  $\Sigma$  est composée de rubans dont deux côtés opposés sont des arêtes (et cette fois ces côtés ont exactement une arête chacun) et les deux autres côtés des bords. De plus, chaque arête des rubans est identifiée à une arête d'un autre ruban.

Notons ces rubans  $R_1, \dots, R_n$  de telle sorte à ce que  $R_i$  et  $R_{i+1}$  possèdent en commun une arête  $e_i$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et à ce que  $R_1$  et  $R_n$  possèdent une arête  $e_n$  en commun. Ceci se montre par récurrence sur  $n$ . Le cas  $n = 1$  est clair. Supposons qu'on a réussi à prendre  $i$  rubans  $R_1, \dots, R_i$  qui vérifie la propriété, avec  $i < n$ . Si on ne peut pas prendre un ruban autre que  $R_1, \dots, R_i$  qui possède un côté commun avec  $R_1$  ou  $R_i$  alors  $R_1$  et  $R_i$  ont un côté commun et ceci contredit la connexité de  $M'$ .



On recolle alors de proche en proche ces rubans. D'abord,  $R_1$  et  $R_2$  le long de  $e_1$ , ce qui forme un nouveau ruban contenant  $e_2$ , puis ce ruban avec  $R_3$  le long de  $e_2$ , ce qui forme un nouveau ruban contenant  $e_3$ , etc. On obtient donc après avoir recollé  $R_n$  un ruban avec des arrêtes opposées  $e_1$  et  $e_n$ . Par l'absurde, on a supposé que les arrêtes de  $\Sigma$  sont de première espèce donc les arrêtes du ruban obtenu sont également "de première espèce". Ce ruban est donc un cylindre. Or, un cylindre n'est pas homéomorphe au ruban de Möbius car le bord du cylindre possède deux composantes connexes mais celui du ruban de Möbius qu'une seule. Ceci est donc une contradiction.

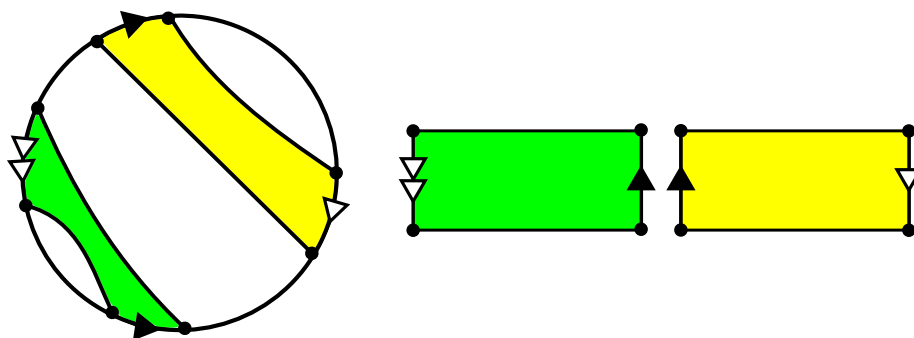


FIGURE 40 – Le recollement des rubans ne change pas l'orientation des arrêtes i.e. le sens de leur flèche

□

## Références

- [1] Yves Félix and Daniel Tanré. *Topologie algébrique : cours et exercices corrigés*. Dunod, 2010.
- [2] Robbins Herbert and Courant Richard. *What is Mathematics ? : an elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press, USA, 1996.
- [3] William S. Massey. *Algebraic topology : an introduction*, volume 56. Springer, 1967.
- [4] Gary H Meisters. Polygons have ears. *The American Mathematical Monthly*, 82(6) :648–651, 1975.