

TER
Solutions entropiques de lois de conservation

Thomas Mietton

Mai 2017

Table des matières

Introduction	2
1 Solutions classiques	3
1.1 Cas linéaire	3
1.2 Cas non linéaire par la méthode des caractéristiques	3
2 Solutions faibles	6
2.1 Définition	6
2.2 La condition de Rankine-Hugoniot	8
2.3 Non-unicité du problème de Cauchy	12
3 Approximation parabolique	13
3.1 Définition du problème	13
3.2 Résolution par une méthode de point fixe	15
3.3 Régularité, existence globale, passage à la limite	17
4 Solutions entropiques	18
Annexe	19
Références	20

Introduction

L'objet de ce TER est d'étudier les équations aux dérivées partielles s'écrivant sous la forme d'une loi de conservation. Un système physique est caractérisé par des variables intensives sous la forme d'un champ de vecteurs :

$$\begin{aligned} u &: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longmapsto u(x, t) = (u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Si \vec{q}_i représente le flux de la variable u_i et g_i l'interaction avec les champs extérieurs, la conservation de la variable u du système s'écrit sous la forme :

$$\partial_t u_i + \operatorname{div}_x \vec{q}_i = g_i \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Dans l'ensemble de ce travail, on considérera l'équation sans second membre ($g_i = 0$) et on travaillera en dimension 1, à la fois en espace et pour la variable u ($d = n = 1$). De plus, la résolution de ce type d'équation suppose qu'on ait une relation entre q et u appelée loi d'état. On se place dans le cas où cette relation peut être mise sous la forme $q = f(u)$ et on supposera dans toute la suite que f est une fonction \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . La loi de conservation s'écrit donc sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f(u)}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (1)$$

Illustrons cela par un exemple simple : celui du trafic routier. On considère une autoroute unidimensionnelle dont on veut modéliser le trafic. On note $\rho(x, t)$ la densité du trafic (c'est-à-dire le nombre de voitures par unité de distance) à un endroit et un temps donnés, et le flux q du nombre de voitures s'écrit $q = \rho v$ avec $v(x, t)$ la vitesse moyenne des voitures en (x, t) . Si l'on considère en un point (x, t) une variation infinitésimale d'espace δx et une variation infinitésimale de temps δt , la variation du nombre de voitures dans $[x, x + \delta x]$ entre t et $t + \delta t$ est égale à $(\rho(x, t + \delta t) - \rho(x, t))\delta x$. Elle est aussi égale au nombre de voitures entrées dans $[x, x + \delta x]$ moins le nombre de voitures qui en sont sorties, qui est $(q(x, t) - q(x + \delta x))\delta t$. On a donc $\delta_t \rho \delta x = -\delta_x q \delta t$, ce qui donne la loi de conservation :

$$\partial_t \rho + \partial_x q = 0.$$

Une loi de conservation n'est en fait rien d'autre que la caractérisation d'une conservation de "matière", ici le nombre de voitures. Il reste à établir le lien entre ρ et q , et pour cela on peut considérer que les automobilistes régulent leur vitesse en fonction de la densité de trafic selon une fonction $v = V(\rho)$, où la vitesse en cas de trafic nul est égale à la limite maximale ($V(0) = 130$) et elle est décroissante et atteint 0 quand le trafic est suffisamment dense (en cas de bouchon). On a donc $q = f(\rho)$ avec $f(\rho) = \rho V(\rho)$.

Si l'on veut modéliser de manière plus précise, on pourrait considérer que les conducteurs anticipent en fonction des variations de la densité : ils accélèrent si le trafic s'éclaircit et freinent s'il se densifie. On peut donc écrire v sous la forme $v = V(\rho) - \epsilon \partial_x \rho$ avec $0 < \epsilon \ll 1$. L'équation vérifiée par ρ n'est alors plus une loi de conservation sous la forme qu'on a définie, mais une équation parabolique :

$$\partial_t \rho + \partial_x f(\rho) - \epsilon \partial_x (\rho \partial_x \rho) = 0$$

On verra l'importance de ce type d'équations par la suite.

1 Solutions classiques

Nous allons commencer par étudier les solutions dites classiques, c'est-à-dire suffisamment régulières pour être directement solutions de la loi de conservation. Toutes les fonctions que nous utilisons sont considérées à valeurs réelles sauf mention contraire.

Définition 1.1. Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Alors u est dite *solution classique de la loi de conservation* (1) si $u \in \mathcal{C}^1(\omega)$ et u vérifie (1) en tout point de ω

Définition 1.2. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ bornée, et $T \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Alors u est dite *solution classique du problème de Cauchy associé à (1) sur $]0, T[$* si $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, T])$, u est solution classique de (1) sur $\mathbb{R} \times]0, T[$ et $u(x, 0) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1.1 Cas linéaire

Examinons d'abord le cas où l'équation est linéaire, c'est-à-dire où f est de la forme $f(u) = cu$, avec c une constante.

On a alors, si $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{C}^1$ est solution du problème de Cauchy,

$$\frac{d}{dt}u(x+ct, t) = c \frac{\partial u}{\partial x}(x+ct, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x+ct, t) = 0.$$

Cela montre que $u(x+ct, t)$ est constante en temps, égale à $u(x, 0) = u_0(x)$. Dit autrement, la condition initiale se propage de manière constante dans le temps à la vitesse c . Cela détermine de manière unique la solution

$$u(x, t) = u_0(x - ct),$$

par simple translation de la variable, qui réciproquement vérifie bien l'équation aux dérivées partielles. Le cas linéaire nous donne donc une unique solution définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et de même régularité que u_0 .

1.2 Cas non linéaire par la méthode des caractéristiques

Ici, f est une fonction quelconque. Par analogie avec le cas linéaire, on note $c(u) = f'(u)$. La loi de conservation s'écrit donc sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Soit $u \in \mathcal{C}^1$ solution du problème de Cauchy sur $]0, T[$ pour une condition initiale u_0 donnée. L'idée de la méthode des caractéristiques est de trouver une courbe $(X(t), t)$ où la solution u est constante (de même que dans le cas linéaire, la solution est constante le long de $t \mapsto (x+ct, t)$). En supposant $X \in \mathcal{C}^1$, on a

$$\frac{d}{dt}u(X(t), t) = \frac{dX}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}(X, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(X, t) = \left(\frac{dX}{dt} - c(u(X, t)) \right) \frac{\partial u}{\partial x}(X, t).$$

On en vient donc logiquement à définir $X(t)$ comme solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dX}{dt} = c(u(X, t)). \tag{2}$$

Une courbe caractéristique se définit donc ainsi :

Définition 1.3. Soit I un intervalle ouvert dans $[0, T[$. Une *courbe caractéristique* de la solution u sur I est une courbe paramétrée $\{(X(t), t), t \in I\}$, avec $X \in \mathcal{C}^1(I)$ vérifiant l'équation différentielle (2) en tout point de I .

On peut démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.1. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, T[)$ solution de (1).

Alors pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T[$, il existe une unique caractéristique maximale passant par (x, t) définie sur $[0, T[$, le long de laquelle u est constante.

Les caractéristiques sont alors exactement les portions de droites d'équation $X(s) = y + s c(u_0(y))$ pour $s \in [0, T[$, y décrivant \mathbb{R} .

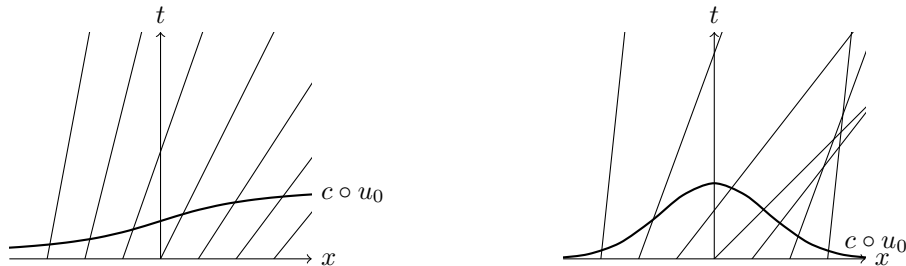
Démonstration. Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T[$. On a l'existence et l'unicité d'une solution maximale X à l'équation (2) pour la condition initiale $X(t) = x$ définie sur un voisinage de t par le théorème de Cauchy-Lipschitz, la fonction $c \circ u$ étant \mathcal{C}^1 . De plus, de par le calcul effectué précédemment, u est constante le long de la courbe caractéristique $(X(s), s)$ pour s dans le domaine de définition de X . Cela entraîne par l'équation (2) que $\frac{dX}{dt}$ est constante, donc les courbes caractéristiques sont en fait des droites de pente $c(u(x, t))$. Par critère de non explosion en temps fini, X est définie sur tout l'intervalle $[0, T[$, elle vaut $X(0)$ en $X = 0$ est croît de manière constante à la vitesse $c(u(x, t)) = c(u(X(0), 0))$. L'application X est donc définie par

$$X(s) = X(0) + s c(u_0(X(0))).$$

Réciproquement, si $y \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $X(s) = y + s c(u_0(y))$ pour $s \in [0, T[$ est l'unique droite de ce type passant par $(y, 0)$, donc par existence de la solution maximale, c'est une caractéristique, c'est à dire que X vérifie (2) sur $]0, T[$. \square

Les droites caractéristiques permettent alors de déterminer les valeurs d'une solution classique : si $u \in \mathcal{C}^1$ est solution de la loi de conservation sur $\mathbb{R} \times [0, T[$ on alors pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T[$ une droite caractéristique $(s, X(s))$ passant par (x, t) , et alors $u(x, t) = u_0(y)$, avec y vérifiant l'équation $x = y + t c(u_0(y))$. Graphiquement, cela revient à trouver une droite caractéristique passant par le point (x, t) et à remonter en l'origine pour déterminer y .

Le lemme permet aussi de conclure à la non-existence d'une solution classique jusqu'à un temps où deux droites caractéristiques se coupent, car cela contredirait l'unicité due au théorème de Cauchy-Lipschitz. On peut alors se poser la question de déterminer le plus court temps à partir duquel les droites caractéristiques se coupent. Cela va dépendre des variations de la fonction $c \circ u_0$, qui détermine la pente de celles-ci. Regardons graphiquement comment se placent les droites caractéristiques sur deux exemples, l'un où $c \circ u_0$ est toujours croissante, l'autre où il y a une décroissance :



On remarque que dans le cas où $c \circ u_0$ est croissante, les droites caractéristiques étant de pente de plus en plus importante ne se couperont jamais, tandis que dans l'autre cas, quand $c \circ u_0$ commence à décroître, les caractéristiques vont se couper et, intuitivement, le temps le plus court à partir duquel elles se coupent est au niveau des caractéristiques qui partent de l'endroit où la dérivée de $c \circ u_0$ atteint son minimum.

Plus précisément, on peut noter que si deux droites se coupent à un temps $t > 0$ pour deux valeurs $y \neq y'$, c'est-à-dire $y + tc(u_0(y)) = y' + tc(u_0(y'))$, on a alors $c(u_0(y)) \neq c(u_0(y'))$ et

$$t = -\frac{y - y'}{c(u_0(y)) - c(u_0(y'))},$$

ce qui veut dire que t est égal à l'opposé de l'inverse d'un taux d'accroissement. Comme $c \circ u_0$ est une application \mathcal{C}^1 , la borne inférieure des taux d'accroissements est égale à la borne inférieure de la dérivée par l'égalité des accroissements finis. On va alors démontrer le théorème suivant pour conclure cette partie :

Théorème 1.2. *On suppose $u_0 \in \mathcal{C}^1$ bornée ainsi que u_0' . Posons*

$$T^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } c \circ u_0 \text{ est croissante} \\ -\frac{1}{\inf((c \circ u_0)')} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors il existe une unique solution classique au problème de Cauchy associé à (1) définie sur $\mathbb{R} \times [0, T^[$, et le temps T^* est maximal, au sens où si T^* est fini et $T > T^*$, il n'existe pas de solution à (1) sur $\mathbb{R} \times [0, T]$.*

Démonstration. L'unicité vient du fait que si l'on se place dans l'intervalle d'existence d'une solution, les valeurs point par point de la solution sont déterminées par les caractéristiques, qui sont uniques et dépendent uniquement de u_0 , comme on l'a vu en conséquence du lemme 2.1, c'est-à-dire que les droites caractéristiques sont nécessairement non sécantes dans l'intervalle d'existence de solutions.

Montrons alors que l'on a existence d'une telle solution. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons

$$\begin{aligned} F_t &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto y + tc(u_0(y)) \end{aligned}$$

Comme u_0 est bornée, F_t est surjective. Ainsi pour tout $t \in [0, T^*[$, F_t est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Posons alors

$$\begin{aligned} \psi &: \mathbb{R} \times [0, T^*[\longrightarrow \mathbb{R} \times [0, T^*[\\ (y, t) &\longmapsto (F_t(y), t) \end{aligned}$$

ψ est bijective car F^t l'est et :

$$J_\psi(y, t) = \begin{vmatrix} F_t'(y) & c(u_0(y)) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = F_t'(y) > 0.$$

Donc par théorème d'inversion global, ψ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. On peut alors poser $u(x, t) = u_0(p_1 \circ \psi^{-1}(x, t)) = u_0(F_t^{-1}(x))$ (avec p_1 la projection sur la première variable), ce qui définit bien une application \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \times [0, T^*[$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x, 0) = u_0(F_0^{-1}(x)) = u_0(x)$$

car $F_0 = id$. On a de plus $u(\psi(x, t)) = u(x + t c(u_0(x)), t) = u_0(x)$, ce qui donne en dérivant par rapport à t :

$$\begin{aligned} 0 &= c(u_0(x)) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\psi(x, t)) \right) + \frac{\partial u}{\partial t}(\psi(x, t)) \\ &= c(u(\psi(x, t))) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\psi(x, t)) \right) + \frac{\partial u}{\partial t}(\psi(x, t)), \end{aligned}$$

ce qui montre que u est solution classique du problème de Cauchy, ψ étant bijectif de $\mathbb{R} \times]0, T^*[$ sur lui même.

Finalement, il reste à montrer que T^* est maximal. Soit $T > T^*$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(c \circ u_0)'(x) < \inf((c \circ u_0)') + \epsilon$. Comme T^* est fini par hypothèse, $\inf((c \circ u_0)') < 0$ donc, quitte à prendre ϵ suffisamment petit, par croissance de la fonction $x \mapsto -1/x$ sur $] -\infty, 0[$, on a $-\frac{1}{(c \circ u_0)'(x)} < -\frac{1}{\inf((c \circ u_0)') + \epsilon}$ et quitte à réduire encore ϵ , $-\frac{1}{\inf((c \circ u_0)') + \epsilon} < T$. Si l'on pose $t = -\frac{1}{(c \circ u_0)'(x)}$, on a $t < T$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $y, y' \in \mathbb{R}$ tels que $t = -\frac{y-y'}{c(u_0(y)) - c(u_0(y'))}$, ce qui veut dire que deux droites caractéristiques se coupent au temps t comme on l'a vu précédemment. Cela montre qu'il n'y a pas de solution classique sur $]0, T]$ à cause de l'unicité du lemme 2.1. \square

2 Solutions faibles

2.1 Définition

Afin d'élargir le nombre de solutions possibles à une loi de conservation, on introduit la notion de solution faible, qui ne requiert plus la différentiabilité de la fonction, mais permet de considérer des solutions moins régulières, par exemple continues par morceaux, ce qui se retrouve aussi en physique où certaines grandeurs ne sont pas forcément continues en temps et en espace.

Définition 2.1. Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , u est dite *solution faible* de la loi de conservation (1) sur ω si $u \in L^\infty(\omega)$ et, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$,

$$\iint_{\omega} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = 0. \quad (3)$$

On peut définir de même un équivalent faible du problème de Cauchy :

Définition 2.2. Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $T > 0$, u est dite *solution faible du problème de Cauchy* associé à (1) si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ et pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times]-\infty, T[)$,

$$\iint_{\mathbb{R} \times [0, T[} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0. \quad (4)$$

Pour que ces définitions aient un sens il faut montrer qu'elles coïncident avec la définition classique pour des solutions \mathcal{C}^1 . On va le faire pour le problème de Cauchy, la démonstration serait la même sur ω .

Proposition 2.1. Soit $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$.

Alors u est solution classique du problème de Cauchy (1) sur $\mathbb{R} \times [0, T[$ si et seulement si u en est une solution faible.

Démonstration. Supposons d'abord que u est solution classique. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times]-\infty, T])$. On a

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R} \times [0, T[} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times [0, T[} u \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt + \iint_{\mathbb{R} \times [0, T[} f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T u \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \right) dx + \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right) dt \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini, les fonctions considérées étant à support compact

$$= \int_{\mathbb{R}} \left([u\phi]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \phi dt \right) dx + \int_0^T \left([u\phi]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(u)}{\partial x} \phi dx \right) dt$$

par intégration par parties, ce qui est possible par le fait que u et $f(u)$ sont C^1

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(-u(x, 0) \phi(x, 0) - \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \phi dt \right) dx - \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f(u)}{\partial x} \phi dx \right) dt$$

ϕ étant nulle pour les termes de bord sauf en $t = 0$

$$\begin{aligned} &= - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \phi(x, 0) dx - \iint_{\mathbb{R} \times [0, T[} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \phi dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx \end{aligned}$$

en utilisant le fait que u est solution classique. L'égalité finale montre alors que u est solution faible.

Réciproquement, supposons u solution faible. On a donc pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times]-\infty, T])$,

$$\iint_{\mathbb{R} \times [0, T[} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \phi(x, 0) dx = 0.$$

En utilisant les mêmes intégrations par parties que précédemment, qui se justifient par le fait que u est C^1 , on obtient alors :

$$\iint_{\mathbb{R} \times [0, T[} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \phi dx dt + \int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \phi(x, 0) dx = 0.$$

En particulier, ceci est vrai pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times]0, T])$, et dans ce cas, l'égalité devient

$$\iint_{\mathbb{R} \times [0, T[} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \phi dx dt = 0.$$

On utilise alors la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)$ dans $L^2(\mathbb{R} \times]0, T[)$ pour conclure : on peut faire approcher ϕ autant que l'on veut de la restriction de $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x}$ sur un compact, qui est L^2 , donc cette fonction est nulle sur tout compact, donc elle est nulle globalement. On a donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[,$$

c'est-à-dire u est solution classique de l'équation différentielle. De plus, on a alors pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times]-\infty, T[)$,

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \phi(x, 0) dx = 0.$$

Si ψ est une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on peut construire une application $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times]-\infty, T[)$ de manière à ce que $\psi(x) = \phi(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suffit par exemple de se donner une application θ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-1, 1]$ telle que $\theta(0) = 1$, et de poser $\phi(x, t) = \psi(x) \theta(t \times \frac{2}{T})$. On a donc, pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} (u_0(x) - u(x, 0)) \psi(x) dx = 0,$$

ce qui permet de conclure, toujours par un argument de densité, que

$$u_0(x) = u(x, 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale du problème de Cauchy est donc vérifiée, et ceci achève la preuve. \square

2.2 La condition de Rankine-Hugoniot

Dans cette partie, on analyse le cas où une solution est discontinue le long d'une courbe et \mathcal{C}^1 ailleurs. Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $\Gamma \subset \omega$ une courbe de régularité \mathcal{C}^∞ séparant ω en deux composantes connexes ω_+ et ω_- . Soit $(x, t) \in \Gamma$, si u est une application \mathcal{C}^1 dans ω_+ et ω_- et continue par morceaux sur ω , on note $u_+(x, t)$ la limite de $u(y, s)$ quand (y, s) tend vers (x, t) en restant dans ω_+ , et de même $u_-(x, t)$ la limite de u en (x, t) dans ω_- . On pose alors $[u](x, t) = u_+(x, t) - u_-(x, t)$ le *saut* de u à travers Γ , et on définit de la même manière $[f(u)](x, t)$.

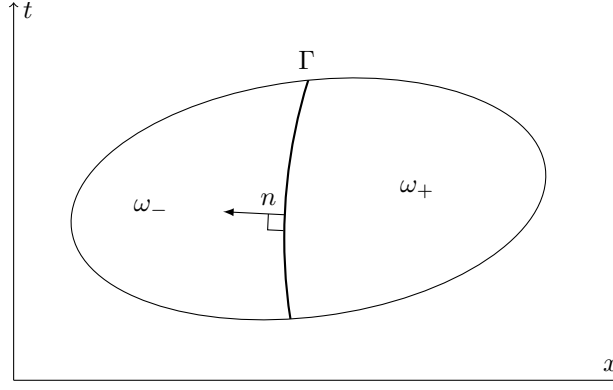
Nous allons déterminer à quelle condition u est solution faible de la loi de conservation sur ω tout entier par le théorème suivant :

Théorème 2.2. *Soit $u \in \mathcal{C}^1(\omega_+) \cap \mathcal{C}^1(\omega_-) \cap L^\infty(\omega)$ continue par morceaux sur ω .*

Alors u est solution faible de la loi de conservation (1) dans ω si et seulement si :

(i) *u est solution classique de cette loi de conservation sur ω_+ et ω_-*

(ii) *la condition $[u]n_t + [f(u)]n_x = 0$ est satisfaite sur Γ , où $n = (n_x, n_t)$ est un vecteur normal le long de Γ . Cette condition s'appelle la condition de Rankine-Hugoniot.*



Remarque. Pour démontrer cela, nous allons utiliser le théorème de Green-Riemann. Celui-ci s'énonce ainsi :

Théorème. (*Green-Riemann*)

Si C est un chemin fermé du plan \mathcal{C}^1 par morceaux orientée dans le sens trigonométrique et D le domaine compact délimité par cette courbe, si P et Q sont des fonctions définies sur D ayant des dérivées partielles continues sur D , alors :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy.$$

On l'admettra dans le cadre de cette démonstration, et l'on en fera la démonstration dans un cas simple en annexe.

Si l'on a un vecteur normal unitaire $n = (n_x, n_y)$ orienté extérieurement à D , le vecteur $(-n_y, n_x)$ est tangent unitaire et orienté dans le sens trigonométrique, et on a

$$\int_C P dx + Q dy = \int_C \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_y \\ n_x \end{pmatrix} ds = \int_C (-P n_y + Q n_x) ds,$$

où ds est l'élément de longueur correspondant à un paramétrage par longueur d'arc de Γ . En remplaçant P par $-P$, la formule de Green-Riemann se réécrit donc :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (P n_y + Q n_x) ds$$

Démonstration. Supposons d'abord que u est solution faible. Alors (3) est vraie en particulier pour des fonctions à support compact inclus dans ω_+ ou ω_- , donc u est solution faible dans ces deux ouverts. D'après la proposition 3.1, u est alors solution classique dans ω_+ et ω_- car étant de régularité \mathcal{C}^1 sur les deux ouverts.

Montrons alors la deuxième assertion. On voudrait appliquer la formule de Green-Riemann à l'intégrale précédente, mais pour cela il faut intégrer sur un domaine délimité par une courbe, à la frontière de laquelle u et $f(u)$ sont bien définies et \mathcal{C}^1 , ce qui n'est pas forcément le cas pour ω . Mais si on fixe $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$, (3) reste vraie si on intègre sur n'importe quel domaine contenant $\text{supp}(\phi)$ qui est un compact de ω . On peut alors construire un domaine inclus dans ω contenant $\text{supp}(\phi)$ qui satisfasse les hypothèses voulues : en effet la distance de $\text{supp}(\phi)$ à la frontière de ω est non nulle, par compacité, donc on pourra toujours construire entre les deux une courbe \mathcal{C}^∞ qui entoure $\text{supp}(\phi)$. Notons D le domaine délimité par cette courbe, et $D_+ = D \cap \omega_+$ et $D_- = D \cap \omega_-$.

Comme $\text{supp}(\phi) \subset D$, on a

$$\begin{aligned} & \iint_D \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \\ &= \iint_{D_+} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \iint_{D_-} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = 0. \end{aligned}$$

On va alors appliquer le théorème de Green-Riemann à $P = u\phi$ et $Q = f(u)\phi$ sur D_+ , qui est un domaine délimité par la concaténation de $\partial D \cap D_+$ et de $\Gamma \cap D$, sachant que ϕ est nulle partout sur la frontière sauf sur $\Gamma \cap D$. Notons que $u\phi$ et $f(u)\phi$ sont \mathcal{C}^1 sur D_+ et prolongeables par continuité sur Γ en u_+ et $f(u)_+$. On peut supposer, quitte à changer n en $-n$ que n est orienté extérieurement à D_+ , et dans ce cas il est orienté intérieurement à D_- . On a donc :

$$\iint_{D_+} \left(\frac{\partial f(u)\phi}{\partial x} + \frac{\partial u\phi}{\partial t} \right) dx dt = \int_{\Gamma} (u_+ n_t + f(u)_+ n_x) \phi ds,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & \iint_{D_+} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \\ &= \int_{\Gamma} (u_+ n_t + f(u)_+ n_x) \phi ds - \iint_{D_+} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \phi dx dt \\ &= \int_{\Gamma} (u_+ n_t + f(u)_+ n_x) \phi ds, \end{aligned}$$

car u est solution classique sur ω_+ . Et on a de même sur D_- , sachant que n est alors orienté intérieurement à D_- :

$$\iint_{D_-} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = - \int_{\Gamma} (u_- n_t + f(u)_- n_x) \phi ds.$$

En remplaçant tout cela dans l'égalité initiale, cela donne :

$$\int_{\Gamma} ([u] n_t + [f(u)] n_x) \phi ds = 0,$$

et cela est vrai pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$. On peut alors conclure en utilisant le lemme suivant :

Lemme 2.3. Soit $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$,

$$\int_{\Gamma} g \phi ds = 0. \quad (5)$$

Alors $g = 0$

Démonstration. Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un paramétrage par longueur d'arc de γ , et soit $p = \gamma(s_0)$ un point de Γ . Soit $n(s)$ un vecteur normal unitaire à Γ , si $\epsilon > 0$, $r > 0$, définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \kappa :]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[\times]-r, r[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, v) &\longmapsto \gamma(s) + vn(s). \end{aligned}$$

Cette application est \mathcal{C}^∞ par hypothèse sur la régularité de Γ . De plus $d\kappa(s, v) = (\gamma'(s) + vn'(s), n(s))$ donc la matrice $d\kappa(s_0, 0)$ est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\gamma'(s_0), n(s_0))$. Par théorème d'inversion local, on peut donc fixer ϵ et r tels que κ soit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme sur son image, notée V avec $V \subset \omega$.

Ainsi, si $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[)$, en posant $\phi = \psi \circ p_s \circ \kappa^{-1}$ dans V (avec p_s la projection sur la première variable), $\phi = 0$ ailleurs, ϕ est une application \mathcal{C}^∞ à support compact dans V , et elle vérifie donc (5). De plus, si $s \in]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[$, $\phi \circ \gamma(s) = \psi \circ p_s(s, 0) = \psi(s)$. On s'est donc ramené à un problème unidimensionnel sur la courbe : on a pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[)$,

$$\int_{s_0 - \epsilon}^{s_0 + \epsilon} g(\gamma(s))\psi(s)ds = 0.$$

On peut donc utiliser un argument de densité dans L^2 en utilisant la continuité de g pour conclure que $g \circ \gamma|_{]s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon[} = 0$ et en particulier $g(\gamma(s_0)) = g(p) = 0$. Comme cela est vrai pour tout $p \in \Gamma$, $g = 0$. \square

Fin de la démonstration du théorème. Ainsi comme $[u]n_t + [f(u)]n_x$ est continue par hypothèse sur u qui est continue sur Γ par morceaux, on a en appliquant le lemme :

$$[u]n_t + [f(u)]n_x = 0.$$

Réciproquement, si l'on suppose les conditions (i) et (ii) vérifiées, en utilisant le même calcul que précédemment, on obtient que

$$\iint_{\omega} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt = 0,$$

c'est-à-dire que u est solution faible de la loi de conservation. \square

Une solution u d'un tel problème étant par hypothèse bornée, par une valeur notée A , si l'on pose $M = \sup_{|x| \leq A} |f'(x)|$, on a pour tout $(x, t) \in \Gamma$,

$$|[f(u)](x, t)| \leq M|[u](x, t)|.$$

Si l'on applique la condition de Rankine-Hugoniot, cela donne, en supposant que Γ est un lieu de discontinuité réelle, c'est-à-dire que pour tout $(x, t) \in \Gamma$, $[u](x, t) \neq 0$:

$$|n_t| \leq M|n_x|.$$

En particulier, cela montre, comme n est unitaire, que $|n_x|$ ne s'annule jamais, c'est-à-dire que le vecteur normal de Γ n'est jamais vertical. Cela implique que la courbe Γ peut se paramétrer comme un graphe au-dessus de l'axe Ot . En effet, si l'on note $\gamma = (\gamma_x, \gamma_t)$ un paramétrage par longueur d'arc de Γ , le vecteur unitaire normal à Γ est $(-\gamma'_t, \gamma'_x)$ et la condition de Rankine-Hugoniot montre que $\gamma'_t \neq 0$ sur tout l'intervalle de définition de γ . On peut donc inverser globalement γ_t de manière \mathcal{C}^∞ et l'application $\gamma \circ \gamma_t^{-1}$ donne le paramétrage voulu.

On a donc un paramétrage de Γ de la forme :

$$\Gamma = \{(X(t), t), t \in]t_1, t_2]\}$$

et un vecteur normal unitaire à cette courbe s'écrivant $n = (1, -\frac{dX}{dt})$ à une renormalisation près, la condition de Rankine-Hugoniot se réécrit ainsi :

$$[f(u)] = \frac{dX}{dt} [u].$$

La pente de la courbe de discontinuité est donc égale au taux d'accroissement de f sur entre les points $u_-(x, t)$ et $u_+(x, t)$. On peut rapprocher cela des courbes caractéristiques, dont la pente était égale à la valeur de f' en u : si la discontinuité est faible, la courbe de celle-ci est donc proche d'une droite caractéristique.

2.3 Non-unicité du problème de Cauchy

La condition de Rankine-Hugoniot donne une relation entre la pente d'une courbe de discontinuité et la valeur des discontinuités de u et $f(u)$ et nous permet de construire des solutions continues par morceaux à une loi de conservation. La manière la plus simple de construire de telles solutions consiste à considérer des fonctions constantes par morceaux et dont les discontinuités sont placées le long d'une droite. Ce type de fonction est trivialement solution de la loi de conservation hors des discontinuités, et la condition de Rankine-Hugoniot implique que la pente σ d'une discontinuité doit vérifier :

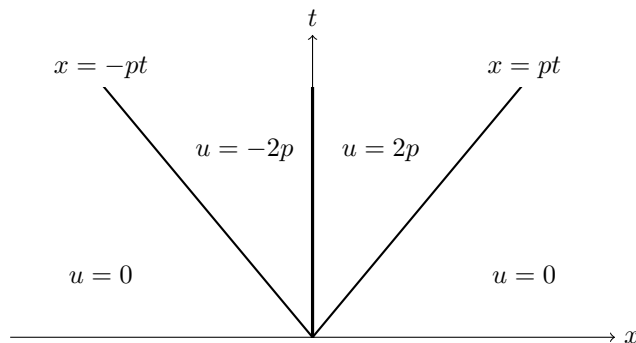
$$\sigma = \frac{[f(u)]}{[u]}.$$

Plaçons-nous dans le cas de l'équation de Burgers, où $f(u) = \frac{u^2}{2}$. La condition sur la pente d'une discontinuité devient alors

$$\sigma = \frac{u_+^2 - u_-^2}{2(u_+ - u_-)} = \frac{u_+ + u_-}{2}.$$

Soit $p \in \mathbb{R}_+$, considérons l'application suivante :

$$u : (x, t) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -pt \\ -2p & \text{si } -pt < x < 0 \\ 2p & \text{si } 0 < x < pt \\ 0 & \text{si } pt > x \end{cases}$$



Cette application est constante par morceaux, comporte trois demi-droites de discontinuité (en $x = -pt$, $x = 0$ et $x = pt$) et vérifie la condition de Rankine-Hugoniot sur celles-ci. D'après le théorème 3.2, c'est une solution faible à l'équation de Burgers $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} = 0$, et ce pour tout p réel positif. On a donc construit une infinité de solutions, en plus de la solution triviale partout nulle, qui sont nulles en $t = 0$.

Cela montre que la notion de solution faible telle qu'on l'a définie ne permet pas d'avoir l'unicité pour un problème de Cauchy comme on l'a dans le sens classique, et cela ne concorde pas avec le point de vue physique pour lequel une condition initiale donnée ne permet qu'une seule évolution possible. Les solutions que l'on a construites n'ont d'ailleurs pas vraiment de sens physique, car forçant l'apparition d'une perturbation à partir d'une condition initiale nulle, et ne sont pas "souhaitables" pour la résolution d'une équation de loi de conservation. Il nous faut donc définir une nouvelle classe de solutions, plus restrictive que celle des solutions faibles afin d'obtenir l'unicité pour un problème de Cauchy, tout en étant plus large que celle des solutions classiques.

3 Approximation parabolique

3.1 Définition du problème

Dans la réalité physique, les lois de conservation telles qu'on les a étudiées sont en général l'approximation d'une équation parabolique avec un terme de viscosité, comme dans l'exemple du trafic routier de l'introduction, sous la forme :

$$\partial_t u^\epsilon(x, t) + \partial_x(f(u^\epsilon))(x, t) - \epsilon \Delta u^\epsilon(x, t) = 0,$$

le terme ϵ étant négligeable. Notre cheminement sera d'utiliser cette équation, en trouver des solutions (dans un sens que l'on définira) et faire tendre ϵ vers 0, afin d'obtenir un certain type de solution faibles pour la loi de conservation.

Tout d'abord, on va prendre $\epsilon = 1$ et on fera intervenir ϵ uniquement lors du passage à la limite. On veut donc résoudre l'équation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) - \Delta u = 0. \tag{6}$$

Or on sait déjà résoudre l'équation de la chaleur :

$$\partial_t v - \Delta v = 0.$$

En effet, en passant par la transformation de Fourier, qui on le rappelle est définie par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx,$$

l'équation devient

$$\partial_t \hat{v} + \xi^2 \hat{v} = 0$$

en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier pour la dérivation, et cela se résout en

$$\hat{v}(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} \hat{v}(\xi, 0).$$

En passant à la transformation de Fourier inverse, on a

$$v(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-(\cdot)^2 t} \hat{v}(\cdot, 0) \right) (x) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-(\cdot)^2 t} \right) * v(\cdot, 0)(x).$$

On a ici utilisé la propriété de la transformée de Fourier sur le produit de convolution : $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ à laquelle on a appliqué la transformée de Fourier inverse.

On peut aussi donner une formule explicite du noyau de la chaleur $G(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-(\cdot)^2 t})$ en utilisant le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, celle-ci étant $G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t} - i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + i\xi\sqrt{t} \right)^2 - \xi^2 t} dx \\ &= \frac{e^{-\xi^2 t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty + i\xi\sqrt{t}}^{+\infty + i\xi\sqrt{t}} e^{-z^2} dz \\ &= e^{-\xi^2 t}, \end{aligned}$$

sachant que l'intégrale de la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ holomorphe sur \mathbb{C} sur la droite des réels est la même que sur celle-ci translatée verticalement.

On peut alors considérer (6) au moins sur le plan formel comme une équation de la chaleur avec un second membre (dépendant de u) :

$$\partial_t u - \Delta u = -\partial_x(f(u)).$$

Les calculs que l'on effectue ici sont purement formels et sans considérations sur la régularité de u : il nous servent uniquement à déterminer une définition qui nous convienne pour les solutions de (6). La formule de Duhamel donnant la solution de cette équation est, en notant $u_0 = u(\cdot, 0)$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= G(\cdot, t) * u_0(x) - \int_0^t G(\cdot, t-s) * \partial_x f(u(\cdot, s))(x) ds \\ &= G(\cdot, t) * u_0(x) - \int_0^t \partial_x G(\cdot, t-s) * f(u(\cdot, s))(x) ds. \end{aligned}$$

On a utilisé ici le fait que si f et g sont \mathcal{C}^1 et à dérivées L^1 , $(f * g)' = f' * g = f * g'$ par théorème de dérivation sous l'intégrale. C'est cette dernière égalité que l'on va utiliser pour définir le problème que l'on veut résoudre :

Définition 3.1. Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $T > 0$. Soit $u \in C_b(\mathbb{R} \times]0, T[)$ (continue bornée), alors u est dite *solution de l'équation parabolique* (6) sur $]0, T[$ si pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[$:

$$u(x, t) = (G(\cdot, t) * u_0)(x) - \int_0^t \partial_x G(\cdot, t-s) * f(u(\cdot, s))(x) ds \quad (7)$$

Remarque. Les calculs menant de (6) à (7) étant vrais uniquement d'un point de vue formel, on n'a pas montré le lien qui existe entre ces deux équations. Mais cela ne nous est pas utile pour le moment : on veut uniquement trouver une solution de (7) et l'utiliser pour construire

une solution faible à la loi de conservation. Malgré tout, il nous faut vérifier que les termes de cette équation sont bien définis sous les hypothèses données.

On commence par remarquer que $G(x, t) = t^{-\frac{1}{2}}G(t^{-\frac{1}{2}}x, 1)$ d'après l'expression explicite de G . Alors $\partial_x G(x, t) = t^{-1}\partial_x G(t^{-\frac{1}{2}}x, 1)$. En notant $K_1 = \|\partial_x G(\cdot, 1)\|_{L^1(\mathbb{R})}$, qui est fini car la dérivée d'une gaussienne est intégrable, on a par un changement de variable, pour tout $t \in]0, T[$:

$$\|\partial_x G(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = K_1 t^{-\frac{1}{2}}.$$

On utilise alors l'inégalité de Young pour la convolution pour L^∞ : $\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty}$. On a donc pour tout $t \in]0, T[$ et $s \in]0, t[$:

$$\begin{aligned} \|\partial_x G(\cdot, t-s) * f(u(\cdot, s))\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq K_1(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|f(u(\cdot, s))\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\leq K_1(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|f(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T])}. \end{aligned}$$

Ainsi, $s \mapsto \partial_x G(\cdot, t-s) * f(u(\cdot, s))(x)$ est intégrable sur $]0, t[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc le deuxième terme de l'équation (7) est bien défini, et il en est de même pour le terme $G(\cdot, t) * u_0(x)$ car $G(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$ et $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$.

3.2 Résolution par une méthode de point fixe

L'équation sous forme intégrale (7) que nous voulons résoudre caractérise u comme point fixe d'une certaine fonctionnelle, et nous allons utiliser pour le résoudre un théorème de point fixe contractant sur l'espace $C_b(\mathbb{R} \times]0, T])$ pour un certain T , muni de la norme infinie, qui est un espace complet. On va montrer le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Soient $R' > R > 0$. Il existe $T > 0$, ne dépendant que de R et de R' , tel que, pour tout $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ bornée par R et pour tout $S \in]0, T]$, l'équation parabolique (6) possède une unique solution bornée par R' sur $\mathbb{R} \times]0, S[$.*

Démonstration. Si $T \in \mathbb{R}$ (que l'on fixera par la suite), posons $E = C_b(\mathbb{R} \times]0, T])$ et définissons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi &: E \longrightarrow E \\ u &\longmapsto G(\cdot, t) * u_0(x) - \int_0^t \partial_x G(\cdot, t-s) * f(u(\cdot, s))(x) ds \end{aligned}$$

On sait déjà que si $u \in E$, $\psi(u)$ est bien définie par la remarque de la partie précédente mais il nous faut montrer que $\psi(E) \subset E$ pour que cette définition ait un sens. Si $u \in E$ bornée par un certain R' , les estimations de la remarque donnent :

$$\begin{aligned} |\psi(u)(x, t)| &\leq \|G(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + K_1 \sup_{[-R', R']} |f| \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + 2K_1 \sup_{[-R', R']} |f| \sqrt{t} \end{aligned}$$

car $\|G(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} G(x, t) dx = \mathcal{F}(G(\cdot, t))(0) = 1$ d'après les calculs déjà effectués sur G . Ainsi $\psi(u)$ est bornée. Si l'on définit sur \mathbb{R}^2 les fonctions $\tilde{G}(x, t) = p\mathbb{1}_{]0, T[}(t)\partial_x G(x, t)$ et $\tilde{F}(x, t) = p\mathbb{1}_{]0, T[}(t)f(u(x, t))$ alors on a pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[$:

$$\psi(u)(x, t) = G(\cdot, t) * u_0(x) - \tilde{G} * \tilde{F}(x, t)$$

avec \star désignant un produit de convolution bidimensionnel en (x, t) , c'est à dire que

$$f \star g(x, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} f((x, t) - X)g(X) dX = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x - y, t - s)g(y, s) dy ds.$$

Ici, $\tilde{G} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ car $\|\partial_x G(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq K_1 t^{-\frac{1}{2}}$ qui est intégrable sur $]0, T[$ et $\tilde{F} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, leur produit de convolution est donc une application continue. De plus, $(x, t) \mapsto G(\cdot, t) * u_0(x)$ est continue à la fois en espace (car produit de convolution) et en temps (par théorème de continuité sous l'intégrale). $\psi(u)$ est donc une application continue. Finalement, on a bien montré que $\psi(E) \subset E$.

Soient $R' > R > 0$ et soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ bornée par R . Si $\|u\|_E \leq R'$, l'estimation précédente donne

$$|\psi(u)(x, t)| \leq R + 2K_1 \sup_{[-R', R']} |f| \sqrt{t}.$$

On peut alors prendre $T > 0$ tel que $T < \left(\frac{R' - R}{2K_1 \sup_{[-R', R']} |f|}\right)^2$ (ou n'importe quelle valeur si $\sup_{[-R', R']} |f| = 0$), le choix de T ne dépendant que de R' et R , et dans ce cas $\|\psi(u)\|_E \leq R'$ donc ψ laisse stable la boule de rayon R' de E . On va maintenant estimer le caractère contractant de ψ : soient u et v bornées par R' , alors si $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[$,

$$\begin{aligned} |\psi(u)(x, t) - \psi(v)(x, t)| &= \left| \int_0^t \partial_x G(\cdot, t - s) * (f(u(\cdot, s)) - f(v(\cdot, s)))(x) ds \right| \\ &\leq \int_0^t \|\partial_x G(\cdot, t - s)\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f(u(\cdot, s)) - f(v(\cdot, s))\|_{L^\infty(\mathbb{R})} ds \\ &\leq \int_0^t \|\partial_x G(\cdot, t - s)\|_{L^1(\mathbb{R})} \sup_{[-R', R']} |f'| \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} ds \\ &\leq K_1 \sup_{[-R', R']} |f'| \|u - v\|_E \int_0^t (t - s)^{-\frac{1}{2}} ds \\ &\leq 2K_1 \sup_{[-R', R']} |f'| \sqrt{t} \|u - v\|_E. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on prend de plus $T < \left(\frac{1}{2K_1 \sup_{[-R', R']} |f'|}\right)^2$, choix qui ne dépend encore une fois que de R et R' , ψ est contractante de la boule de rayon R' dans la boule de rayon R' . L'espace E étant complet, le théorème du point fixe nous donne l'existence et l'unicité d'un point fixe de ψ dans la boule de rayon R' , c'est à dire d'une solution de (6). Et cela reste vrai pour tout $S \leq T$ car les estimations restent vérifiées. \square

En particulier, ce théorème nous donne un résultat d'unicité :

Corollaire 3.2. *Soit $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pour tout $T > 0$, il existe au plus une solution de (6) sur $]0, T[$.*

Démonstration. Soit $T > 0$ et u, v deux solutions de (6) sur $]0, T[$. Posons

$$T_0 = \sup\{t \in]0, T[\mid u(x, s) = v(x, s) \forall (x, s) \in \mathbb{R} \times]0, t]\}$$

et $T_0 = 0$ si cet ensemble est vide. Supposons donc $T_0 < T$, car sinon le résultat est démontré. Par continuité de u et v , $u(x, T_0) = v(x, T_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On va montrer que $(x, t) \mapsto u(x, T_0 + t)$ et $(x, t) \mapsto v(x, T_0 + t)$ sont solutions de (6) sur $]0, T - T_0[$. Cela est vrai en particulier grâce aux propriétés de semi-groupe de la convolution par $G : G(\cdot, t) * G(\cdot, t') = G(\cdot, t + t')$ pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$, que l'on montre en passant par la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(G(\cdot, t) * G(\cdot, t'))(\xi) &= \mathcal{F}(G(\cdot, t))\mathcal{F}(G(\cdot, t'))(\xi) = e^{-\xi^2 t} e^{-\xi^2 t'} \\ &= e^{-\xi^2(t+t')} = \mathcal{F}(G(\cdot, t+t'))(\xi). \end{aligned}$$

Ainsi, si $t \in]0, T - T_0[$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(x, T_0 + t) &= G(\cdot, T_0 + t) * u_0(x) - \int_0^{T_0+t} \partial_x G(\cdot, T_0 + t - s) * f(u(\cdot, s))(x) ds \\ &= G(\cdot, t) * \left(G(\cdot, T_0) * u_0(x) - \int_0^{T_0} \partial_x G(\cdot, T_0 - s) * f(u(\cdot, s))(x) ds \right) \\ &\quad - \int_{T_0}^{T_0+t} \partial_x G(\cdot, T_0 + t - s) * f(u(\cdot, s))(x) ds \\ &= G(\cdot, t) * u(x, T_0) - \int_0^t \partial_x G(\cdot, t - s) * f(u(\cdot, T_0 + s))(x) ds \end{aligned}$$

et donc $(x, t) \mapsto u(x, T_0 + t)$, et de même $(x, t) \mapsto v(x, T_0 + t)$, sont toutes deux solution sur $]0, T - T_0[$, avec la même condition initiale $u(\cdot, T_0) = v(\cdot, T_0)$.

Prenons alors $R = \|u(\cdot, T_0)\|$ et $R' > \max(R, \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T_0])}, \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T_0])}$. On peut alors appliquer le théorème 3.1 qui nous donne $0 < S < T - T_0$ telle que la solution sur $]0, S[$ bornée par R' est unique pour une condition initiale bornée par R donnée, ce qui implique que $(x, t) \mapsto u(x, T_0 + t)$ et $(x, t) \mapsto v(x, T_0 + t)$ coïncident sur $]0, S[$, et ainsi u et v coïncident sur $]0, T_0 + S[$, ce qui contredit la définition de T_0 . \square

3.3 Régularité, existence globale, passage à la limite

Esquissons, sans entrer dans les détails, la suite du raisonnement nous permettant de construire des solutions entropiques à la loi de conservation. Tout d'abord, il est possible de montrer que les solutions de l'équation parabolique ont en fait une régularité \mathcal{C}^∞ , même pour une condition initiale seulement L^∞ , du fait de l'effet régularisant du noyau de la chaleur. Pour prouver cela, il faudrait appliquer un théorème de point fixe de la même manière que dans le paragraphe précédent, mais dans un espace plus restreint nous permettant de contrôler la dérivée première en espace de u . On montrerait alors l'existence et l'unicité, localement, de solutions \mathcal{C}^1 en espace et, en itérant le raisonnement sur les dérivées de u , de solutions \mathcal{C}^∞ . A partir de cela, on peut aussi montrer que u est \mathcal{C}^∞ en temps.

Le fait que les solutions de (6), au sens tel qu'on l'avait défini, soient \mathcal{C}^∞ implique qu'elles sont aussi solutions de (6) au sens classique, c'est à dire qu'elles vérifient directement l'équation en temps qu'applications \mathcal{C}^∞ . En effet, les calculs formels effectués pour passer de l'équation (6) à l'équation (7) sont exacts sous les hypothèses de régularité de u .

Reprenons alors l'équation parabolique avec le terme ϵ :

$$\partial_t u^\epsilon(x, t) + \partial_x(f(u^\epsilon)(x, t) - \epsilon \Delta u^\epsilon(x, t)) = 0 \quad (8)$$

On peut en déduire une version entropique : si $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction \mathcal{C}^∞ convexe, et $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ telle que $\phi' = \eta' f'$, on a

$$\Delta(\eta(u^\epsilon)) = \partial_{xx}(\eta(u^\epsilon)) = \eta''(u^\epsilon)(\partial_x u^\epsilon)^2 + \eta'(u^\epsilon)\Delta u^\epsilon \geq \eta'(u^\epsilon)\Delta u^\epsilon.$$

D'où, si u^ϵ est solution de (8), en multipliant l'équation par $\eta'(u^\epsilon)$ et sachant que $\eta'(u^\epsilon)\partial_t(u^\epsilon) = \partial_t(\eta(u^\epsilon))$ et $\eta'(u^\epsilon)\partial_x(f(u^\epsilon)) = \eta'(u^\epsilon)f'(u^\epsilon)\partial_x u^\epsilon = \partial_x(\phi(u^\epsilon))$, on obtient :

$$\partial_t \eta(u^\epsilon) + \partial_x(\phi(u^\epsilon)) - \epsilon \Delta(\eta(u^\epsilon)) \leq 0.$$

Cette inégalité, dite inégalité d'entropie, est ce qui nous servira à définir la bonne notion de solution à la loi de conservation. Ici, sachant que les solutions de l'équation parabolique telles qu'on les a construites au paragraphe précédent, en supposant ϵ quelconque, sont solutions classiques de (8) et vérifient donc l'inégalité d'entropie. En choisissant une fonction η de manière judicieuse, par des calculs que l'on ne détaillera pas ici, on peut montrer, sous couvert d'hypothèses légèrement plus restrictives sur la régularité de u_0 , que les solutions vérifient un principe du maximum :

Théorème 3.3. *Si u^ϵ est solution de (8) sur $\mathbb{R} \times]0, T[$, alors*

$$\|u^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0, T[)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Grâce à cette estimation, on peut montrer l'existence globale d'une solution de l'équation parabolique (8) : en reprenant les notations du théorème 3.1, si on pose $R = \|u_0\|_\infty$ et $R' > R$ quelconque, on a une solution sur $]0, T[$ pour un certain $T > 0$. Et comme $\|u(\cdot, T/2)\| \leq \|u_0\|_\infty = R$ par le théorème 3.3, on a aussi une solution sur $]T/2, 3T/2[$, car la borne T ne dépend que de R et de R' . Cette solution coïncide avec la première sur $]T/2, T[$ par unicité, et on peut montrer facilement que le recollement des deux solutions sur $]0, 3T/2[$ est encore solution, en utilisant les propriétés de G pour la convolution comme on l'a fait en montrant l'unicité. On peut donc par ce raisonnement indéfiniment rallonger la solution sur des intervalles de longueur constante, ce qui permet d'avoir une solution définie sur $]0, +\infty[$.

Si u_0 est une condition initiale suffisamment régulière, par exemple $u_0 \in C_b(\mathbb{R})$, on a donc pour tout $\epsilon > 0$ une solution u^ϵ de l'équation parabolique (8) pour la condition initiale u_0 . Il reste alors à passer à la limite quand ϵ tend vers 0. Il faudrait d'abord montrer que u^ϵ converge presque partout vers une fonction u quand ϵ tend vers 0, et ensuite on peut montrer que u est une solution faible de la loi de conservation (1) par convergence dominée, en utilisant le principe du maximum vérifié par u^ϵ .

4 Solutions entropiques

Finalement, on a construit, en passant par le problème parabolique, une solution faible u à la loi de conservation, ce qui montre déjà qu'il y a toujours existence globale de ce type de solutions. De plus, l'inégalité entropique vérifiée par les solutions u^ϵ passe à la limite, au moins dans un sens faible : on peut montrer que si η est une fonction convexe régulière, ϕ vérifie $\phi' = \eta' f'$, et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ positive, alors

$$\iint_{\mathbb{R} \times]0, +\infty[} (\eta(u(x, t))\partial_t \varphi(x, t) + \phi(u(x, t))\partial_x \phi(x, t)) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(x, 0) dx \geq 0 \quad (9)$$

C'est cette condition qui va servir à définir le type de solutions que l'on souhaite :

Définition 4.1. u est dite solution entropique au problème de Cauchy associé à (1) si $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, +\infty[) \cap C([0, +\infty[, L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}))$ et vérifie (9) pour tout η, ϕ, φ vérifiant les hypothèses données plus haut.

En particulier, une solution entropique est une solution faible, ce qui peut se montrer en prenant $\eta(s) = s$ et $\eta(s) = -s$. Les solutions entropiques représentent en fait les solutions de loi de conservation ayant un "sens physique", et constituent le bon cadre de solutions que l'on recherchait. On a montré, en omettant certains détails, qu'il y avait toujours existence de solutions entropiques, et il est aussi possible de montrer qu'il y a unicité : c'est le théorème de Kružkhov.

Annexe : la formule de Green-Riemann

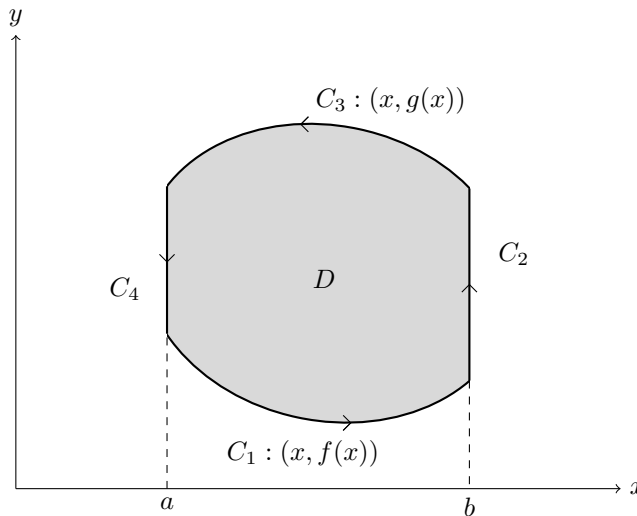
Rappelons l'énoncé du théorème de Green-Riemann :

Théorème. (*Green-Riemann*)

Si C est un chemin fermé du plan C^1 par morceaux orientée dans le sens trigonométrique et D le domaine compact délimité par cette courbe, si P et Q sont des fonctions définies sur D ayant des dérivées partielles continues sur D , alors :

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_C P dx + Q dy.$$

Démonstration. On peut démontrer facilement ce théorème dans un cas simple, où $Q = 0$ et le domaine D peut être caractérisé sous la forme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$, où f et g sont des fonctions continues, ainsi que le montre le diagramme ci-dessous :



On a alors, d'après Fubini :

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b (P(x, g(x)) - P(x, f(x))) dx.$$

La courbe C_1 pouvant directement être paramétrée par $(x, f(x))$, on a :

$$\int_{C_1} P dx = \int_a^b P(x, f(x)) dx.$$

La courbe C_3 peut aussi être paramétrée par $(x, g(x))$, mais dans le sens inverse à son orientation, on a donc :

$$\int_{C_3} P dx = - \int_{-C_3} P dx = - \int_a^b P(x, g(x)) dx.$$

Et comme C_2 et C_4 ont une variation horizontale nulle, on a

$$\int_{C_2} P dx = \int_{C_4} P dx = 0.$$

Finalement, en additionnant tout cela, on a bien le résultat voulu :

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_C P dx.$$

On peut montrer de la même manière que la formule de Green-Riemann est vraie pour $P = 0$ sur un domaine délimité par deux segments horizontaux et deux courbes. Pour montrer le résultat dans le cadre général, il faudrait montrer que cela implique que la formule est vraie pour P et Q quelconque dans tout domaine de l'un de ces deux types différents, puis montrer que l'on peut décomposer tout domaine suffisamment régulier en sous-domaines de ce type. \square

Références

- [1] Denis Serre. *Systèmes de lois de conservation I*. Diderot Ed., Paris, 1996
- [2] Jérôme Droniou, Cyrille Imbert. *Solutions de viscosité et solutions variationnelles pour EDP non-linéaires*. Cours de DEA, université Montpellier II, 2004