TER Autour du théorème de la représentation conforme de Riemann

Jonathan Jenvrin
Encadrante: Agnès Coquio

2021

Table des matières

1 Introduction

Le théorème de la représentation conforme de Riemann est un résultat remarquable qui fut énoncé par Riemann dans sa thèse en 1851.
Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat, une utilisant par exemple la notion de famille normale, idée provenant de Montel.
Cependant ce n'est pas l'idée de la preuve émanant directement de l'auteur du théorème i.e Bernhard Riemann, preuve qui à l'époque semblait extrêmement difficile, voir impossible à écrire en détail.
Elle était aussi incomplète car Riemann a utilisé le principe de Dirichlet sans le justifier car à l'époque il était admis comme vrai puisqu'il semblait évident alors que plus tard cela s'est révélé ne pas être trivial et même faux dans certains cas. On verra comment justifier cette étape avec la méthode de Perron.
La première preuve rigoureuse, donnée par William Fogg Osgood en 1900, utilise le principe de Dirichlet et consiste à construire une fonction harmonique sur un ouvert, de valeur donnée sur le bord de l'ouvert.
Le but de ce TER est de comprendre et de donner une preuve rigoureuse du théorème de la représentation conforme de Riemann en utilisant la méthode de Riemann.
Le corps de la démonstration est toute aussi intéressante voir plus que le résultat lui-même.

“Dans un voyage ce n'est pas la destination qui compte mais toujours le chemin parcouru, et les détours surtout."

Citation de Philippe Pollet-Villard

2 Rappels sur les fonctions holomorphes

Soient U et V des ouverts de $\mathbb{C}$.
On rappelle les propriétés suivantes liées aux fonctions holomorphes :

Proposition 2.1 (Équations de Cauchy-Riemann). *Soit $f := (f_1, f_2)$ définie au voisinage d'un point z_0 de $\mathbb{C}$: $z_0 = x_0 + iy_0$. Alors f est $\mathbb{C}$-dérivable (holomorphe) en z_0 si et seulement si f est $\mathbb{R}^2$-différentiable en (x_0, y_0) et $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, y_0) + i\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, y_0) = 0$, égalité qu'on peut traduire par :*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0, y_0) \text{ et } \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0, y_0)$$

Théorème 2.1 (Intégrales dépendant d'un paramètre). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ on pose , $F(z) := \int_I f(z,t)dt$ où f est une fonction à deux variables définie sur $U \times I$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $f(z, .)$ est intégrable pour tous z dans U*
On suppose de plus que pour tous t dans I $f(., t)$ est holomorphe sur U et pour tout K compact dans U il existe g_K telle que :

- $\forall z \in K, \forall t \in I, |f(z,t)| \leq g_K(t)$
- *g_K est intégrable sur I*

Alors F est holomorphe sur U (et on obtient sa dérivée avec la règle de Leibniz).

Proposition 2.2 (Principe des zéros isolés). *On suppose que U est un ouvert connexe. Soit f une fonction holomorphe sur U non identiquement nulle. Alors les zéros de f, $Z_f := \{z \in U, f(z) = 0\}$, est un ensemble discret et fermé dans U.*

Proposition 2.3 (Principe du maximum). *On suppose que U est un ouvert connexe. Soit f une fonction holomorphe sur U. Si $|f|$ admet un maximum local dans U, alors f est constante sur U.*

Proposition 2.4 (Formule de Cauchy pour les disques). *Soit f holomorphe sur U alors :*

$$\forall \overline{B(u,r)} \subset U, \forall z \in B(u,r), f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{u,r}} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

où $\gamma_{u,r} : \begin{array}{c} [0,2\pi] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto u + re^{it} \end{array}$

Proposition 2.5. *Soit f une fonction continue sur U. Alors f admet une primitive si et seulement si, pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux dans U : $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

Proposition 2.6. *Si f est une fonction holomorphe et injective sur U alors f' ne s'annule pas.*

Proposition 2.7 (Théorème de Liouville). *Si f est une fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$ en entier) et bornée alors f est constante.*

Théorème 2.2 (Théorème de Cauchy global). *Soit f holomorphe sur U et γ un lacet dans U tel que :*
$\forall z \in \mathbb{C} - U, Ind_\gamma(z) = 0$ *alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

($Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw$ pour z qui n'est pas dans l'image de γ)

Théorème 2.3 (Théorème de l'indice)**.** *On suppose que U est un ouvert simplement connexe.*
Soit g holomorphe sur U et f méromorphe sur U.
On suppose que f admet un nombre fini de zéros dans U, comptés avec leur multiplicité et notée $(z_k)_{1\leq k\leq m}$ et un nombre fini de pôles dans U, comptés avec leur multiplicité et notée $(w_k)_{1\leq k\leq n}$.
Soit γ un lacet C^1 par morceaux dans U, évitant les zéros et pôles de f. Alors :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{k=1}^{m} g(z_k)Ind_\gamma(z_k) - \sum_{k=1}^{n} g(z_k)Ind_\gamma(w_k)$$

3 Les prémices de la démonstration du théorème par la méthode de Riemann (1851)

3.1 Ouvert simplement connexe

Il existe plusieurs définitions qui sont équivalentes pour la simple connexité d'un ouvert de $\mathbb{C}$.
Dans ce TER nous allons utiliser celle qu'on utilise aussi pour définir les ouverts holomorphiquement simplement connexe de $\mathbb{C}$.

Définition 3.1 (Ouvert simplement connexe)**.** *Un ouvert U de $\mathbb{C}$ est dit simplement connexe si il est connexe et si toute fonction holomorphe sur U admet une primitive c'est-à-dire :*

$$\forall f \in H(U), \exists F \in H(U), F' = f$$

Remarque 3.1.

— *Un ouvert étoilé (convexe par exemple) est simplement connexe.*

— *Par la proposition 2.5 on a directement que un ouvert est simplement connexe si et seulement si U est connexe et, pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux dans U et toute fonction holomorphe f sur U : $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

— *Visuellement un ouvert de $\mathbb{C}$ est simplement connexe s'il est constitué d'une seule composante qui n'a aucun trou. Ce qui peut amener à une autre définition qui est que un ouvert est simplement connexe si et seulement si il est connexe et les composantes connexes de son complémentaire sont toutes non bornées (un trou étant vu comme une composante connexe bornée).*

— *La définition ci-dessus implique plus ou moins directement la notre. En effet , on sait que Ind_γ est nulle sur les composantes connexes non bornées, or pour la définition ci-dessus on sait que les composantes connexes du complémentaire de U sont non bornées et donc Ind_γ est nulle sur le complémentaire, on en déduit donc le résultat avec le théorème de Cauchy global (théorème 2.2) et la proposition 2.5.*

— *Une autre définition de simple connexité qu'on rencontre souvent dans la littérature car valable dans n'importe quel espace (la notre n'étant valable que dans $\mathbb{C}$) mais qu'on n'utilisera pas ici est : U est connexe et tout lacet continue d'image incluse dans U est homotope à un point, c'est-à-dire : pour tout lacet $\gamma : [0,1] \to U$ continue il existe a dans U et $F : [0,1]^2 \to U$ continue tels que :*

$$F(0,.) = \gamma, F(1,.) = a \textit{ et } \forall t \in [0,1], F(t,0) = F(t,1)$$

3.2 Le théorème de la représentation conforme de Riemann

Définition 3.2 (biholomorphisme)**.** *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : U \to V$ est biholomorphe de U vers V si elle est bijective et holomophe. Dans ce cas on dit que U est biholomorphe à V.*

Remarque 3.2.

— *Par la proposition 2.6 et le théorème d'inversion locale, la réciproque d'une fonction biholomorphe est automatiquement holomorphe et donc aussi biholomorphe.*

— *La composée de deux fonctions biholomorphes (à condition que la composition ait un sens) est aussi biholomorphe.*

Théorème 3.1.

Théorème de la représentation conforme de Riemann :
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ différent de $\mathbb{C}$ simplement connexe.
Alors U est biholomorphe au disque unité $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Remarque 3.3.

- $\mathbb{C}$ *ne peut être biholomorphe à* $\mathbb{D}$ *car si* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ *est holomorphe alors par le théorème de Liouville (théorème 2.7) elle est constante.*
- $\mathbb{C}^*$ *qui n'est pas simplement connexe* ($z \mapsto \frac{1}{z}$ *n'a pas de primitive sur* $\mathbb{C}^*$ *par exemple) n'est pas biholomorphe à* $\mathbb{D}$. *En effet si* $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{D}$ *est holomorphe alors elle est bornée, donc* f *admet une singularité apparente en 0 et se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *entier qui sera alors constante sur* $\mathbb{C}$ *comme vu précédemment, et donc* f *aussi par la suite.*

La première étape de la démonstration du théorème est de montrer qu'on peut supposer que U est borné à l'aide des deux lemmes qui suivent.

Lemme 3.1. *Soit* U *un ouvert simplement connexe de* $\mathbb{C}$ *différent de* $\mathbb{C}$. *Alors* U *est biholomorphe à un ouvert borné de* $\mathbb{C}$

Preuve 3.1. *Soit* a *dans* $\mathbb{C} - U$ *alors* $f : \begin{array}{c} U \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z - a \end{array}$ *est biholomorphe de* U *dans son image et ne s'annule jamais donc on peut supposer par translation que 0 n'est pas* U.
$z \mapsto \frac{1}{z}$ *est alors holomorphe sur* U. *Comme* U *est simplement connexe il existe* L *dans* $H(U)$ *tel que :*
$\forall z \in U, L'(z) = \frac{1}{z}$.
Posons alors, $g : z \mapsto ze^{-L(z)}$, $\forall z \in U, g'(z) = 0$ *donc* g *est constante car* U *est connexe et non nulle car 0 n'est pas dans* U *et exp ne s'annule jamais.*
Par surjectivité de exp sur $\mathbb{C}^*$ *il existe* w_0 *tel que* g *vaut* $\exp(w_0)$, *alors quitte à translater* L *par* w_0 *on peut supposer que :* $\forall z \in U, z = \exp(L(z))$.

On a $\Phi : z \mapsto \exp(L(z)/2)$ *qui est biholomophe de* U *dans son image.*
En effet, soient z_1 *et* z_2 *dans* U *tels que* $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$ *alors* $\Phi(z_1)^2 = \Phi(z_2)^2$, *or* $\Phi(z_1)^2 = \exp(z_1) = z_1$ *donc* $z_1 = z_2$. *Ainsi* Φ *est injective donc biholomorphe sur son image.* $\Phi(U)$ *est ouvert car* Φ *est biholomorphe donc on peut prendre un disque ouvert* $D(u, r) \subset \Phi(U)$. *On remarque que* $D(-u, r) \cap \Phi(U) = \emptyset$.
En effet soit w *dans* $D(-u, r)$, *alors* $-w \in D(u, r) \subset \Phi(U)$ *donc il existe* z_1 *tel que* $-w = \Phi(z_1)$, *si* w *est aussi dans* $\Phi(U)$ *alors il existe* z_2 *tel que* $w = \Phi(z_2)$. *Alors* $\Phi(z_1)^2 = \Phi(z_2)^2$ *et donc* $z_1 = z_2$ *par suite* $w = -w$ *et* $w = 0$ *ce qui est impossible car 0 n'est pas* U. *On a finalement* $\Psi : z \mapsto \frac{1}{\Phi(z)+u}$ *qui est un biholomorphisme de* U *dans son image qui est bornée par* $\frac{1}{r}$. $\square$

On a montré qu'on peut envoyer de manière biholomorphe U sur un ouvert borné. Il reste à montrer que le caractère simplement connexe est préservé par transformation biholomorphe.

Lemme 3.2. *Soient* U *et* V *deux ouverts de* $\mathbb{C}$. *Si* U *est simplement connexe et biholomorphe à* V *alors* V *est aussi simplement connexe.*

Preuve 3.2. *On remarque d'abord que* V *est bien connexe en tant que image d'un connexe par une fonction continue.*
Soit $f : U \to V$ *biholomorphe,* $\gamma : [a, b] \to V$ *un lacet* C^1 *par morceaux et* g *une fonction holomorphe sur* V. *On considère le lacet* $f^{-1} \circ \gamma : [a, b] \to U$ *et l'application* $\frac{g \circ f}{(f^{-1})' \circ f}$ *qui est bien définie et holomorphe sur* U *car* f^{-1} *est injective et donc* $(f^{-1})'$ *ne s'annule pas par la proposition 2.6. On a alors* $\int_{f^{-1} \circ \gamma} \frac{g \circ f}{(f^{-1})' \circ f}(z)dz = 0$ *par la*

proposition 2.5. Or :

$$\begin{aligned}\int_{f^{-1}\circ\gamma}\frac{g\circ f}{(f^{-1})'\circ f}(z)dz &= \int_a^b \frac{g\circ f\circ f^{-1}\circ\gamma}{(f^{-1})'\circ f\circ f^{-1}\circ\gamma}\times\gamma'\times(f^{-1})'\circ\gamma(z)dz\\ &= \int_a^b \frac{g\circ\gamma}{(f^{-1})'\circ\gamma}\times\gamma'\times(f^{-1})'\circ\gamma(z)dz\\ &= \int_a^b g\circ\gamma\times\gamma'(z)dz\\ &= \int_\gamma g(z)dz\end{aligned}$$

Ainsi pour n'importe quelle fonction holomorphe g sur V et n'importe quel lacet γ de classe C^1 par morceaux dont l'image est incluse dans V, l'intégrale sur g suivant le lacet γ est nulle donc V est biholomorphe par la proposition 2.5. $\square$

On peut donc dès à présent supposer que U est borné pour la démonstration du théorème de la représentation conforme de Riemann.

Remarque 3.4.

— *Le lemme ci-dessus ainsi que l'énoncé du théorème nous donne une classification simple des ouverts simplement connexe de $\mathbb{C}$ via la notion de biholomorphisme. En effet, un tel ouvert U est soit égal à $\mathbb{C}$ soit biholomorphe au disque unité et réciproquement un ouvert biholomorphe à $\mathbb{D}$ est simplement connexe car $\mathbb{D}$ l'est ($\mathbb{D}$ est même convexe).*

3.3 Le point essentiel de la méthode de Riemann

Soit a un point de U, quitte à considérer $f: \begin{array}{c}U\to\mathbb{C}\\ z\mapsto z-a\end{array}$ qui est biholomorphe, on peut supposer par le lemme 3.2 que 0 est un point de U.
L'idée est qu'on peut chercher une fonction $f: U\to\mathbb{D}$ biholomorphe tel que $f(0)=0$. En effet car si il existe $g: U\to\mathbb{D}$ biholomorphe alors $f := \phi_{g(0)}\circ g : U\to\mathbb{D}$ est biholomorphe et $f(0)=0$, où $\forall u\in\mathbb{D}, \phi_u : \begin{array}{c}\overline{\mathbb{D}}\to\overline{\mathbb{D}}\\ z\mapsto\frac{z-u}{1-\overline{u}z}\end{array}$.

Remarque 3.5.

— $\forall u\in\mathbb{D}, \phi_u\in H(\mathbb{D})\cap C(\overline{\mathbb{D}})$. *Et réciproquement, $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ est un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ si et seulement si :* $\exists u\in\mathbb{D}, \exists\lambda\in\mathbb{C}, |\lambda|=1, f=\lambda\phi_u$

Proposition 3.1. *Soit $H: U\to\mathbb{D}$, holomorphe,injective et tel que H(0)=0. Alors $z\mapsto\frac{H(z)}{z}$ admet un logarithme sur U i.e,il existe $L: U\to\mathbb{C}$ tel que L est holomorphe et* $\forall z\in U, \exp L(z) = \begin{cases}\frac{H(z)}{z} & \text{si } z\neq 0\\ H'(0) & \text{sinon.}\end{cases}$

Preuve 3.3. *On a :* $\lim_{z\to 0}\frac{H(z)}{z} = H'(0)$ *donc* $\begin{array}{c}U-\{0\}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\frac{H(z)}{z}\end{array}$ *admet une singularité apparente et* $h: z\mapsto\begin{cases}\frac{H(z)}{z} & \text{si } z\neq 0\\ H'(0) & \text{sinon.}\end{cases}$ *est alors holomorphe sur U et* $\forall z\in U-\{0\}, H(z)=zh(z)$.
On a : $h(0)=H'(0)$, *donc $h(0)\neq 0$ car H est injective (proposition 2.6) et* $\forall z\in U-\{0\}, h(z)\neq 0$.
Car : $H(z)=0 \iff z=0$ (H injective) Donc $\frac{h'}{h}$ est bien définie et holomorphe sur U, comme U est simplement connexe il existe L holomoprhe sur U tel que : $L'=\frac{h'}{h}$. Quitte à translater L par un complexe (raisonnement totalement analogue à celui fait dans la preuve du lemme 3.1) on peut supposer : $\forall z\in U, \exp L(z) = h(z)$ $\square$

Définition 3.3 (fonction harmonique)**.** *Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$) et $u: V\to\mathbb{R}$ dans $C^2(V)$ (les dérivées partielles existent et sont continues jusqu'à l'ordre 2). On dit que u est harmonique si :* $\Delta u = 0$ *où* Δ *est le laplacien*

de u, i.e : $\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$
On va se concentrer sur le cas n=2 en identifiant $\mathbb{R}^2$ *à* $\mathbb{C}$.

Remarque 3.6.

— *Par les équations de Cauchy-Riemann (proposition 2.1) les parties réelle et imaginaire d'une fonction* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorphe sont toujours harmoniques. En effet :*

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\ &= (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2})f \\ &= (\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2})(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2})f \\ &= 0\end{aligned}$$

Et $\Delta f = \Delta\Re(f) + i\Delta\Im(f)$. *Donc :* $\Delta\Re(f) = \Delta\Im(f) = 0$

— *On verra plus tard que la réciproque est vrai pour un ouvert simplement connexe U de* $\mathbb{C}$*, c'est-à-dire que si* $u : U \to \mathbb{R}$ *est harmonique alors u est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U.*

On peut alors introduire le point essentiel dans la méthode de Riemann qui est de trouver la fonction harmonique $\Re(L)$ (où L est définie dans la preuve de la proposition 3.1) afin de remonter en arrière les étapes pour trouver H. On peut faire plusieurs observations :

1. $\exp(L) = h$ donc $\exp(\Re(L)) = |h|$ ainsi : $\Re(L) = \ln|h|$
2. En considérant que $|H|$ a pour valeur frontière 1, i.e : $\forall z \in \partial U, |H(z)| = 1$. Alors $\forall z \in \partial U, |h(z)| = \frac{1}{|z|}$ ($\forall z \in U, |h(z)| = |\frac{H(z)}{z}|$).

Ainsi la valeur frontière de $\Re(L)$ doit être : $\forall z \in \partial U, \ln|h(z)| = -\ln|z|$
A la suite de ces observations, Riemann utilisa pour trouver $\Re(L)$ ce qu'il nomme le Principe de Dirichlet.

4 Pré-requis pour la résolution du problème de Dirichlet

4.1 Rappels sur les fonctions harmoniques

On rappelle les propriétés suivantes liées aux fonctions harmoniques :

Définition 4.1. *Une fonction u définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est dite harmonique si elle est de classe C^2 et vérifie :*

$$\Delta u = 0$$

Proposition 4.1 (Principe du maximum)**.** *Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ telle que :$\Delta u \geq 0$. Alors le maximum de u est atteint sur le bord de U, ∂U. Et si le maximum est atteint sur U alors u est constante. En particulier cela est vérifié pour une fonction harmonique et continue sur le bord.*

Corollaire 4.1. *S'il existe une solution $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ de* $\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{dans } U \\ u = g & \textit{dans } \partial U \end{cases}$
(U ouvert borné et $g : \partial U \to \mathbb{R}$ continue)
Alors u est unique. Une fonction harmonique est donc caractérisée par sa valeur au bord.

Théorème 4.1 (Formule de la moyenne)**.** *Soit u une fonction de classe C^2 dans un ouvert U de $\mathbb{C}$.*
u est harmonique si et seulement si :

$$\forall \overline{B(z,r)} \subset U, u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{it})dt$$

Cela donne donc une caractérisation des fonctions harmoniques.

4.2 L'intégrale de Poisson

On a vu dans le corollaire 4.1 qu'une fonction harmonique est caractérisée par sa valeur au bord. La question est, pour des valeurs au bord données, de trouver une fonction harmonique ayant les dites valeurs au bord .
On va résoudre le problème ici dans le cas où la fonction est définie sur une boule et on en déduira ensuite un cas plus général dans la partie sur la méthode de Perron. (page 18)

Définition 4.2 (Intégrale de Poisson)**.** *On introduit pour n'importe quelle fonction $U : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue :*

$$\forall z \in B(0,1), P_U(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z})U(\theta)d\theta$$

On l'appelle l'intégrale de Poisson sur B(0,1) de U.
C'est une fonction en z et en U, on appelle cela une fonctionnelle.

On a plusieurs propriétés plus ou moins immédiates et intéressantes sur l'intégrale de Poisson.

Proposition 4.2. *Soit U et V deux fonctions continues par de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$, on a :*

1. *$P_{U+V} = P_U + P_V$ et pour toute constante c : $P_{cU} = cP_U$ (linéarité)*
2. *Si $U \geq 0$ alors $P_U \geq 0$ (positivité)*
3. *Si U=c est constante alors P_U aussi : $P_c = c$*
4. *Si $m \leq U \leq M$ alors $m \leq P_U \leq M$ (où m et M sont des constantes)*

Preuve 4.1. *1. C'est immédiat par linéarité de l'intégrale.* $\square$

2. *Cela vient de l'égalité suivante* $\forall z \in B(0,1), \Re(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} > 0$ *et de la positivité de l'intégrale.* $\square$

3. *Il suffit de montrer que* $\int_0^{2\pi} \Re(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z})dt = 2\pi$ *avec* $z := re^{i\theta}$ *dans* $B(0,1)$ *fixé (r dans [0,1[et* θ *dans* $\mathbb{R}$*). Pour cela on définit pour t dans* $\mathbb{R}$ *:* $S(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}$
(bien définie car $\forall n \in \mathbb{Z}, |r^{|n|}e^{in(\theta-t)}| \leq r^{|n|}$ *avec* $0 \leq r < 1$*).*
On a

$$\begin{aligned}
S(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in(\theta-t)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(re^{i(\theta-t)})^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n}e^{in(\theta-t)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(ze^{-it})^n + \overline{(ze^{-it})^n} \\
&= 1 + 2\Re(\sum_{n=1}^{+\infty}(ze^{-it})^n) \\
&= 1 + 2\Re(\frac{ze^{-it}}{1-ze^{-it}}) \\
&= \Re(\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}) \\
&= \Re(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z})
\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que $\int_0^{2\pi} S(t)dt = 2\pi$
Or $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |r^{|n|}e^{in(\theta-t)}| = 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^n \ -1 = \frac{2}{1-r} - 1$ *et cette constante est bien sûr intégrable sur* $[0, 2\pi]$*. Donc on peut échanger somme et intégrale d'après le théorème de Fubini :*

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} S(t)dt &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \int_0^{2\pi} e^{in(\theta-t)}dt \\
&= 2\pi + \sum_{n\in Z^*} r^{|n|}[\frac{-1}{ni}e^{in(\theta-t)}]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi \quad par \quad 2\pi - \text{périodicité de l'exponentielle complexe}
\end{aligned}$$

$\square$

4. *Il suffit d'appliquer la positivité puis la linéarité et enfin le point 3.* $\square$

On va maintenant montrer que P_U est solution de notre problème où U représente la valeur au bord , c'est-à-dire que c'est une fonction harmonique sur $B(0,1)$ et de valeurs au bord U (prolongeable par continuité au bord, i.e $\forall\theta \in [0, 2\pi]$, $\lim\limits_{z\to e^{i\theta}} P_U(z) = U(\theta)$). On appelle ceci le théorème de Schwarz.

Lemme 4.1. P_U *est harmonique sur* $B(0,1)$

Preuve 4.2. *Notons,*$\forall z \in B(0,1), F(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}U(\theta)d\theta$ *et* $M := \underset{\theta\in[0,2\pi]}{Max} |U(\theta)|$*. Soit* $1 > \epsilon > 0$*. On a :*
$\forall z \in \overline{B(0,\epsilon)}, \forall\theta \in [0, 2\pi], |\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}U(\theta)| \leq \frac{2}{|1-|z||}M$ *(inégalité triangulaire inverse).*
Or, $\forall z \in \overline{B(0,\epsilon)}, \frac{1}{|1-|z||} = \frac{1}{1-|z|} \leq \frac{1}{1-\epsilon}$
Et $\frac{2}{1-\epsilon}M$ *est intégrable sur* $[0, 2\pi]$
De plus à θ *fixé* $z \to \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}U(\theta)$ *est holomorphe sur* $B(0,1)$ *on en déduit par le théorème de l'intégrale dépendant*

d'un paramètre (théorème 2.1) que F est holomorphe sur $B(0,\epsilon)$ pour tout $1>\epsilon>0$ et donc F est holomorphe sur $B(0,1)$.
Comme $P_U = \Re(F)$ on en déduit que P_U est harmonique sur $B(0,1)$ en tant que partie réelle d'une fonction holomorphe. $\square$

Lemme 4.2. *Si $U(0)=U(2\pi)$ alors : $\forall\theta\in[0,2\pi]$, $\lim\limits_{z\to e^{i\theta}} P_U(z)=U(\theta)$*
(comme on va le voir il suffit que U soit continue en θ pour avoir $\lim\limits_{z\to e^{i\theta}} P_U(z)=U(\theta)$)

Preuve 4.3. *Soit θ_0 dans $[0,2\pi]$. On considère $W:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall\theta\in[0,2\pi], W(\theta)=U(\theta)-U(\theta_0)$.*
On va montrer que $\lim\limits_{z\to e^{i\theta_0}} P_W(z)=0$.
Soit $\epsilon>0$ fixé. Soit C_1 et C_2 deux arcs de cercles complémentaire de $\partial B(0,1)$ i.e du cercle unité.
On peut supposer que $e^{i\theta_0}$ est dans l'intérieur de C_2.
$W(\theta_0)=0$ donc par continuité de W on peut aussi supposer quitte à réduire C_2 que : $\forall e^{i\theta}\in C_2, |W(\theta)|<\frac{\epsilon}{2}$. On définit alors deux fonctions continues par morceaux W_1 et W_2 telles que $W_1=\begin{cases} W & sur\ C_1 \\ 0 & sinon\end{cases}$
et $W_2=\begin{cases} W & sur\ C_2 \\ 0 & sinon\end{cases}$
D'après ce qui précède $\forall\theta\in[0,2\pi], |W_2(\theta)|<\frac{\epsilon}{2}$ et donc d'après l'une des propriétés de la proposition 4.2 on a : $\forall z\in B(0,1), |P_{W_2}(z)|<\frac{\epsilon}{2}$, (les intégrales de poisson sont aussi bien définies pour les fonctions continues par morceaux et la démonstration de la proposition 4.2 reste valable).
On observe aussi directement que $P_W=P_{W_1}+P_{W_2}$.
Soit θ dans $[0,2\pi]$. Comme : $\forall z\neq e^{i\theta}, \Re(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z})=\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$ on en déduit que $\Re(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z})$ est nul si $|z|=1$ et $z\neq e^{i\theta}$
On peut voir P_{W_1} comme une intégrale sur C_1 puisque W_1 est nulle en-dehors de C_1 donc pour θ tel que $e^{i\theta}$ est dans l'intérieur de C_2 , P_{W_1} est prolongeable par continuité avec $P_{W_1}(e^{i\theta})=0$ d'après la précédente remarque.
En effet soit ρ tel que $e^{i\rho}$ est dans l'intérieur de C_2. On peut donc prendre $\overline{\Delta}$ un voisinage compact de $e^{i\rho}$ tel que $\overline{\Delta}\cap\overline{C_1}=\emptyset$. Alors $(e^{i\theta},z)\mapsto\frac{1}{|e^{i\theta}-z|^2}$ admet un maximum M sur le compact $\overline{C_1}\times\overline{\Delta}$ par continuité. Donc : $\forall z\in\overline{\Delta}\cap B(0,1), \int_{C_1}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}W(\theta)d\theta\leq(1-|z|^2)M\int_{C_1}W(\theta)d\theta$ d'où $\lim\limits_{z\to e^{i\rho}}\int_{C_1}\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}W(\theta)d\theta=0$.

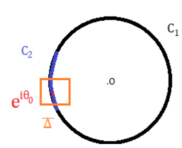

FIGURE 1 – Construction de $\overline{\Delta}$

On peut appliquer cela à θ_0 et par continuité on en déduit donc qu'il existe δ tel que :
$\forall z\in B(0,1)$ si $|z-e^{i\theta_0}|<\delta$ alors $|P_{W_1}(z)|<\frac{\epsilon}{2}$
Donc : $\forall z\in B(0,1), |z-e^{i\theta_0}|<\delta, |P_W(z)|\leq|P_{W_1}(z)|+|P_{W_2}(z)|\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$
Ce qui nous dit que $\lim\limits_{z\to e^{i\theta_0}} P_W(z)=0$.
Or par les propriétés de la proposition 4.2 on a :
$P_W=P_{U-U(\theta_0)}=P_U-P_{U(\theta_0)}=P_U-U(\theta_0)$
Ainsi on en déduit que $\lim\limits_{z\to e^{i\theta_0}} P_U(z)=U(\theta_0)$ $\square$

La question de la valeur au bord dans ce cas fut résolue pour la première fois par Schwarz avec le théorème suivant qui se déduit directement des deux lemmes précédent.

Théorème 4.2 (Théorème de Schwarz). *P_U est harmonique sur $B(0,1)$ et si $U(0) = U(2\pi)$ alors P_U est aussi prolongeable par continuité telle que :*

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], P_U(e^{i\theta}) = U(\theta)$$

Remarque 4.1.

- *Après prolongement par continuité on dira que P_U est l'intégrale de Poisson sur $\overline{B(0,1)}$ de U*
- *On généralise très facilement cela à n'importe quelle boule $B(z_0, r)$: $\forall z \in B(z_0, r), P_U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re(\frac{re^{i\theta}-z_0+z}{re^{i\theta}+z_0-z})U(\theta)d\theta$*
  En effet il suffit de remarquer que si z est dans $B(z_0, r)$ alors $\frac{z-z_0}{r}$ est dans $B(0,1)$ et on revient au cas qu'on a traité.
  Après prolongement on dira que P_U est l'intégrale de Poisson sur $\overline{B(z_0,r)}$ de U.
- *Si v est une fonction holomorphe (ou juste continue) sur $B(z_0, r)$ et continue sur $\overline{B(z_0,r)}$. L'intégrale de Poisson de v sur $\overline{B(z_0,r)}$ est celle usuelle pour l'application continue $\theta \to v(z_0 + re^{i\theta})$ sur $[0, 2\pi]$.*
- *Schwarz trouva aussi une interprétation géométrique de l'intégrale de Poisson. Pour trouver $P_U(z)$ on remplace chaque θ dans $U(\theta)$ par ρ_θ est tel que $e^{i\theta}$ et $e^{i\rho_\theta}$ sont opposés par rapport à z dans le cercle unité. Alors la valeur moyenne prise sur le cercle est l'intégrale de Poisson i.e : $P_U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\rho_\theta)d\theta$.*

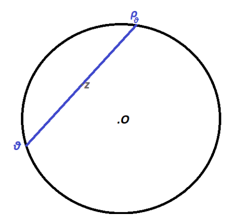

FIGURE 2 – Interprétation géométrique de l'intégrale de Poisson par Schwarz

- *On va voir dans la partie qui suit la formule de Poisson qui est une généralisation du théorème 4.1 et qui explique pourquoi on a choisi P_U comme candidat pour résoudre le problème.*

4.3 Le principe d'Harnack (1887)

On a résolu le problème de trouver une fonction harmonique avec des valeurs au bord préalablement données (dans une boule). Réciproquement on va exprimer une fonction harmonique par ses valeurs prises sur un cercle.

Lemme 4.3 (Formule de Poisson). *Soit u une fonction harmonique sur $B(z_0, r)$ et continue sur $\overline{B(z_0,r)}$ alors :*

$$\forall z \in B(z_0, r), u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re(\frac{re^{i\theta} - z_0 + z}{re^{i\theta} + z_0 - z})u(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

Preuve 4.4. *On introduit P_u l'intégrale de Poisson sur $\overline{B(z_0,r)}$ de u, qui à donc les mêmes valeurs au bord que u (théorème de Schwarz 4.2) et est harmonique sur $B(z_0, r)$.*
En conséquence par le corollaire 4.1, $P_u = u$. $\square$

Remarque 4.2.

- *La formule de Poisson donne une fonction holomorphe sur une boule $B(z_0, R)$ dont u est la partie réelle. En effet u est la partie réelle de :*
  $f(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}-z_0+z}{Re^{i\theta}+z_0-z}u(z_0+Re^{i\theta})d\theta + iC$ qui est holomorphe (même raison que pour l'intégrale de Poisson) pour z dans $B(z_0, R)$ et C constante réelle. (on l'appelle la formule de Schwarz)
  On a une équivalence, i.e, une fonction u est harmonique sur un ouvert U si et seulement si elle vérifie la formule de Poisson sur chaque boule dont l'adhérence est incluse dans U.

On va déduire de cette égalité une inégalité qui va nous être utile pour le théorème d'après.

Lemme 4.4 (Inégalité de Harnack). *Soit u une fonction positive, harmonique sur $B(z_0, \rho)$ et continue sur $\overline{B(z_0, \rho)}$; et z tel que $|z - z_0| = r < \rho$ alors :*

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} u(z_0) \leq u(z) \leq u(z_0) \frac{\rho + r}{\rho - r}$$

Preuve 4.5. *Par la formule de Poisson :* $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(\frac{\rho e^{i\theta} - z_0 + z}{\rho e^{i\theta} + z_0 - z}) u(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$
Soit θ dans $[0, 2\pi]$ *alors :* $\Re(\frac{\rho e^{i\theta} - z_0 + z}{\rho e^{i\theta} + z_0 - z}) = \frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{i\theta} + z_0 - z|^2}$ *(multiplié par le conjugué du dénominateur et prendre la partie réelle)*
- Par l'inégalité triangulaire inverse on a : $|\rho e^{i\theta} + z_0 - z| \geq ||\rho e^{i\theta}| - |z_0 - z|| = |\rho - r|$, *donc :*
$\frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{i\theta} + z_0 - z|^2} \leq \frac{(\rho - r)(\rho + r)}{(\rho - r)^2} = \frac{\rho + r}{\rho - r}$
-On a exactement de la même manière avec l'inégalité triangulaire : $\frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{i\theta} + z_0 - z|^2} \geq \frac{\rho - r}{\rho + r}$
Et les deux inégalités sont maintenues si on multiplie par $u(z_0 + \rho e^{i\theta})$ *car u est positive.*
Comme $u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$ *on en déduit l'inégalité de Harnack par croissance de l'intégrale.* □

On va maintenant montrer ce qu'on nomme le principe d'Harnack

Théorème 4.3 (Principe d'Harnack). *On considère une suite de fonctions (u_n) harmoniques sur un ouvert connexe Ω tel que pour tout point z de Ω il existe un voisinage de ce point où $u_n \leq u_{n+1}$ dès que n est assez grand.*
Dans ce cas on a deux possibilités :

- *Soit $u_n \to +\infty$ en tout point de Ω*
- *Soit (u_n) converge vers une fonction harmonique u sur Ω uniformément sur tout compact.*

Preuve 4.6. *Soit z_0 un point quelconque de Ω. Par hypothèse il existe un réel ρ strictement positif et un entier m tel que $(u_n)_{n \geq m}$ soit une suite croissante de fonction harmonique sur $\overline{B(z_0, \rho)}$. En particulier $(u_n(z_0))$ converge ou diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.*
-Supposons d'abord qu'elle diverge vers $+\infty$.
Par l'inégalité de Harnack appliqué à $u_n - u_m$ qui est positif et continue sur $\overline{B(z_0, \rho)}$ et harmonique sur $B(z_0, \rho)$ dès que n plus grand que m, on a pour z dans $B(z_0, \rho)$ tel que $|z - z_0| = r < \rho$:
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq m, \frac{\rho - r}{\rho + r}(u_n(z_0) - u_m(z_0)) \leq u_n(z) - u_m(z) \leq (u_n(z_0) - u_m(z_0)) \frac{\rho + r}{\rho - r}$
Ainsi en se servant de l'inégalité de gauche on en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $u_n(z)$ diverge vers $+\infty$ pour tout z dans $B(z_0, \rho)$. On a alors montré que $\{z \in \Omega, \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(z) = +\infty\}$ est un ouvert de Ω.
-Si $(u_n(z_0))$ converge, alors de même en se servant de l'inégalité de Harnack dans les deux sens cette fois on voit que $(u_n(z)$ est borné pour tout z dans $B(z_0, \rho)$ et donc converge nécessairement. Ainsi $\{z \in \Omega, \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(z) < +\infty\}$ est aussi un ouvert de Ω.
Dès lors $\{z \in \Omega, \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(z) = +\infty\}$ et $\{z \in \Omega, \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(z) < +\infty\}$ sont deux ouverts de Ω qui le partitionne. Comme Ω est connexe on en déduit que l'un est vide et l'autre est Ω.
Si $\{z \in \Omega, \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(z) = +\infty\}$ est Ω alors on est dans le premier cas.
Sinon, on note : $\forall z \in \Omega, u(z) := \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(z)$. En reprenant les même notations que précédemment on a en prenant $r = \frac{\rho}{2}$ par l'inégalité de Harnack à droite : $\forall z \in \overline{B(z_0, \frac{\rho}{2})}, \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{m+p}(z) - u_m(z) \leq 3(u_{m+p}(z_0) - u_m(z_0))$
($r \to \frac{\rho + r}{\rho - r}$ est croissant sur $[0, \rho[$ car $\rho > 0$ d'où l'inégalité pour $\overline{B(z_0, \frac{\rho}{2})}$).
En faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité on obtient : $\forall z \in \overline{B(z_0, \frac{\rho}{2})}, 0 \leq u(z) - u_m(z) \leq 3(u(z_0) - u_m(z_0))$.
Comme $3(u(z_0) - u_m(z_0))$ ne dépend pas de z et converge vers 0 quand m tend vers $+\infty$ on en déduit qu'on a converge uniforme de (u_n) vers u sur le compact $\overline{B(z_0, \frac{\rho}{2})}$. Ainsi tout z dans Ω admet un voisinage compact K_z tel que la converge de (u_n) vers u est uniforme sur ce compact (on a montré que la converge simple en 1 point implique la convergence uniforme dans un voisinage de ce point).
Soit K un compact quelconque dans Ω. On a : $K \subset \cup_{z \in K} \mathring{K}_z$. K étant compact, il existe un sous-recouvrement fini

(propriété de Heine-Borel), et comme la convergence est uniforme sur chacun de ces voisinages qui sont alors en nombre fini, on en déduit la convergence uniforme sur K.
Il reste à voir que u est harmonique sur Ω. *Cette propriété étant locale on va le montrer en prenant* $\overline{B(z_0,R)}$ *quelconque dans* Ω.
Par la formule de Poisson on a : $\forall n \in N, \forall z \in B(z_0,R), u_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re(\frac{Re^{i\theta}-z_0+z}{Re^{i\theta}+z_0-z})u_n(z_0+Re^{i\theta})d\theta$
Comme la convergence est uniforme sur $\overline{B(z_0,R)}$ *on peut passer directement la limite sous l'intégrale et ainsi obtenir :* $\forall z \in B(z_0,R), u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re(\frac{Re^{i\theta}-z_0+z}{Re^{i\theta}+z_0-z})u(z_0+Re^{i\theta})d\theta$.
u vérifie donc la formule de Poisson, on en déduit que u est harmonique sur $B(z_0,R)$ *pris de manière quelconque dans* Ω. $\square$

5 Le principe de Dirichlet

Le principe de Dirichlet est l'existence d'une solution au problème de Dirichlet.
C'est l'un des problèmes les plus importants dans la théorie des fonctions harmoniques.

5.1 Problème de Dirichlet (1837)

Problème de Dirichlet : Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné et $g : \partial V \to \mathbb{R}$ continue.
Le problème consiste à trouver une fonction $u : \overline{V} \to \mathbb{R}$ harmonique sur V qui prolonge g, c'est-à-dire :
$u \in C^2(V) \cap C(\overline{V})$ et $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans V} \\ u = g & \text{dans } \partial\text{V} \end{cases}$

Si une solution au problème de Dirichlet existe, alors elle est unique par le corollaire 4.1. Mais la difficulté est qu'il n'y a aucune raison de supposer que le dit problème admet une solution dans notre cas et ni qu'il permet de trouver une fonction biholomorphe de U vers $\mathbb{D}$.

On a déjà résolu le problème de Dirichlet dans le cas d'une boule ouverte. En effet c'est l'intégrale de Poisson qui nous donne la solution (théorème de Schwarz 4.2)Mais le cas d'un ouvert arbitraire est plus difficile.

Riemann a vraisemblablement vu cela comme acquis voir évident alors qu'il s'avère que c'est assez subtil en somme.

5.2 Une justification omise par Riemann

Riemann aurait apparemment seulement considéré des domaines où la frontière est "lisse" ou "lisse par morceaux" dans un certain sens, alors que malencontreusement même le bord d'un ouvert simplement connexe borné peut être très compliqué à décrire.

Il est ainsi nécessaire d'apporter une justification à l'utilisation du principe de Dirichlet faite par Riemann dans le cas d'un ouvert simplement connexe borné (ce qui constitue l'intégralité des parties 4 et 6).
Car comme on va le voir, le problème de Dirichlet peut ne pas avoir de solution, même dans un cas qui peut en apparence être simple.

Exemple de problème de Dirichlet sans solution :

Soit $\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$, $\partial D^*(0,1) = \partial\mathbb{D} \cup \{0\}$, et $g : \partial\mathbb{D}^* \to \mathbb{R}$ tel que :
$g(0) = 0$ et $\forall z \in \partial\mathbb{D}, g(z) = 1$. On considère donc le problème de Dirichlet suivant :
Trouver u tel que $u \in C^2(\mathbb{D}^*) \cap C(\overline{\mathbb{D}^*})$ et $\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{dans } \mathbb{D}^* \\ u = g & \text{dans } \partial\mathbb{D}^* \end{cases}$

Supposons qu'on ait $u : \overset{\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}}{re^{i\theta} \mapsto u(re^{i\theta})}$ solution du problème. On remarque d'abord que la problème est stable par rotation.

C'est-à-dire que $v : \overset{\overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}}{z \mapsto u(ze^{i\rho})}$ (où ρ réel fixé) est aussi solution du problème.
En effet, v est dans $C^2(\mathbb{D}^*) \cap C(\overline{\mathbb{D}^*})$ comme composées de fonctions de la sorte, de plus :
$v(0) = u(0) = 0$ et $\forall z \in \partial\mathbb{D}, v(z) = u(ze^{i\rho}) = 1 = g(z)$ car $\forall z \in \partial\mathbb{D}, |ze^{i\rho}| = 1$

Pour montrer que v est harmonique on pourrait faire un calcul élémentaire, mais on va plutôt se servir du lemme suivant aussi élémentaire mais plus général et dont on se servira aussi plus tard.

Lemme 5.1. *Soient W et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Si $h : V \to \mathbb{R}$ est harmonique et $f : W \to \mathbb{C}$ est holomorphe tel que $f(W) \subset V$, alors $h \circ f : W \to \mathbb{R}$ est harmonique, i.e : $\Delta(h \circ f) = 0$*

Preuve 5.1. *On fixe $z = x + iy$ dans W, en notant $f = (f_1, f_2)$ et par identification de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ on a :*
$h \circ f(z) = h(f_1(x,y), f_2(x,y))$, donc :

$$\frac{\partial h \circ f}{\partial x_1}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y)\frac{\partial h}{\partial x_1}(f_1(x,y), f_2(x,y)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x,y)\frac{\partial h}{\partial x_2}(f_1(x,y), f_2(x,y))$$

$$\frac{\partial h \circ f}{\partial x_2}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x,y)\frac{\partial h}{\partial x_1}(f_1(x,y), f_2(x,y)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x,y)\frac{\partial h}{\partial x_2}(f_1(x,y), f_2(x,y))$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h \circ f}{\partial x_1^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x,y)\frac{\partial h}{\partial x_1}(f_1(x,y), f_2(x,y)) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y)\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \\ &+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x,y)\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(f_1(x,y), f_2(x,y)) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(x,y)\frac{\partial h}{\partial x_2}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \\ &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x,y)\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(f_1(x,y), f_2(x,y)) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x,y)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y)\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(f_1(x,y), f_2(x,y))\end{aligned}$$

(on a utilisé la symétrie des dérivées partielles qui est le théorème de Schwarz)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h \circ f}{\partial x_2^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(x,y)\frac{\partial h}{\partial x_1}(f_1(x,y), f_2(x,y)) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x,y)\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(f_1(x,y), f_2(x,y)) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(x,y)\frac{\partial h}{\partial x_2}(f_1(x,y), f_2(x,y)) \\ &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x,y)\right)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(f_1(x,y), f_2(x,y)) + 2\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x,y)\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(f_1(x,y), f_2(x,y))\end{aligned}$$

Puisque f est holomorphe ,par les équations de Cauchy-Riemann (proposition 2.1) on a :

$$\begin{aligned}\Delta(h \circ f) = \frac{\partial^2 h \circ f}{\partial x_1^2}(x,y) + \frac{\partial^2 h \circ f}{\partial x_2^2}(x,y) &= \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x,y)\right)^2\right)\Delta h(f_1(x,y), f_2(x,y)) \\ &+\frac{\partial h}{\partial x_1}(f_1(x,y), f_2(x,y))\Delta f_1(x,y) + \frac{\partial h}{\partial x_2}(f_1(x,y), f_2(x,y))\Delta f_2(x,y \\ &+2\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2}(f_1(x,y), f_2(x,y))(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x,y) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x,y)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x,y))\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure puisque h est harmonique ainsi que f_1 et f_2 car f est holomorphe. □

Par conséquent en appliquant ce lemme à $z \mapsto ze^{i\rho}$ qui est bien sûr holomorphe sur $\mathbb{C}$ et envoie $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et à u, on en déduit que v est harmonique.
Par suite v est solution du même problème de Dirichlet que u, donc par unicité on a : $u = v$

En conséquence u ne dépend que du module de l'argument (on dit que u est radiale). C'est-à-dire qu'il existe $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$ dans $C^2(\mathbb{R})$ tel que $\forall z \in \overline{\mathbb{D}}, u(z) = \omega(|z|)$, ou encore, $\forall r \in [0,1], \forall \theta \in [0, 2\pi[, u(re^{i\theta}) = \omega(r)$
La formule du laplacien en coordonnées polaires ($\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$) nous donne :

$$\forall r \in]0,1[, \forall \theta \in [0, 2\pi[, \Delta u(re^{i\theta}) = \omega''(r) + \frac{1}{r}\omega'(r) + 0$$

Comme u est harmonique sur $\mathbb{D}^*$ on a : $\forall r \in]0,1[, \omega''(r) = -\frac{1}{r}\omega'(r)$

Ainsi en résolvant cette équation différentielle ordinaire on en déduit qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall r \in]0,1[, \omega(r) = \lambda \ln r + \mu$$

C'est-à-dire : $\forall z \in \mathbb{D}^*, u(z) = \lambda \ln |z| + \mu$
On constate aisément que si $\lambda \neq 0$ alors $\underset{z\to 0}{lim}|u(z)| = +\infty$ or $u(0) = 0$ et si $\lambda = 0$ alors u est constante sur $\mathbb{D}^*$ et donc sur $\overline{\mathbb{D}}$ par continuité ce qui est absurde puisque $u(0) = 0$ et $u_{|\partial\mathbb{D}} = 1$.
Finalement on a bien un problème de Dirichlet qui ne possède aucune solution.

Remarque 5.1.

— $\mathbb{D}^*$ *n'est pas simplement connexe* ($z \mapsto \frac{1}{z}$ *n'a pas de primitive sur* $\mathbb{D}^*$*).*

— *Le problème de Dirichlet admet une solution pour n'importe quelle condition* g *à la frontière si l'ouvert est borné et simplement connexe. C'est la pièce majeure qui manquait dans l'approche de Riemann et qu'on va démontrer dans la partie qui suit en ayant recours à ce que l'on appelle la méthode de Perron.*

6 La méthode de Perron (1923)

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre le problème de Dirichlet dans notre cas mais aucune aussi simple et élémentaire que celle de Perron basée sur l'utilisation des fonctions sous-harmoniques et la notion de barrière.

6.1 Fonctions sous-harmonique

En dimension 1 , on a $\Delta u = u''$ (u de classe C^2 dans un ouvert de $\mathbb{R}$) .Ainsi les fonctions harmoniques à une variable sont les fonctions affines. On rappelle que une fonction est convexe si la courbe est en-dessous des cordes, i.e que sur chaque intervalle elle est au plus égal à une fonction affine (fonction harmonique) et égaux sur le bord. On veut généraliser cette situation sur $\mathbb{C}$ où les intervalles seront les ouverts connexes et les fonctions convexes seront les fonctions sous-harmoniques.

Définition 6.1 (fonction sous-harmonique)**.** *Soit V un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $v : V \to \mathbb{R}$ continue v est dit sous-harmonique sur V si pour toute fonction u harmonique dans un ouvert connexe V' $\subset$ V, $v - u$ vérifie le principe du maximum, i.e que si $v - u$ possède un maximum dans V' alors $v - u$ est constante sur V'.*
En particulier si v n'est pas constante alors elle n'a pas de maximum dans V. (car la fonction nulle est harmonique sur V)

Il est important de noter que le caractère sous-harmonique est local.
(comme pour la continuité, la dérivation, l'harmonicité...).

Lemme 6.1. *Soit V un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $v : V \to \mathbb{R}$ continue. Si pour tous points de V il existe un voisinage dans lequel v est sous-harmonique alors v est sous-harmonique sur V.*

Preuve 6.1. *Soit V' $\subset$ V connexe,u harmonique sur V'. Si $v - u$ n'a pas de maximum sur V' alors il n'y a rien à faire, sinon soit x_0 tel que $v - u$ y atteint son maximum sur V'.*
On considère $A := \{x \in V', (v - u)(x) = (v - u)(x_0)\}$, A est non vide car contient x_0. Montrons que A est ouvert et fermé dans V' pour pouvoir conclure par connexité.
A est fermé car $v - u$ est continue.
Soit x dans A et V_x un voisinage dans V' de x où v y est sous-harmonique. Alors $v - u$ vérifie le principe du maximum sur V_x et possède un maximum en x donc $v - u$ est constante sur V_x égale à $(v - u)(x)$. Ainsi : $V_x \subset A$ donc A est ouvert. $A = V'$ ce qui montre le lemme. □

Remarque 6.1.

- *Une fonction est dite sous-harmonique en un point x_0 si elle est sous-harmonique dans un voisinage de x_0. Une fonction est donc sous-harmonique sur un ouvert connexe si et seulement si elle est sous-harmonique en chacun des points de l'ouvert.*
- *Une fonction harmonique est sous-harmonique puisque la différence de deux fonctions harmoniques est encore harmonique et vérifie donc la propriété du maximum (propriété 4.1).*

On va voir une propriété qui caractérise les fonctions sous-harmoniques et généralise celle qu'on a rappelé pour les fonctions harmoniques.

Proposition 6.1. *Soit V un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $v : V \to \mathbb{R}$ continue.*
v est sous-harmonique si et seulement si :

$$\forall \overline{B(z,r)} \subset V, v(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + re^{it})dt$$

Preuve 6.2. *-Supposons d'abord que*

$$\forall \overline{B(z,r)} \subset V, v(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z+re^{it})dt$$

Soit V' un ouvert connexe dans V et u une fonction harmonique sur V'. Supposons que $v-u$ possède un maximum sur V' en un point z_0.Posons $A := \{z \in V', (v-u)(z) = (v-u)(z_0)\}$ qui est non vide et fermé comme on l'a déjà vu et montrons qu'il est ouvert pour conclure de la même manière que dans le lemme 6.1. Soit z dans A et $\overline{B(z,r)} \subset V'$. Alors comme par le théorème 4.1 on a :

$$\forall R \leq r, u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z+Re^{it})dt$$

on en déduit :

$$\forall R \leq r, (v-u)(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (v-u)(z+Re^{it})dt$$

et donc

$$\forall R \leq r, 0 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (v-u)(z+Re^{it}) - (v-u)(z)dt$$

Or $(v-u)(z)$ est un maximum donc le terme dans l'intégrale est toujours négatif, on en déduit directement que l'intégrale est nécessairement nul et comme $v-u$ est continue on en déduit que le terme dans l'intégrale est nul et donc, $\forall R \leq r, \forall t \in [0,2\pi], (v-u)(z+Re^{it}) = (v-u)(z)$ i.e $B(z,r) \subset A$ et on conclut par connexité que $A = V'$ et donc v est sous-harmonique.

- Supposons maintenant que v est sous-harmonique. Soit z dans U et r tel que $\overline{B(z,r)} \subset V$. On considère l'intégrale de Poisson P_v sur $B(z,r)$ de v. On sait que par le théorème de Schwarz (4.2) que P_v est harmonique et donc $v - P_v$ vérifie le principe du maximum. Par le théorème de Schwarz on a aussi : $\forall \zeta \in \partial B(z,r), \lim_{w\to\zeta}(v-P_v)(w) = 0$
$v - P_v$ admet un maximum sur $\overline{B(z,r)}$. Si le maximum est strictement positif, alors nécessairement il est atteint sur $B(z,r)$ car $v - P_v = 0$ sur le bord; par suite $v - P_v$ est constant ce qui est absurde car elle admet un maximum strictement positif et est nulle sur le bord. Donc le maximum est négatif (et même égale à 0) ainsi $v \leq P_v$ sur B(z,r) i.e :

$$\forall w \in B(z,r), v(w) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re(\frac{re^{it}-z+w}{re^{it}+z-w})v(z+re^{it})dt$$

En prenant $w = z$ on obtient le résultat. □

On va maintenant voir quelques propriétés qui nous serviront par la suite.

Proposition 6.2. *Soit V un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $v : V \to \mathbb{R}$ sous-harmonique.*

1. *kv est sous-harmonique pour n'importe quelle constante k positive.*
2. *Si v_1 et v_2 sont sous-harmoniques dans V alors $v_1 + v_2$ aussi.*
3. *Si v_1 et v_2 sont sous-harmoniques dans V alors $w := max(v_1, v_2)$ aussi.*
4. *Soit $\overline{B(z,r)}$ un disque dans V et P_v l'intégrale de Poisson sur $\overline{B(z,r)}$ de v.*
   Alors w définie par $w = P_v$ sur $B(z,r)$ et $w = v$ sur $V - B(z,r)$ est aussi sous-harmonique.

Preuve 6.3. *1. et 2. sont obtenues directement par la propriété 6.1.*

3. On a : $\forall a,b \in \mathbb{R}, max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$ donc $w = \frac{1}{2}(v_1+v_2+|v_1-v_2|)$ et est ainsi continue.
En conséquence on conclut aussi directement que w est sous-harmonique par la propriété 6.1.

4. On a directement par le théorème de Schwarz (4.2) que w est continue. On a vu lors de la démonstration de la propriété 6.1 que $v \leq P_v$ sur B(z,r), donc : $v \leq w$ sur V.
w est sous-harmonique sur B(z,r) car P_v l'est, et aussi sur $V - \overline{B(z,r)}$ car v l'est. Il reste donc à traiter le cas où V' est un ouvert connexe dans V qui rencontre $\partial B(z,r)$ et u une fonction harmonique sur V' telle que $w-u$ atteint son maximum sur V' en un point z_0 de $\partial B(z,r)$. Alors $v-u$ a aussi un maximum en z_0 sur V' car $w=v$ sur $\partial B(z,r)$ et $v-u \leq w-u$. Donc $v-u$ est constante sur V' car elle vérifie le principe du maximum. Et par les inégalités suivante :
$\forall z \in V', v(z)-u(z) \leq w(z)-u(z) \leq w(z_0)-u(z_0) = v(z_0)-u(z_0)$
On conclut que $w-u$ aussi et donc w est sous-harmonique. □

6.2 L'enveloppe supérieure de Perron

Pour un problème de Dirichlet donné associé à un ouvert borné connexe V de $\mathbb{C}$ et à une fonction $g : \partial V \to \mathbb{R}$ bornée ; la méthode de Perron consiste à considérer comme candidat la fonction P définie par : $\forall z \in V, P(z) = \underset{v \in A_g}{Sup}\, v(z)$
où $A_g := \{v : V \to \mathbb{R},$ v fonction sous-harmonique tel que $, \forall q \in \partial V, \underset{z \to q}{limsup}\ v(z) \leq g(q)\}$

On remarque d'abord que P est bien définie, en effet :
-A_g est non vide car la fonction constante égale à $\underset{z \in \partial V}{inf}\ g(z)$ sur V est un élément de A_g
- Soit v dans A_g et $M := \underset{z \in \partial V}{Sup}\ g(z)$. On a $v \leq M$ dans V. En effet soit $\epsilon > 0$ fixé. Considérons $E := \{z \in V, v(z) \geq M+\epsilon\}$ et montrons qu'il est fermé dans $\mathbb{C}$. Les points z de E^c sont de 3 types :

1. $z \in \overline{V}^c$
2. $z \in \partial V$
3. $z \in V, v(z) < M+\epsilon$

Selon les cas on a :

1. Il existe un voisinage de z contenu dans $\overline{V}^c$ et donc dans E^c.
2. Il existe un voisinage W de z avec $v < M+\epsilon$ sur $W \cap V$ puisque par définition de A_g, v vérifie : $\underset{w \to z}{limsup}\ v(w) \leq g(z) \leq M < M+\epsilon$ et donc W est contenu dans E^c
3. Par continuité de v il existe un voisinage de z tel dans V tel que $v < M+\epsilon$ et ce voisinage est donc contenu dans E^c

Ainsi E^c est ouvert dans $\mathbb{C}$ et donc E est fermé dans $\mathbb{C}$. E est aussi borné car V l'est et donc E est un compact de $\mathbb{C}$. Si E était non vide alors par compacité v aurait un maximum sur E et donc par suite un maximum sur V. Comme v est sous-harmonique par définition de A_g, on en déduit que v est constant sur V et on constate immédiatement que cette constante est supérieure à $M+\epsilon$ car E est non vide. Ceci est absurde puisque $\forall q \in \partial V, \underset{z \to q}{limsup}\ v(z) \leq g(q) \leq M$.
En conséquence E est vide et ϵ étant pris au hasard on obtient que nécessairement $v \leq M$.
Ainsi pour tout z dans V, $\underset{v \in A_g}{Sup}\, v(z)$ existe et est fini (majoré par $\underset{z \in \partial V}{Max}\ g(z)$) donc P est bien une fonction de V dans $\mathbb{R}$.

On remarque aussi que si cette fonction résout bien le problème de Dirichlet ce n'est pas par hasard.
En effet tout d'abord si u est une solution du problème alors on a immédiatement que u est dans A_g et donc $u \leq P$.
De plus par le principe du maximum on a aussi facilement que : $\forall w \in A_g, w \leq u$, et donc $u \geq P$. Ainsi $u = P$.

Donc si une solution existe elle est forcément égale à P. Ce fait motive l'étude de cette fonction.

P est appelée **l'enveloppe supérieure de Perron** associée à g.
On va dans un sens faire une généralisation de la propriété 3. de la proposition 6.2 en prouvant que l'enveloppe supérieure de Perron est toujours harmonique pour un ouvert connexe borné.

Lemme 6.2. *P est harmonique sur V.*

Preuve 6.4. *Soit B un disque ouvert tel que* $\overline{B} \subset V$, z_0 *dans B et* (v_n) *une suite dans* A_g *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(z_0) = P(z_0)$. *On considère la suite de fonctions suivante :* $V_n := max(v_1, ..., v_n)$. *Pour n dans* $\mathbb{N}$ *on a que* V_n *est sous-harmonique par la propriété 3. de la proposition 6.2 et une récurrence simple. De plus,* $\forall j \in \mathbb{N}, \forall q \in \partial V, \limsup\limits_{z\to q} v_j(z) \leq g(q)$ *Donc en déduit directement que* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \partial V, \limsup\limits_{z\to q} V_n(z) \leq g(q)$ *Ainsi* (V_n) *forme une suite croissante de fonctions dans* A_g
On construit maintenant une nouvelle suite (V'_n) *définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}, V'_n = V_n$ *sur* $V - B$ *et* $V'_n = P_{V_n}$ *sur B. Cette suite est aussi dans* A_g *puisque pour n dans* $\mathbb{N}$, V'_n *est sous-harmonique par la propriété 4. de la proposition 6.2, et* $\forall q \in \partial V, \limsup\limits_{z\to q} V'_n(z) = \limsup\limits_{z\to q} V_n(z)$ *puisque* $V'_n = V_n$ *sur V-B et* $\overline{B} \subset V$.
On remarque aussi que cette suite est croissante. En effet (V_n) *l'est donc* V'_n *l'est aussi sur* $V - B$. P_{V_n} *l'est aussi puisque par les propriétés de l'intégrale de poisson (proposition 4.2) on a que* $P_{V_{n+1}-V_n} \geq 0$ *(car* $V_{n+1} - V_n \geq 0$*).*
Or $P_{V_{n+1}-V_n} = P_{V_{n+1}} + P_{-V_n} = P_{V_{n+1}} - P_{V_n}$ *Donc :* $P_{V_{n+1}} \geq P_{V_n}$
Ainsi V'_n *est aussi croissante sur B et donc croissante sur V. De plus par les inégalités suivante :*
$v_n(z_0) \leq V_n(z_0) \leq P_{V_n}(z_0) = V'_n(z_0) \leq P(z_0)$
On en déduit par le théorème des gendarmes que : $\lim\limits_{n\to+\infty} V'_n(z_0) = P(z_0)$
Dès lors (V'_n) *étant une suite croissante et harmonique sur B puisque* (P_{V_n}) *l'est, on en déduit par le principe d'Harnack (théorème 4.3) appliqué à* (V'_n) *que* (V'_n) *converge vers une fonction harmonique* U_0 *sur B uniformément sur tout compact.*
U_0 *vérifie que* $U_0 \leq P$ *sur B (car :* $\forall z \in B, V'_n(z) \leq P(z)$*) et* $U_0(z_0) = P(z_0)$.

Soit z_1 *un autre élément de B avec lequel on effectue à nouveau le même procédé avec* (w_n) *une suite dans* A_g *telle que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n(z_1) = P(z_1)$. *Mais avant de commencer la construction on remplace* (w_n) *par* $(\overline{w}_n) := (max(w_n, v_n))$. $W_n := max(\overline{w}_1, ..., \overline{w}_n)$. (W'_n) *définie par :* $\forall n \in \mathbb{N}, W'_n = W_n$ *sur* $V - B$ *et* $W'_n = P_{W_n}$ *sur B. De plus par les inégalités suivante :*
$w_n(z_1) \leq \overline{w}_n(z_1) \leq W_n(z_1) \leq P_{W_n}(z_1) = W'_n(z_1) \leq P(z_1)$
On en déduit par le théorème des gendarmes que : $\lim\limits_{n\to+\infty} W'_n(z_1) = P(z_1)$ *(Il faut faire attention en effet de prime abord rien ne dit qu'on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \overline{w}_n(z_1) = P(z_1)$ *même si c'est le cas pour* w_n*)*
Dès lors (W'_n) *étant une suite croissante et harmonique sur B, on en déduit par le principe d'Harnack (4.3) appliqué à* (W'_n) *que* (W'_n) *converge vers une fonction harmonique* U_1 *sur B uniformément sur tout compact.*
U_1 *vérifie que* $U_1 \leq P$ *sur B et* $U_1(z_1) = P(z_1)$ *pour les même raisons que* U_0.
Par définition on a $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{w}_n \geq v_n$ *et donc de même* $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \geq V_n$ *et enfin* $\forall n \in \mathbb{N}, W'_n \geq V'_n$. *Ainsi par passage à la limite on a* $U_0 \leq U_1$ *et donc* $U_0 \leq U_1 \leq P$ *sur B, en particulier* $U_0(z_0) \leq U_1(z_0) \leq P(z_0) = U_0(z_0)$, *Donc* $U_0(z_0) = U_1(z_0)$. *Par suite comme* $U_0 - U_1 \leq 0$ *sur B et* $U_0(z_0) - U_1(z_0) = 0$, $U_0 - U_1$ *admet un maximum sur B égal à 0 en* z_0. *Donc* $U_0 - U_1$ *est constant égal à 0 sur B par le principe du maximum. Notamment on a* $U_0(z_1) = U_1(z_1) = P(z_1)$. *Comme* z_1 *à était pris arbitrairement on en déduit que* $P = U_0$ *sur B.*
Ainsi P est harmonique localement sur V et est donc harmonique sur V. □

Il s'avère ainsi que P est toujours harmonique pour un ouvert borné connexe, mais n'est pas nécessairement égale à g sur la frontière.

On a un contre-exemple qui est donné directement par l'enveloppe supérieure de Perron associée à g définie à la page 15, où $\mathbb{D}^*$ est bien ouvert borné et connexe, par suite P n'est pas égale à g sur la frontière sinon on aurait l'existence d'une solution au problème de Dirichlet associé à g alors qu'on n'a montré qu'il n'en existe pas.

6.3 Le théorème de Perron-Bouligand

On rappelle que P est l'enveloppe supérieure de Perron associée à g. Perron cherchait alors une condition générale pour que P soit égale à g sur la frontière.
Cela aboutit à la notion de barrière.

Définition 6.2 (Barrière). *Soit V un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et ζ_0 un élément de ∂V . Une barrière du deuxième type ou juste barrière au point ζ_0 est une fonction u continue et définie sur V tel que :*

(i) *u est sous-harmonique*

(ii) $u < 0$

(iii) $\lim\limits_{z \to \zeta_0} u(z) = 0$

(iv) $\forall \zeta \in \partial V, \zeta \neq \zeta_0, \limsup\limits_{z \to \zeta} u(z) < 0$

Une barrière du premier type est une fonction u remplissant les mêmes conditions hormis la (iv).
Une barrière du troisième type est une fonction u définie sur $\overline{V}$ satisfaisant :

(i) *u est harmonique sur V et continue sur $\overline{V}$*

(ii) $\forall \zeta \in \partial V - \{\zeta_0\}, u(\zeta) > 0$ *et* $u(\zeta_0) = 0$

La solution de Perron au problème de Dirichlet, sera d'abord présentée sous l'hypothèse que, l'ouvert V borné et connexe a la propriété que pour tout point de la frontière il existe une barrière du troisième type.
Ensuite on verra une adaptation dans le cas d'une barrière du deuxième type et enfin on regardera le cas de la barrière du premier type qui nous sera utile pour la suite car comme on l'observera un ouvert simplement connexe vérifie toujours cette hypothèse. C'est Bouligand qui prouva tôt après le travail de Perron que l'hypothèse de l'existence d'une barrière du premier type à chaque point de la frontière est suffisante.

Avant de montrer que l'enveloppe supérieure de Perron est bien solution on va avoir besoin des deux lemmes suivant qui seront utiles dans les trois cas.

Lemme 6.3. *Soit u une fonction sous-harmonique sur V telle que $\forall \zeta \in \partial V, \limsup\limits_{z \to \zeta} u(z) \leq 0$. Alors $u \leq 0$ sur V.*

Preuve 6.5. *Soit $\epsilon > 0$ et posons $E_\epsilon = \{z \in V, u(z) \geq \epsilon\}$.*
- E est fermé, en effet : Soit (z_n) une suite de E_ϵ qui converge vers un point z.
Si z est dans V alors par continuité de u, $u(z) \geq \epsilon$ et donc z est dans E_ϵ.
Si z est dans ∂V, on a $\limsup\limits_{z' \to z} u(z') \leq 0 < \frac{\epsilon}{2}$.
Donc il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall z' \in B(z, \eta) \cap V, u(z') \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Or pour n assez grand z_n est dans $B(z, \eta) \cap V$ et $u(z_n) \geq \epsilon$ ce qui est aburde. Donc E_ϵ est bien fermé.
- Si $E_\epsilon \neq \emptyset$. E_ϵ étant fermé borné est compact. Donc il existe z_0 dans E_ϵ tel que : $\forall z \in E_\epsilon, u(z) \leq u(z_0)$.
Si z est un point qui n'est pas dans E_ϵ alors $u(z) < \epsilon \leq u(z_0)$.
Donc u admet un maximum en z_0 ainsi par le principe du maximum u est constante sur V et donc :
$\forall z \in V, u(z) = u(z_0) \geq \epsilon > 0$.
Ce qui contredit l'hypothèse que $\forall \zeta \in \partial V, \limsup\limits_{z \to \zeta} u(z) \leq 0$.
Donc : $\forall \epsilon > 0, E_\epsilon = \emptyset$. En conséquence $u \leq 0$ sur V. $\square$

Lemme 6.4. *Soit P_{-g} l'enveloppe supérieure de Perron associée à $-g$. Alors on a :*

$$-P \geq P_{-g} \quad \text{sur } V$$

Preuve 6.6. *Soit u dans A_g et v dans A_{-g}. Alors on sait que $u+v$ est aussi sous-harmonique par la proposition 6.2 et : $\forall \zeta \in \partial V, \limsup_{z \to \zeta} (u(z)+v(z)) \leq g(\zeta) - g(\zeta) = 0$*
Donc par le lemme précédent $u + v \leq 0$ sur V. Ainsi en prenant le sup sur de telle u et telle v on obtient par définition : $P + P_{-g} \leq 0$ i.e $-P \geq P_{-g}$. $\square$

Proposition 6.3. *Soit V un ouvert borné et connexe de $\mathbb{C}$ et g une fonction définie et bornée sur ∂V.*
Soit ζ_0 dans ∂V.
On suppose qu'il existe une barrière du troisième type u en ζ_0 et que g est continue en ζ_0. Alors l'enveloppe supérieure de Perron P correspondante vérifie :

$$\lim_{z \to \zeta_0} P(z) = g(\zeta_0)$$

Preuve 6.7. *Soit $\epsilon > 0$ fixé. $M := \operatorname{Sup}_{\zeta \in \partial V} |g(\zeta)| < +\infty$*
On va faire quelques remarques préliminaires qui seront utiles dans les 3 cas.
On va montrer que $\limsup_{z \to \zeta_0} P(z) \leq g(\zeta_0) + \epsilon$ et $\liminf_{z \to \zeta_0} P(z) \geq g(\zeta_0) - \epsilon$.
Cela nous donnera donc que $\limsup_{z \to \zeta_0} P(z) = \liminf_{z \to \zeta_0} P(z) = g(\zeta_0)$ et donc nécessairement $\lim_{z \to \zeta_0} P(z) = g(\zeta_0)$
On observe aussi préalablement que $\liminf_{z \to \zeta_0} P(z) \geq g(\zeta_0) - \epsilon$ sera suffisant.
En effet cela nous donnera $\liminf_{z \to \zeta_0} P(z) \geq g(\zeta_0)$.
Ensuite en appliquant le même résultat à P_{-g} on obtiendra $\liminf_{z \to \zeta_0} P_{-g}(z) \geq -g(\zeta_0)$
Et par le lemme précédent on a $-P \geq P_{-g}$ sur V donc : $\liminf_{z \to \zeta_0} (-P(z)) \geq \liminf_{z \to \zeta_0} P_{-g}(z) \geq -g(\zeta_0)$
Or $\liminf_{z \to \zeta_0} (-P(z)) = -\limsup_{z \to \zeta_0} (P(z))$.
Ainsi $\limsup_{z \to \zeta_0} (P(z)) \leq g(\zeta_0)$. Par conséquence on va à chaque fois démontrer que $\liminf_{z \to \zeta_0} P(z) \geq g(\zeta_0) - \epsilon$

Par continuité de g en ζ_0 il existe B un voisinage dans ∂V de ζ_0 tel que : $\forall \zeta \in B, |g(\zeta) - g(\zeta_0)| < \epsilon$
Comme B est un ouvert de ∂V on en déduit que son complémentaire dans ∂V, $\partial V - B$, est un fermé de ∂V et ∂V est un compact de $\mathbb{C}$ donc $\partial V - B$ est un compact de $\mathbb{C}$. Ainsi u possède un minimum u_0 sur $(\partial V - B) \cap \overline{V}$ qui de plus est strictement positif par hypothèse sur u.

-On considère la fonction suivante définie sur $\overline{V}$ et harmonique sur V :

$$\forall z \in \overline{V}, U(z) := g(\zeta_0) - \epsilon - \frac{u(z)}{u_0}(M + g(\zeta_0))$$

On va montrer que U est dans A_g.
$\forall \zeta \in B, U(\zeta) \leq g(\zeta_0) - \epsilon < g(\zeta)$
$\forall \zeta \in B^c, U(\zeta) \leq g(\zeta_0) - \epsilon - M - g(\zeta_0) = -M - \epsilon < g(\zeta)$.
Additionné à cela le fait que U est sous-harmonique sur V car harmonique sur V nous permet de dire que U est dans A_g. En particulier on en déduit : $U \leq P$ sur V et donc par passage à la limite inf on obtient :
$\liminf_{z \to \zeta_0} P(z) \geq U(\zeta_0) = g(\zeta_0) - \epsilon$ $\square$

Maintenant on va passer à l'adaptation de la démonstration dans le cas d'une barrière du deuxième type en cherchant un remplaçant pour le rôle joué par u_0 qui n'existe plus dans le cas d'une barrière du deuxième type car u n'est plus définie sur ∂V.

Proposition 6.4. *Soit V un ouvert borné et connexe de $\mathbb{C}$ et g une fonction définie et bornée sur ∂V.*
Soit ζ_0 dans ∂V.
On suppose qu'il existe une barrière du deuxième type u en ζ_0 et que g est continue en ζ_0. Alors l'enveloppe supérieure de Perron P correspondante vérifie :

$$\lim_{z \to \zeta_0} P(z) = g(\zeta_0)$$

Preuve 6.8. *Par continuité de g en ζ_0 il existe $\partial V \cap \overline{B(\zeta_0, \delta)}$ $(\delta > 0)$ un voisinage dans ∂V de ζ_0 tel que :*
$\forall \zeta \in \partial V \cap \overline{B(\zeta_0, \delta)}, |g(\zeta) - g(\zeta_0)| < \epsilon$

Fait : *Il existe $\mu < 0$ tel que $\forall z \in V - \overline{B(\zeta_0, \delta)}, u(z) < \mu$.*
En effet sinon : $\forall n \geq 0, \exists\, z_n \in V - \overline{B(\zeta_0, \delta)}, u(z_n) \geq \frac{-1}{n}$. Comme, $\forall n \geq 0, u(z_n) \leq 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \to +\infty} u(z_n) = 0$. Soit z' une valeur d'adhérence de (z_n).
On a donc z' qui est dans $\overline{V}$, et $|z' - \zeta_0| \geq \delta$, en particulier $z' \neq \zeta_0$.
Si z' est dans V alors par continuité de u : $u(z') = 0$ ce qui est impossible car $u < 0$ sur V.
Si z' est dans ∂V alors $\limsup_{z \to z'} u(z) \geq 0$ ce qui est impossible car par définition d'une barrière du deuxième type : $\limsup_{z \to z'} u(z) < 0$.
μ va être notre remplaçant pour le rôle joué par u_0 dans le cas d'une barrière du troisième type.

-On considère la fonction suivante définie sur V :

$$\forall z \in V, U(z) := g(\zeta_0) - \epsilon - \frac{u(z)}{\mu}(M + g(\zeta_0))$$

On va montrer que U est dans A_g.
U est sous-harmonique sur V car $-\frac{1}{\mu}(M + g(\zeta_0) \geq 0$ (proposition 6.2)
Soit ζ un point de $\partial V - \overline{B(\zeta_0, \delta)}$. Soit z dans $V - \overline{B(\zeta_0, \delta)}$. On a $\frac{u(z)}{\mu} > 1$ (par définition de μ) donc :
$U(z) \leq g(\zeta_0) - \epsilon - (M + g(\zeta_0)) = -\epsilon - M \leq g(\zeta) - \epsilon \leq g(\zeta)$. Donc $\limsup_{z \to \zeta} U(z) \leq g(\zeta)$
Soit ζ dans $\partial V \cap \overline{B(\zeta_0, \delta)}$. Alors : $U(z) \leq g(\zeta_0) - \epsilon \leq g(\zeta)$ car $u < 0$ sur V et ζ dans $\partial V \cap \overline{B(\zeta_0, \delta)}$.
Donc $\limsup_{z \to \zeta} U(z) \leq g(\zeta)$.
Ainsi : $\forall \zeta \in \partial V, \limsup_{z \to \zeta} U(z) \leq g(\zeta)$. U est alors dans A_g et donc $\forall z \in V, U(z) \leq P(z)$.
Par suite : $\liminf_{z \to \zeta_0} P(z) \geq \liminf_{z \to \zeta_0} U(z) = g(\zeta_0) - \epsilon$. $\square$

Pour le cas de la première barrière on va avoir besoin d'un lemme supplémentaire qui nécessite un peu de travail et fait légèrement appel à de la théorie de la mesure.

Lemme 6.5 (Lemme de Bouligand)**.** *Soit ζ_0 dans ∂V qui possède une barrière b du premier type en ζ_0.*
Soit B un voisinage de ζ_0 dans $\mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$ fixé.
Alors il existe une fonction sous-harmonique b_ϵ sur V qui vérifie :
$b_\epsilon < 0$ sur V, $b_\epsilon \leq -1$ sur $V - B$ et $\liminf_{z \to \zeta_0} b_\epsilon(z) \geq -\epsilon$

Preuve 6.9. *Soit $\Delta := B(\zeta_0, \delta)$ tel que $\overline{\Delta} \subset B$. Soit K un compact tel que $K \subset V \cap \partial\Delta$ et $L := (V \cap \partial\Delta) - K$ soit de mesure de Lebesgue sur le cercle inférieure à $2\pi\epsilon$ (possible par régularité de la mesure de Lebesgue sur le cercle).*

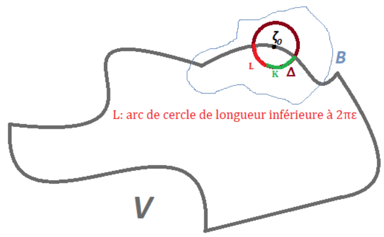

FIGURE 3 – Construction de L

L étant un ouvert de $\partial\Delta$ on en déduit que sa fonction caractéristique $\mathbb{1}_L$ définie sur $\partial\Delta$ est continue sur L.
Donc par le théorème de Schwarz (lemme 4.2) si on note $P_{\mathbb{1}_L}$ l'intégrale de Poisson sur Δ de $\mathbb{1}_L$ on a :
$\forall\zeta \in L, \lim\limits_{z\to\zeta} P_{\mathbb{1}_L}(z) = \mathbb{1}_L(\zeta) = 1$
On pose $m := -\underset{z\in K}{Max}\, b(z)$ de sorte que $m > 0$ car $b < 0$ sur V étant une barrière du premier type et $K \subset V \cap \partial\Delta \subset V$
Soit ζ dans $V \cap \partial\Delta$.
-Si ζ est dans L alors on a vu que : $\underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in V\cap\Delta}}{limsup}\, P_{\mathbb{1}_L}(z) = 1$. On a aussi $\underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in V\cap\Delta}}{limsup}\, \frac{b(z)}{m} \leq 0$ car $b < 0$ sur $V \cap \Delta$ et $m > 0$.
Donc : $\underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in V\cap\Delta}}{limsup} \left(\frac{b(z)}{m} - P_{\mathbb{1}_L}(z)\right) \leq 0 - 1 = -1$
- Si ζ est dans K. On a $\underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in V\cap\Delta}}{limsup}\, \frac{b(z)}{m} = \frac{b(\zeta)}{m}$ par continuité de b en ζ car b continue sur $K \subset V$, et $\frac{b(\zeta)}{m} \leq -1$ par définition de m. On a aussi $P_{\mathbb{1}_L} \geq 0$ sur $V \cap \Delta$ car $\mathbb{1}_L \geq 0$ sur $\partial\Delta$ (proposition 4.2), donc $\underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in V\cap\Delta}}{limsup}\, P_{\mathbb{1}_L}(z) \geq 0$.
Donc : $\underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in V\cap\Delta}}{limsup} \left(\frac{b(z)}{m} - P_{\mathbb{1}_L}(z)\right) \leq -1$
Comme $L \cup K = V \cap \partial\Delta$ on a :

$$\forall\zeta \in V \cap \partial\Delta, \underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in V\cap\Delta}}{limsup} \left(\frac{b(z)}{m} - P_{\mathbb{1}_L}(z)\right) \leq -1$$

On pose alors la fonction b_ϵ définie sur V par : $b_\epsilon(z) = \begin{cases} max(-1, \frac{b(z)}{m} - P_{\mathbb{1}_L}(z)) & si\ z\ \in V \cap \Delta \\ -1 & si\ z \in V - \Delta \end{cases}$
On va vérifier que b_ϵ vérifie les propriétés recherchées.
- On a $-1 < 0$, $-P_{\mathbb{1}_L} \leq 0$ et $\frac{b}{m} < 0$ sur $V \cap \Delta$ donc $\frac{b}{m} - P_{\mathbb{1}_L} < 0$ aussi, ainsi $b_\epsilon < 0$ sur V.
- On a $\Delta \subset B$ donc $V - B \subset V - \Delta$ ainsi $b_\epsilon \leq -1$ sur $V - B$ (on a même égalité).
- On a $\underset{z\to\zeta_0}{liminf}\, b_\epsilon(z) \geq \underset{\substack{z\to\zeta_0 \\ z\in V\cap\Delta}}{liminf} \left(\frac{b(z)}{m} - P_{\mathbb{1}_L}(z)\right)$ puisque Δ est un voisinage de ζ_0 donc on peut se restreindre à ce dernier et par définition de b_ϵ.
Or $\lim\limits_{z\to\zeta_0} \frac{b(z)}{m} = 0$ car b est une barrière du premier type en ζ_0.
Et $\lim\limits_{z\to\zeta_0} P_{\mathbb{1}_L}(z) = P_{\mathbb{1}_L}(\zeta_0)$ car $P_{\mathbb{1}_L}$ est continue sur Δ. (lemme 4.1)
Donc $\underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in V\cap\Delta}}{liminf} \left(\frac{b(z)}{m} - P_{\mathbb{1}_L}(z)\right) = \underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in V\cap\Delta}}{lim} \left(\frac{b(z)}{m} - P_{\mathbb{1}_L}(z)\right) = -P_{\mathbb{1}_L}(\zeta_0)$
Mais en revenant à la définition de $P_{\mathbb{1}_L}$ on a :
$P_{\mathbb{1}_L}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re(\frac{re^{i\theta}-\zeta_0+\zeta_0}{re^{i\theta}+\zeta_0-\zeta_0})\mathbb{1}_L(\zeta_0+\delta e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_L(\zeta_0+\delta e^{i\theta})d\theta$ *ce qui correspond à la mesure de Lebesgue sur le cercle de L divisé par 2π et est donc par construction de L inférieure à ϵ.*
Ainsi : $\underset{z\to\zeta_0}{liminf}\, b_\epsilon(z) \geq -\epsilon$
- On a aussi que b_ϵ est sous-harmonique sur V par le fait suivant :

Fait (Théorème du collage) : *Soit u une fonction sous-harmonique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ et v une fonction sous-harmonique sur un ouvert Y inclus dans U telle que :* $\forall \zeta \in U \cap \partial Y, \underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in Y}}{limsup}\, v(z) \leq u(\zeta)$.

Alors la fonction w définie sur U par : $w(z) = \begin{cases} max(u,v)(z) & si\ z\ \in Y \\ u(z) & si\ z\ \in U - Y \end{cases}$ *est sous-harmonique sur U.*

En effet, on va vérifier que c'est le cas localement. Soit z dans U. D'abord on vérifie la continuité en z de w.
Si z est dans Y c'est bon car Y est ouvert et $max(u,v)$ est une fonction continue.
Si z est dans $U - Y$ alors soit z n'est pas dans ∂Y et est donc dans $U \cap (\partial Y)^c$ qui est ouvert et u est continue donc c'est bon. Sinon z est dans $U \cap \partial Y$ et la condition $\forall \zeta \in U \cap \partial Y, \underset{x\to\zeta}{limsup}\, v(x) \leq u(\zeta)$ appliquée à z nous donne que w est bien continue en z par caractérisation séquentielle de la continuité. Donc dans tous les cas w est continue en z ainsi w est continue sur U.
Ensuite pour le côté sous-harmonique si z est dans Y alors c'est bon car comme pour la continuité Y est ouvert et $max(u,v)$ y est sous-harmonique par la proposition 6.2.
Si z est dans $U - Y$ alors $w(z) = u(z)$ mais $u \leq w$ sur U par définition de w donc on vérifie aisément que w est sous-harmonique en z par la propriété 6.1 car u est sous-harmonique.
Ainsi w est sous-harmonique en tous points de U et est donc sous-harmonique.

En appliquant ce fait à $U = V$, $Y = V \cap \Delta$, $(V - \Delta = V - (V \cap \Delta))$, $u = -1$ fonction constante égale à -1 qui est bien sous-harmonique sur U, $v = (\frac{b}{m} - P_{\mathbb{1}_L})$ qui est bien sous-harmonique sur Y car b l'est étant une barrière du premier type et $P_{\mathbb{1}_L}$ aussi (lemme 4.1). Et on a constaté avant de définir b_ϵ que la condition $\forall \zeta \in U \cap \partial Y, \underset{\substack{z\to\zeta \\ z\in Y}}{limsup}\, v(z) \leq u(\zeta)$ était vérifiée.
Ainsi par le théorème du collage b_ϵ est bien sous-harmonique sur V. $\square$

On constate bien que pour l'existence de b_ϵ on a utilisé les hypothèse (i) à (iii) et non la (iv) de la définition d'une barrière.
Le but de b_ϵ sera de remplacer μ dont l'existence utilise l'hypothèse (iv) et n'a donc plus de raisons d'exister dans le cas d'une barrière du premier type.

Proposition 6.5. *Soit V un ouvert borné et connexe de $\mathbb{C}$ et g une fonction définie et bornée sur ∂V.*
Soit ζ_0 dans ∂V.
On suppose qu'il existe une barrière du premier type u en ζ_0 et que g est continue en ζ_0. Alors l'enveloppe supérieure de Perron P correspondante vérifie :

$$\underset{z\to\zeta_0}{lim} P(z) = g(\zeta_0)$$

Preuve 6.10. *On rappelle que par continuité de g en ζ_0 il existe $\partial V \cap \overline{B(\zeta_0,\delta)}$ $(\delta > 0)$ un voisinage dans ∂V de ζ_0 tel que :* $\forall \zeta \in \partial V \cap \overline{B(\zeta_0,\delta)}, |g(\zeta) - g(\zeta_0)| < \epsilon$ *et* $M = \underset{\zeta\in\partial V}{Sup}\, |g(\zeta)|$.
Soit b_ϵ construit par le lemme précédent associé à $B := B(\zeta_0,\delta)$

-On considère la fonction suivante définie sur V :

$$\forall z \in V, U(z) := g(\zeta_0) - \epsilon + b_\epsilon(z)(M + g(\zeta_0))$$

Le terme "habituel" $\frac{u}{\mu}$ ou $\frac{u}{u_0}$ est caché dans l'expression de b_ϵ qu'on a donné dans la démonstration du lemme.
(b_ϵ dépend de ϵ mais aussi de la barrière du premier type u)

On va montrer que U est dans A_g.
U est sous-harmonique sur V car $(M + g(\zeta_0)) \geq 0$ et b_ϵ l'est.

Soit ζ un point de $\partial V - \overline{B(\zeta_0, \delta)}$. On a $b_\epsilon \leq -1$ sur $V - \overline{B(\zeta_0, \delta)}$ donc
$\forall z \in V - \overline{B(\zeta_0, \delta)}, U(z) \leq g(\zeta_0) - \epsilon - (M + g(\zeta_0)) = -\epsilon - M \leq g(\zeta) - \epsilon \leq g(\zeta)$
Donc $\underset{z \to \zeta}{limsup}\, U(z) \leq g(\zeta)$

Soit ζ dans $\partial V \cap \overline{B(\zeta_0, \delta)}$. On a $b_\epsilon < 0$ sur V donc $\forall z \in V, U(z) \leq g(\zeta_0) - \epsilon \leq g(\zeta)$ par l'inégalité de continuité de g en ζ_0 car ζ dans $\partial V \cap \overline{B(\zeta_0, \delta)}$. Donc : $\underset{z \to \zeta}{limsup}\, U(z) \leq g(\zeta)$.
Ainsi : $\forall \zeta \in \partial V, \underset{z \to \zeta}{limsup}\, U(z) \leq g(\zeta)$. Donc U est bien dans A_g. Par conséquence : $U \leq P$ sur V.
Dès lors : $\underset{z \to \zeta_0}{liminf}\, P(z) \geq \underset{z \to \zeta_0}{liminf}\, U(z) \geq g(\zeta_0) - \epsilon - \epsilon(M + g(\zeta_0)) = g(\zeta_0) - \epsilon(1 + M + g(\zeta_0))$ par définition de b_ϵ.
Donc : $\underset{z \to \zeta_0}{liminf}\, P(z) \geq g(\zeta_0)$. $\square$

Théorème 6.1 (Théorème de Perron-Bouligand)**.** *Soit V un ouvert borné et connexe de $\mathbb{C}$ ayant la propriété que pour tout ζ_0 dans ∂V il existe une barrière du premier/troisième type dans un voisinage de ζ_0. Alors pour tout g dans $C(\partial V)$, l'enveloppe supérieure de Perron P est solution du problème de Dirichlet sur V associé à g, i.e :*

$$P \in C^2(V) \cap C(\overline{V}) \text{ et } \begin{cases} \Delta P = 0 & \text{dans } V \\ P = g & \text{dans } \partial V \end{cases}$$

Preuve 6.11. *On peut appliquer le lemme 6.5 à n'importe quel point de ∂V et ainsi prolonger P sur $\overline{V}$ par continuité avec $P = g$ sur ∂V. Ceci joint au lemme 6.2 nous affirme que P est bel et bien la solution du problème de Dirichet.*

Remarque 6.2.

— *Si V est un ouvert borné connexe où il existe toujours des barrières du premier type sur les points du bord alors par le théorème de Perron-Bouligand il existe aussi des barrières du troisième type.*
  En effet pour z_0 dans ∂V il suffit de prendre la solution au problème de Dirichlet suivant associé à $z \mapsto |z - z_0|$

On a finalement obtenu ce que Perron recherchait , c'est-à-dire une condition générale sur l'ouvert pour que le problème de Dirichlet y admette une solution.
Mais pas tous les ouvert vérifie cette condition comme par exemple $\mathbb{D}^*$ puisque qu'on n'a vu qu'il existe un problème de Dirichlet ne possédant aucune solution. (Dont on imagine bien que le problème vient de 0 qui est dans le bord de $\mathbb{D}^*$ mais pas dans celui de $\mathbb{D}$)

Cependant on va montrer que cette condition est vérifiée pour un ouvert simplement connexe borné et on pourra enfin reprendre la méthode de Riemann où on l'avait laissée car on ne possédait pas encore à ce moment, la justification de l'existence d'une solution du problème de Dirichlet pour un ouvert simplement connexe borné.
(Ce qui peut sembler surprenant car à première vue il n'y a aucun lien entre la notion de simple connexité et l'existence de barrière.)

7 Construction du biholomorphisme

7.1 Lemme d'Osgood

Comme son nom l'indique, l'argument qui va être utilisé pour démontrer le lemme suivant est due essentiellement à Osgood.

Lemme 7.1 (Lemme d'Osgood)**.** *Il existe toujours des barrières du premier type sur les points du bord d'un ouvert borné simplement connexe U.*

Preuve 7.1. *Soit ζ_0 un élément de ∂U. D_{ζ_0} : $\begin{array}{c} U \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z - \zeta_0 \end{array}$ ne s'annule pas donc comme U est simplement connexe il existe une fonction L holomorphe sur U telle que : $\forall z \in U, e^{L(z)} = D_{\zeta_0}(z)$ (argument déjà vu dans la preuve 3.1).*
- On remarque d'abord que L est injective. En effet soient z_1 et z_2 tels que : $L(z_1) = L(z_2)$. Alors $e^{L(z_1)} = e^{L(z_2)}$ et donc $z_1 - \zeta_0 = z_2 - \zeta_0$ ainsi $z_1 = z_2$.
- On a aussi $L(U)$ qui est un ouvert non borné car : $\forall z \in U, e^{\Re(L(z))} = |e^{L(z)}| = |D_{\zeta_0}(z)| = |z - \zeta_0|$
Donc : $\forall z \in U, \Re(L(z)) = \ln|z - \zeta_0| \underset{z \to \zeta_0}{\longrightarrow} -\infty$
- De plus il existe une constante A telle que : $\forall z \in U, \Re(L(z)) < A$ car $\overline{U}$ est compact donc $z \mapsto |z - \zeta_0|$ est borné par une constante $M > 0$ sur $\overline{U}$ et donc à fortiori sur U.
Par suite : $\forall z \in U, \Re(L(z)) = \ln|z - \zeta_0| \leq \ln M$. Donc $A := \ln M + 1$ convient.
- Maintenant on va envoyer U de manière holomorphe $f : U \to V$ vers un ouvert V borné contenu dans un disque $B(z,r)$ tel que : $0 \in \partial B(z,r)$, $0 \in \partial V$ et $\underset{z \to \zeta_0}{lim} f(z) = 0$
Pour ça on obtient f en composant L avec α définie sur $L(U)$ par : $\forall z \in L(U), \alpha(z) = \frac{z-A+1}{z-A-1} - 1$
α est bien définie car si le dénominateur venait à être nul en un point z de $L(U)$ alors : $\Re(z) = A + 1 < A$ ce qui est absurde.
On pose alors $f := \alpha \circ L : U \to \mathbb{C}$ qui est bien holomorphe comme composée de telles fonctions, et $V := \alpha \circ L(U)$
$\forall z \in U, \alpha \circ L(z) = \frac{L(z)-A+1}{L(z)-A-1} - 1 = \frac{2}{L(z)-A-1}$
$\forall z \in U, |\alpha \circ L(z)| = \frac{2}{|L(z)-A-1|}$. Or on a vu que : $|L(z)| \underset{z \to \zeta_0}{\longrightarrow} +\infty$ donc $|\alpha \circ L(z)| \underset{z \to \zeta_0}{\longrightarrow} 0$ i.e $\underset{z \to \zeta_0}{lim} f(z) = 0$.
Par la même occasion on a donc : $0 \in \overline{V}$. Si 0 était dans V, c'est-à-dire qu'il existe z dans $L(U)$ tel que : $\frac{z-A+1}{z-A-1} - 1 = 0$ donc $z - A + 1 = z - A - 1$ et alors $1 = -1$ ce qui est faux donc 0 n'est pas dans V.
Ainsi : $0 \in \partial V$. Notre candidat pour le disque $B(z,r)$ va être $B(-1,1)$. Montrons donc que : $f(U) = V \subset B(-1,1)$.
Soit z dans U alors, $|f(z)+1|^2 = |\frac{L(z)-A+1}{L(z)-A-1}|^2 = \frac{(\Re(L(z))-A+1)^2 + \Im(L(z))^2}{(\Re(L(z))-A-1)^2 + \Im(L(z))^2}$ et ensuite par des manipulations algébrique élémentaires on remarque que cette quantité est strictement inférieure à 1 si et seulement si $\Re(L(z)) < A$ ce qui est le cas par choix de A. Ainsi $V \subset B(-1,1)$.
Et bien sûr : $0 \in \partial B(-1,1)$
f remplit donc les conditions recherchées.
- Désormais on prend une fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonique telle que $h(0) = 0$, $h \leq 0$ sur $\overline{B(-1,1)}$ et $h < 0$ sur $\overline{B(-1,1)} - \{0\}$. Une telle fonction existe, on peut considérer par exemple la fonction qui à un point de $\mathbb{R}^2$ associe son abscisse.
L'application $u := h \circ f : U \to \mathbb{R}$ va alors être une barrière du premier type en ζ_0.
- (i) u est sous-harmonique sur U car harmonique par le lemme 5.1.
- (ii) On a vu que $f(U) \subset B(-1,1)$ et que 0 n'est pas dans $f(U)$ donc par choix de h on a bien $u < 0$ sur U.
- (iii) On a vu que $\underset{z \to \zeta_0}{lim} f(z) = 0$ donc comme $h(0) = 0$ on en déduit que : $\underset{z \to \zeta_0}{lim} u(z) = 0$. □

Ceci combiné au théorème de Perron-Bouligand garanti l'existence d'une solution sur un ouvert borné simplement connexe pour un problème de Dirichelt donné.

7.2 Retour à la Méthode de Riemann

On peut à présent mettre en oeuvre le point essentiel de la méthode de Riemman, i.e considérer la fonction g qui est harmonique sur U (ouvert borné simplement connexe de $\mathbb{C}$) telle que $\forall z \in \partial U, g(z) = -\ln|z|$.
g est la solution sur U du problème de Dirichlet associé à la fonction $z \mapsto -\ln|z|$ qui est bien définie et continue sur ∂U car on a vu qu'on pouvait supposer que 0 était dans U dans la sous-partie 3.3, g existe donc.
À partir de ça on va construire h dont on avait supposé l'existence au début comme moteur de motivation et considérer $H : z \mapsto zh(z)$ qui sera notre biholomorphisme de U dans $\mathbb{D}$.
Et pour ça on va avoir recours au lemme suivant.

Lemme 7.2. *Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$. et $g : U \to \mathbb{R}$ harmonique sur U.*
Alors g est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U.

Preuve 7.2. *Posons $f := \partial_x g - i\partial_y g = f_1 + if_2$.*
On a : $\partial_x f_1 = \partial_x^2 g$ et $\partial_y f_2 = -\partial_y^2 g = \partial_x^2 g = \partial_x f_1$ car $\Delta g = 0$
$\partial_y f_1 = \partial_y \partial_x g = \partial_x \partial_y g = -\partial_x f_2$ par Schwartz car g est C^2.
Donc par les équations de Cauchy-Riemman on en déduit que f est holomorphe sur U. U étant simplement connexe on peut prendre $F := \Re(F) + i\Im(F)$ holomorphe sur U telle que $F' = \partial_x \Re(F) + i\partial_x \Im(F) = f$.
On va montrer que $\Re(F) - g$ est constante.
On a : $\partial_x \Re(F) = \partial_x g$ car $F' = f$.
$\partial_x \Im(F) = -\partial_y \Re(F) = -\partial_y g$ par les équations de Cauchy-Riemann.
Par suite : $\partial_x(\Re(F) - g) = \partial_y(\Re(F) - g) = 0$.
Comme U est connexe on en déduit que $\Re(F) - g$ est constant égale à c. Ainsi $G := \Re(F) - c + i\Im(F)$ est holomorphe car F l'est et de partie réelle g. □

Remarque 7.1.

— *On appelle conjugué harmonique d'une fonction harmonique g, une fonction u telle que g+iu soit holomorphe. Par le lemme 7.2 il existe toujours au moins un conjugué harmonique sur un ouvert simplement connexe.*
— *La formule de Poisson (lemme 4.3) donne une expression explicite des conjugués harmoniques de g dans le cas d'une boule $B(z_0, R)$. En effet g est la partie réelle de :*
$f(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta} - z_0 + z}{Re^{i\theta} + z_0 - z} g(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta + iC$ qui est holomorphe (même raison que pour l'intégrale de Poisson) pour z dans $B(z_0, R)$ et C constante réelle. (on l'appelle la formule de Schwarz)
Il suffit de prendre la partie imaginaire.

Soit alors u un conjugué harmonique de g et posons la fonction h définie et donc holomorphe sur U par :
$\forall z \in U, h(z) = e^{g(z)+iu(z)}$ et $H : z \mapsto zh(z)$ holomorphe sur U.

Lemme 7.3. *H admet uniquement 0 comme zéro et il est de multiplicité 1. De plus H est à valeur dans $\mathbb{D}$.*

Preuve 7.3. *On remarque immédiatement que h ne s'annulant bien évidemment jamais, 0 est alors le seul zéro de H et est de multiplicité 1 (car $\forall z \in U, H'(z) = h(z) + zh'(z)$ donc $H'(0) = h(0) \neq 0$).*
De plus : $\forall z \in U, |H(z)| = |z|e^{g(z)}$ donc on peut prolonger $|H|$ sur $\overline{U}$ par continuité en posant : $\forall z_0 \in \partial U, |H(z_0)| = 1$, en effet : $\lim\limits_{z \to z_0} |z|e^{g(z)} = |z_0|e^{-\ln|z_0|} = 1$.
Ainsi $|H|$ admet un maximum sur $\overline{U}$ par argument de compacité. Si le maximum était atteint sur U alors par le principe du maximum (proposition 2.3) H serait constant sur U, i.e que H serait identiquement nulle sur U car $H(0) = 0$. Or on n'a vu que 0 est le seul zéro de H ce qui est absurde.
Ainsi le maximum de $|H|$ est atteint sur ∂U. Comme $|H|$ est identiquement égale à 1 sur ∂U le maximum de $|H|$ est donc 1 et comme il n'est pas atteint sur U on en déduit que : $\forall z \in U, |H(z)| < 1$ i.e $H : U \to \mathbb{D}$. □

H est comme déjà dit notre candidat pour le biholomorphisme sur $\mathbb{D}$, il reste maintenant à le vérifier.

7.3 Quadrillage du plan complexe

Nous allons approcher notre ouvert U de $\mathbb{C}$ par des courbes représentant des carrés.
L'objectif va être de regarder le nombre de fois que H atteint une valeur fixé ω dans $\mathbb{D}$ (résultat qu'on veut évidemment égal à 1, ce qui permettra de conclure car on sait déjà que H est à valeur dans $\mathbb{D}$) et on va voir que pour regarder les antécédents de ω dans U il suffit de regarder ceux dans les carrés approchant U.
Formellement on procède à la construction en posant pour N fixé dans $\mathbb{N}$:

$$(S_N^{n_1,n_2})_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} := \{x+iy \in \mathbb{C}, \frac{n_1}{2^N} \leq x \leq \frac{n_1+1}{2^N}, \frac{n_2}{2^N} \leq y \leq \frac{n_2+1}{2^N}\}$$

Il s'agit d'une famille de carrés dont les côtés sont de longueur $\frac{1}{2^N}$.

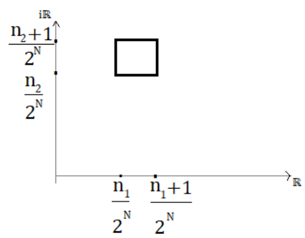

FIGURE 4 – Le carré $S_N^{n_1,n_2}$

Cette famille recouvre tous le plan complexe par des carrés d'aire $(\frac{1}{2^N})^2$ qui s'intersectent soit sur un sommet soit sur une arrête.

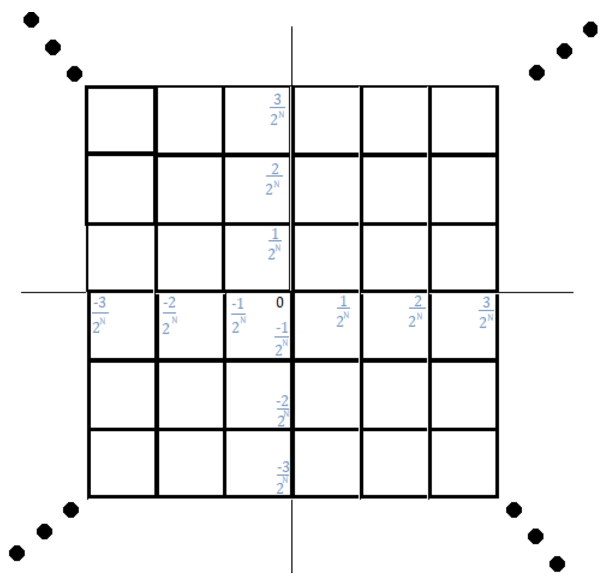

FIGURE 5 – Quadrillage du plan complexe d'ordre N

Puisque qu'on veut approcher U par ces carrés on pose naturellement :

$$T_N := \{(N,n_1,n_2),(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2, S_N^{n_1,n_2} \subset U\} \quad \text{et} \quad S_N := \bigcup_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2\\(N,n_1,n_2)\in T_N}} S_N^{n_1,n_2}$$

Soit $K \subset U$ un compact. On va se fixer l'objectif intermédiaire suivant :
Trouver N_K dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall N \geq N_K, K \subset \mathring{S}_N$
Pour accomplir cela on va avoir besoin de deux lemmes au préalable qui sont dans un sens intuitif tout comme l'est notre objectif.

Lemme 7.4. *$(\mathring{S}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion i.e : $\forall N \in \mathbb{N}, \mathring{S}_N \subset \mathring{S}_{N+1}$*

Preuve 7.4. *Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. Graphiquement on voit immédiatement d'où ça vient. En effet chaque carré de la famille correspondant à N concorde avec l'union de 4 carrés de la famille correspondant à N+1.*

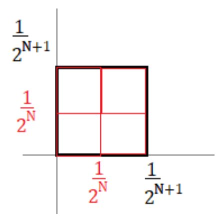

FIGURE 6 – Découpage en 4

Plus explicitement pour (n_1, n_2) dans $\mathbb{Z}^2$ on va montrer que :

$$S_N^{n_1,n_2} = S_{N+1}^{2n_1,2n_2} \cup S_{N+1}^{2n_1+1,2n_2+1} \cup S_{N+1}^{2n_1,2n_2+1} \cup S_{N+1}^{2n_1+1,2n_2}$$

On va procéder par double inclusion.
Soit (x, y) dans $S_N^{n_1,n_2}$. On a $\frac{n_1}{2^N} \leq x \leq \frac{n_1+1}{2^N}$.
1er cas : $x \leq \frac{2n_1+1}{2^{N+1}}$ alors $\frac{n_1}{2^N} = \frac{2n_1}{2^{N+1}} \leq x \leq \frac{2n_1+1}{2^{N+1}}$
2ème cas : $x > \frac{2n_1+1}{2^{N+1}}$ alors $\frac{2n_1+1}{2^{N+1}} \leq x \leq \frac{n_1+1}{2^N} = \frac{2(n_1+1)}{2^{N+1}}$ On fait de même avec y en remplaçant n_1 par n_2. On obtient ainsi 4 cas en tous correspondant au découpage en 4.
En d'autre termes on constate que : $(x, y) \in S_{N+1}^{2n_1,2n_2} \cup S_{N+1}^{2n_1+1,2n_2+1} \cup S_{N+1}^{2n_1,2n_2+1} \cup S_{N+1}^{2n_1+1,2n_2}$
D'où la première inclusion.
Comme on a $\frac{n_1}{2^N} = \frac{2n_1}{2^{N+1}}$ et $\frac{2n_1+2}{2^{N+1}} = \frac{n_1+1}{2^N}$ (idem avec n_2) on constate aisément que : $S_{N+1}^{2n_1+1,2n_2+1} \subset S_N^{n_1,n_2}$, $S_{N+1}^{2n_1,2n_2} \subset S_N^{n_1,n_2}$, $S_{N+1}^{2n_1,2n_2+1} \subset S_N^{n_1,n_2}$ et $S_{N+1}^{2n_1+1,2n_2} \subset S_N^{n_1,n_2}$. D'où la seconde inclusion.
Soit $S_N^{n_1,n_2} \subset U$ alors d'après ce qui précède : $S_{N+1}^{2n_1,2n_2}, S_{N+1}^{2n_1+1,2n_2}, S_{N+1}^{2n_1,2n_2+1}, S_{N+1}^{2n_1+1,2n_2+1} \subset U$
Donc $S_N^{n_1,n_2} = S_{N+1}^{2n_1,2n_2} \cup S_{N+1}^{2n_1+1,2n_2+1} \cup S_{N+1}^{2n_1,2n_2+1} \cup S_{N+1}^{2n_1+1,2n_2} \subset S_{N+1}$ par définition de S_{N+1}.
Ainsi $S_N^{n_1,n_2}$ étant prit arbitrairement tel que $S_N^{n_1,n_2} \subset U$ on a : $\bigcup_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ (N,n_1,n_2)\in T_N}} S_N^{n_1,n_2} \subset S_{N+1}$ i.e $S_N \subset S_{N+1}$.

En particulier : $\mathring{S}_N \subset \mathring{S}_{N+1}$ $\square$

On notera que $(\mathring{S}_N^{n_1,n_2})_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} := \{x + iy \in \mathbb{C}, \frac{n_1}{2^N} < x < \frac{n_1+1}{2^N}, \frac{n_2}{2^N} < y < \frac{n_2+1}{2^N}\}$

Lemme 7.5.

$$\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathring{S}_N = U$$

Preuve 7.5. *Par définition on a directement : $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathring{S}_N \subset U$.*

Soit $z := x + iy$ dans U. Soit $r > 0$ tel que $B(z, r) \subset U$. On cherche M tel que z soit dans $\mathring{S}_M = \overbrace{\bigcup_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ (M,n_1,n_2)\in T_M}} S_M^{n_1,n_2}}^{\circ}$

Soit M dans $\mathbb{N}$ assez grand pour que $\frac{1}{2^{M-\frac{3}{2}}} < r$. L'idée est que peu importe le quadrillage du plan complexe d'ordre

M qu'on effectue, z sera soit à l'intérieur d'un des carrés, soit à l'intersection de deux arrêtes, soit à l'intersection de quatre sommets. On aimerait donc que ces carrés soit dans U et pour cela on maximise nos chances en prenant un M de sorte que les carrés correspondant aient un diamètre plus petit que le rayon de la boule. Le diamètre est la plus grande distance entre deux points dans un ensemble, ici pour un carré c'est la longueur diagonale ce qui donne pour un carré de longueur M, $\frac{1}{2^{M-\frac{1}{2}}}$ et le rayon est r. Comme dans l'un des cas on a 4 carrés le diamètre va être doubler pour devenir $\frac{1}{2^{M-\frac{3}{2}}}$ d'où le choix de M.
Posons $A_M := \{\frac{m}{2^M}, m \in \mathbb{Z}\}$. On veut naturellement prendre des éléments de A_M qui soient les plus proches possible de x et y. On pose alors $m_1 := sup(\{m \in \mathbb{Z}, \frac{m}{2^M} \leq x\})$ et $m_2 := sup(\{m \in \mathbb{Z}, \frac{m}{2^M} \leq y\})$ (ce sont des max).
Par définition de m_1 et m_2 on a : $\frac{m_1}{2^M} \leq x < \frac{m_1+1}{2^M}$ et $\frac{m_2}{2^M} \leq y < \frac{m_2+1}{2^M}$ On va enfin pourvoir étudier les 3 cas dont nous parlions.
***-1er cas :** $x \notin A_M$ et $y \notin A_M$. Alors on a : $\frac{m_1}{2^M} < x < \frac{m_1+1}{2^M}$ et $\frac{m_2}{2^M} < y < \frac{m_2+1}{2^M}$ et donc $z \in \mathring{S}_M^{m_1,m_2}$.*
Soit $u := a + ib$ dans $S_M^{m_1,m_2}$. On a $|z-u| \leq diam(S_M^{m_1,m_2}) = \frac{1}{2^{M-\frac{1}{2}}} < \frac{1}{2^{M-\frac{3}{2}}} < r$ Donc : $S_M^{m_1,m_2} \subset B(z,r) \subset U$.
Ainsi $S_M^{m_1,m_2} \subset S_M$ et donc $\mathring{S}_M^{m_1,m_2} \subset \mathring{S}_M$. Par suite : $z \in \mathring{S}_M$.

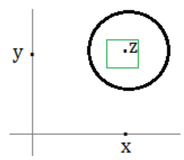

FIGURE 7 – 1er cas

***-2ème cas :** $x \in A_M$ et $y \notin A_M$. Donc $x = \frac{m_1}{2^M}$ et $\frac{m_2}{2^M} < y < \frac{m_2+1}{2^M}$. Ainsi on vérifie que $z \in \overbrace{S_M^{m_1,m_2} \cup S_M^{m_1-1,m_2}}^{\circ}$.*
Et de même que au 1er cas par choix de M on a $S_M^{m_1,m_2} \cup S_M^{m_1-1,m_2} \subset B(z,r) \subset U$ donc $S_M^{m_1,m_2} \cup S_M^{m_1-1,m_2} \subset S_M$ et ainsi $z \in \mathring{S}_M$.

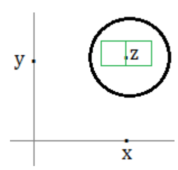

FIGURE 8 – 2ème cas

Le cas $x \notin A_M$ et $y \in A_M$ est totalement analogue.

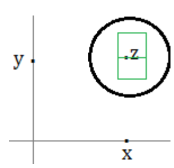

FIGURE 9 – 2ème cas bis

***-3ème cas :** $x \in A_M$ et $y \in A_M$. On a alors $z \in \overbrace{S_M^{m_1,m_2} \cup S_M^{m_1-1,m_2} \cup S_M^{m_1-1,m_2-1} \cup S_M^{m_1,m_2-1}}^{\circ}$.*
Et encore par choix de M on a $S_M^{m_1,m_2} \cup S_M^{m_1-1,m_2} \cup S_M^{m_1-1,m_2-1} \cup S_M^{m_1,m_2-1} \subset B(z,r) \subset U$ et donc $S_M^{m_1,m_2} \cup S_M^{m_1-1,m_2} \cup S_M^{m_1-1,m_2-1} \cup S_M^{m_1,m_2-1} \subset S_M$. Par conséquence $z \in \mathring{S}_M$.

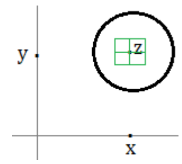

FIGURE 10 – 3ème cas

On a donc dans tous les cas $z \in \mathring{S}_M$. Ainsi : $z \in \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathring{S}_M$. D'où la seconde inclusion car z est pris arbitrairement dans U. $\square$

On va alors pouvoir atteindre notre objectif intermédiaire.

Proposition 7.1. *Soit $K \subset U$ un compact. $\exists N_K \in \mathbb{N}, \forall N \geq N_K, K \subset \mathring{S}_N$*

Preuve 7.6. *$K \subset U = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \mathring{S}_N$. Or K est compact donc par la propriété de Heine-Borel on a qu'il existe N_K dans $\mathbb{N}$ tel que : $K \subset \bigcup_{N=0}^{N_K} \mathring{S}_N$. Mais on a vu que $(\mathring{S}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion donc : $\bigcup_{N=0}^{N_K} \mathring{S}_N = \mathring{S}_{N_K}$ et par suite : $\forall N \geq N_K, K \subset \mathring{S}_N$* $\square$

7.4 Intégration sur le quadrillage

On va maintenant vouloir intégrer sur le quadrillage d'ordre N pour N fixé dans $\mathbb{N}$.
Pour ce faire on oriente les lacets définissant les bords des carrés de manière naturelle i.e telle que l'intérieur du carré se trouve à gauche lorsque l'on se déplace sur le courbe afin d'intégrer sur les lacets parcourant les côtés.

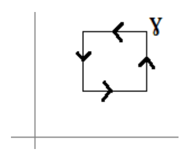

FIGURE 11 – Intégration sur $S_N^{n_1,n_2}$

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui est continue au voisinage de toutes les arrêtes des carrés formant le quadrillage.
Si $S_N^{n_1,n_2}$ est le carré sur la figure alors $\int_{S_N^{n_1,n_2}} f(z)dz$ est définie par : $\int_{S_N^{n_1,n_2}} f(z)dz := \int_\gamma f(z)dz$
Naturellement on définit aussi :

$$\int_{S_N} f(z)dz := \sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ (N,n_1,n_2)\in T_N}} \int_{S_N^{n_1,n_2}} f(z)dz \quad \text{(la somme est finie)}$$

Il s'agit tout simplement d'une intégrale sur un chemin. En effet il existe une famille finie de lacets $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ telle que : $\int_{S_N} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)dz$

Cela vient du fait que sur l'intersection des arrêtes des carrés inclus dans U les intégrales s'annulent.

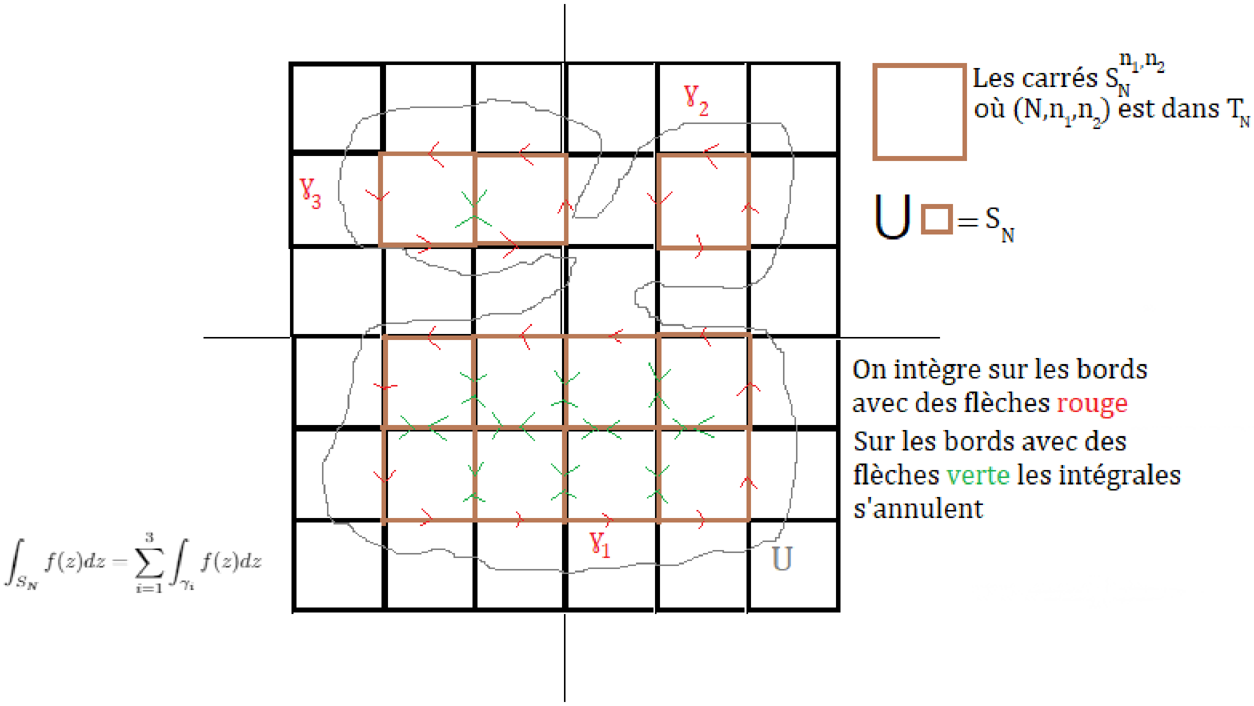

FIGURE 12 – Intégration sur S_N

7.5 Achèvement de la démonstration du théorème par la méthode de Riemann

Avec les idées vues précédemment en tête et la fonction H définie dans la partie 7.2, on formule le lemme ultime pour démontrer que H est bien un biholomorphisme de U dans $\mathbb{D}$.

Lemme 7.6. *Soit $0 < r < 1$ fixé : 1. Il existe $N_r > 0$ tel que : $\forall N \geq N_r, H^{-1}(\{z, |z| \leq r\}) \subset \mathring{S}_N$*
2. De plus pour n'importe quel $N \geq N_r$, fixé, le nombre de fois que H atteint une valeur ω fixé avec $|\omega| < r$ est exactement (avec multiplicité) : $\frac{1}{2i\pi}\int_{S_N} \frac{H'(z)}{H(z)-\omega}dz$

Preuve 7.7. *1. On a vu dans le lemme 7.3 que l'application $|H| : \overline{U} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \begin{cases} |H(z)| & si\ z \in U \\ 1 & si\ z \in \partial U \end{cases}$ est continue. Donc $|H|^{-1}([0,r])$ est un fermé de $\overline{U}$ qui est compact donc c'est un compact.*
Or $H^{-1}(\{z, |z| \leq r\}) = |H|^{-1}([0,r])$ (car $0 < r < 1$) donc $H^{-1}(\{z, |z| \leq r\})$ est un compact inclus dans U. Ainsi on conclue le premier point avec la propriété 7.1.

2. Par le premier point si z est tel que $H(z) = \omega$ alors $z \in \mathring{S}_N$.
Donc les zéros de $z \mapsto H(z) - \omega$ sont dans $\mathring{S}_N$.
On va aussi voir que le nombre d'antécédents de ω est fini.
En effet l'ensemble des zéros est dans S_N qui est compact, donc comme U est connexe par le principe des zéros isolé (proposition 2.2) on conclue.
Maintenant deux cas se présentent :
1er cas : *ω n'a aucun antécédent sur les bords des carrés $S_N^{n_1,n_2} \subset U$.*
Alors on peut appliquer le théorème de l'indice (théorème 2.3).
Ainsi pour $S_N^{n_1,n_2} \subset U$ fixé, en appliquant le théorème avec $f : z \mapsto H(z) - \omega$ qui a comme préalablement vu un

nombre fini de zéros et aucun pôle car holomorphe, et $g = 1$ on obtient :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{S_N^{n_1,n_2}}\frac{H'(z)}{H(z)-\omega}dz = \sum_{k=1}^{m} Ind_{S_N^{n_1,n_2}}(w_k) = m$$

Où $(w_k)_{1\leq k\leq m}$ sont les zéros de f situé dans l'intérieur de $S_N^{n_1,n_2}$ (comptés avec leur multiplicité) puisque on voit aisément que $\forall 1 \leq k \leq m, Ind_{S_N^{n_1,n_2}}(w_k) = 1$ et sinon l'indice est nul si le zéro est à l'extérieur de $S_N^{n_1,n_2}$.
Donc $\frac{1}{2i\pi}\int_{S_N^{n_1,n_2}}\frac{H'(z)}{H(z)-\omega}dz$ est le nombre d'antécédents de ω dans $S_N^{n_1,n_2}$. Pour avoir le nombre total on somme toutes les intégrales, i.e que le nombre total d'antécédents de ω (avec multiplicité) est :
$\sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ (N,n_1,n_2)\in T_N}} \frac{1}{2i\pi}\int_{S_N^{n_1,n_2}}\frac{H'(z)}{H(z)-\omega}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{S_N}\frac{H'(z)}{H(z)-\omega}dz$
2ème cas : *Si ω est atteint sur le bord d'un carré $S_N^{n_1,n_2} \subset U$.*
Ce cas est plus délicat car on ne peut plus appliquer le théorème de l'indice sur $S_N^{n_1,n_2}$ car le lacet γ définissant le bord de $S_N^{n_1,n_2}$ rencontre au moins l'un des zéros de $f : z \mapsto H(z) - \omega$.

On va maintenant contourner le problème en modifiant légèrement la construction du quadrillage de sorte que le milieu de ce dernier soit en (λ, λ) avec $\lambda > 0$ et non plus en $(0, 0)$.
On considère alors pour N dans $\mathbb{N}$ fixé les carrés de la forme :

$$(S_N^{n_1,n_2}(\lambda))_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} := \{x + iy \in \mathbb{C}, \frac{n_1}{2^N} + \lambda \leq x \leq \frac{n_1+1}{2^N} + \lambda, \frac{n_2}{2^N} + \lambda \leq y \leq \frac{n_2+1}{2^N} + \lambda\}$$

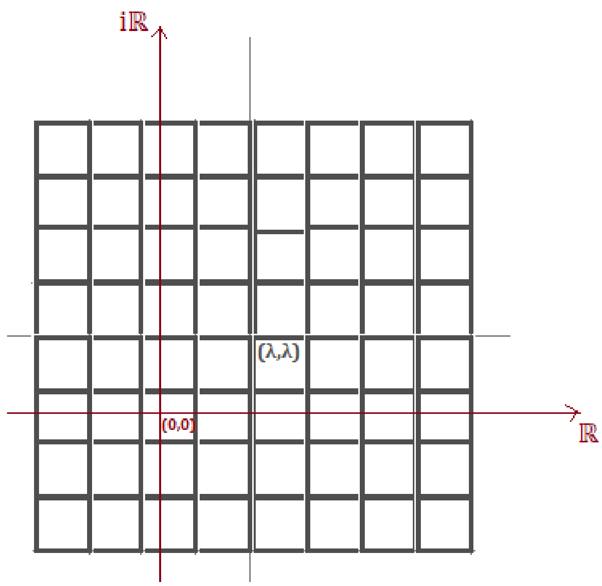

FIGURE 13 – Quadrillage du plan complexe à partir de (λ, λ)

On définit de manière similaire au cas $(0, 0)$:

$$S_N(\lambda) := \bigcup_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ (N,n_1,n_2)\in T_N}} S_N^{n_1,n_2}(\lambda)$$

On remarque que T_N ne change pas et ne dépend donc pas de λ.

- *Fait 1 :* *Il existe* $\lambda > 0$ *tel que les arrêtes des carrés* $(S_N^{n_1,n_2}(\lambda))_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2}$ *ne contiennent aucun antécédent de* ω. *Et* λ *peut être pris aussi proche de 0 qu'on veut.*

Soient $w_k := x_k + iy_k$, $1 \leq k \leq m$, *les antécédents de* ω *qui sont en nombre fini comme on l'a vu (*m *est dans* $\mathbb{N}$*).* *Soit* $\epsilon > 0$ *fixé. On a :* $]x_1 - \epsilon, x_1[\cap(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ *qui est bien sûr indénombrable donc* $X_1 := \{\lambda \in]0, \epsilon[, x_1 - \lambda \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\}$ *est aussi indénombrable. De même* $Y_1 := \{\lambda \in X_1, y_1 - \lambda \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\}$ *est aussi indénombrable.*
On construit alors par récurrence finie les ensembles suivants : $\forall\, 2 \leq i \leq m, X_i := \{\lambda \in Y_{i-1}, x_i - \lambda \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\}$ *et* $Y_i := \{\lambda \in X_i, y_i - \lambda \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\}$. *Ils vont donc être indénombrable chacun.*
On prend alors λ *dans* Y_m. *Par définition :* $Y_m \subset X_m \subset Y_{m-1} \subset X_{m-1} \subset \dots \subset Y_1 \subset X_1 \subset]0, \epsilon[$.
Donc : $\forall\, 1 \leq i \leq m, \lambda \in X_i$ *et* $\lambda \in Y_i$. *C'est-à-dire :* $\forall\, 1 \leq i \leq m, \quad x_i - \lambda, y_i - \lambda \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$
Ainsi les $(w_i)_{1\leq i\leq m}$ *ne sont pas sur les côtés de* $(S_N^{n_1,n_2}(\lambda))_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2}$. *De plus* λ *est dans* $]0, \epsilon[$ *donc* λ *peut être pris aussi proche qu'on veut de 0.*

- *Fait 2 :* *Si* λ *est assez proche de 0 alors on aura* $S_N(\lambda) \subset U$.

Par un argument classique on sait que $d := dist(S_N, U^c) > 0$ *car* S_N *est compact,* U^c *est fermé et ils sont disjoints puisque* $S_N \subset U$. *Il suffit alors de prendre* λ *tel que* $\lambda < \frac{d}{\sqrt{2}}$. *En effet, soit un tel* λ *et* z *dans* $S_N(\lambda)$, *alors par définition :* $z - \lambda(1+i) \in S_N$. *Or :* $|z - (z - \lambda(1+i))| = \lambda\sqrt{2} < d$. *Par conséquence :* $z \in U$ *car* $z - \lambda(1+i) \in S_N$ *sinon on aurait une contradiction avec la définition de* d.

- *Fait 3 :* *On a* $H^{-1}(\{z, |z| \leq r\}) \subset \mathring{S}_N(\lambda)$

De même on a $d' := dist(H^{-1}(\{z, |z| \leq r\}), (\mathring{S}_N)^c) > 0$ *car* $H^{-1}(\{z, |z| \leq r\})$ *est compact,* $(\mathring{S}_N)^c$ *est fermé et ils sont disjoints puisque* $H^{-1}(\{z, |z| \leq r\}) \subset \mathring{S}_N$. *Il suffit alors de prendre* λ *tel que* $\lambda < \frac{d'}{\sqrt{2}}$. *En effet soit un tel* λ *et* z *dans* $(\mathring{S}_N(\lambda))^c$. *Alors par définition* $z - \lambda(1+i) \in (\mathring{S}_N)^c$. *Or :* $|z - (z - \lambda(1+i))| = \lambda\sqrt{2} < d'$. *Par conséquence* $z \in (H^{-1}(\{z, |z| \leq r\}))^c$ *car* $z - \lambda(1+i) \in (\mathring{S}_N)^c$ *sinon on aurait une contradiction avec la définition de d'.*

Avec les 3 faits et un argument similaire au 1er cas on en déduit que il existe λ *proche de 0 tel que le nombre d'antécédents de* ω *comptés avec leur multiplicité est :* $\frac{1}{2i\pi}\int_{S_N(\lambda)} \frac{H'(z)}{H(z)-\omega}dz$. *De plus* $\partial S_N(\lambda)$ *ne contient aucun antécédent de* w *pour n'importe quel* w *tel que* $|w| \leq r$ *par le fait 3. Donc* $(z, w) \mapsto |H(z) - w|$ *possède un minimum* δ *strictement positif sur le compact* $\partial S_N(\lambda) \times \overline{D(0, r)}$. *Donc :* $\forall z \in \partial S_N(\lambda), |H(z) - \omega| \geq \delta$.
On en déduit la continuité de $\lambda \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{S_N(\lambda)} \frac{H'(z)}{H(z)-\omega}dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{S_N+\lambda(1+i)} \frac{H'(z)}{H(z)-\omega}dz$ *par convergence dominée.*

On peut alors faire tendre λ *vers 0 (en prenant une suite donnée par le fait 1) et ainsi obtenir le 2ème point par continuité.* $\square$

On conclut avec la dernière propriété qui achevera la démonstration du théorème de la représentation conforme de Riemann par sa méthode.

Proposition 7.2. *$H : U \to \mathbb{D}$ est un biholomorphisme*

Preuve 7.8. *Soit ω dans $\mathbb{D}$. On prend r tel que $|\omega| < r < 1$*
Par le lemme précédent, le nombre d'antécédents comptés avec leur multiplicité d'un point w dans $\{z, |z| < r\}$ est donné par $\frac{1}{2i\pi}\int_{S_N} \frac{H'(z)}{H(z)-w}dz$ pour un N assez grand. Or $w \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{S_N} \frac{H'(z)}{H(z)-w}dz$ est une fonction continue sur $\{z, |z| < r\}$ car (argument totalement analogue à celle donné à la fin de la preuve précédente) ∂S_N ne contient aucun antécédent de w pour n'importe quel w tel que $|w| \leq r$ puisque $H^{-1}(\{z, |z| \leq r\}) \subset \mathring{S}_N$. Donc $(z, w) \mapsto |H(z) - w|$ possède un minimum δ strictement positif sur le compact $\partial S_N \times \overline{D(0, r)}$.
Donc : $\forall z \in \partial S_N(\lambda), \forall w \in D(0, r), |H(z) - w| \geq \delta$. Ainis par convergence dominée on a la continuité.

$w \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{S_N} \frac{H'(z)}{H(z)-w}dz$ est aussi à valeurs dans $\mathbb{Z}$ valant 1 en $w = 0$ par le lemme 7.3. Comme $\{z, |z| < r\}$ est connexe on en déduit que la fonction vaut partout 1. Ainsi H atteint la valeur ω exactement une fois donc H est un biholomorphisme de U dans $\mathbb{D}$. $\square$

$\square$

Références

[1] Greene, R.E., Kim, KT. *The Riemann mapping theorem from Riemann's viewpoint.* Complex Anal Synerg **3**, 1 (2017). https ://doi.org/10.1186/s40627-016-0009-7

[2] Lars V. Ahlfors, *Complex analysis an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable.* New York : McGraw-Hill Book Company, 2e édition, 1966

[3] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane.* Cambridge University Press, Cambridge (2003)