

# Zéros réels des polynômes aléatoires

Travail d'Étude et de Recherche

Justine Fasquel

encadré par M. Damien Gayet

Université Grenoble Alpes  
Master 1 Mathématiques générales

2016-2017

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Zéros réels d'un polynôme aléatoire à une seule variable</b>	<b>3</b>
1.1 Un peu de géométrie . . . . .	3
1.2 De la géométrie aux zéros des polynômes aléatoires - Formule de Kac . . . . .	5
1.3 Un résultat plus général . . . . .	11
<b>2 Problème de l'aiguille de Buffon et longueur d'un arc</b>	<b>16</b>
2.1 Le problème de Buffon dans le plan . . . . .	16
2.2 Projection sur la sphère unité . . . . .	19
2.3 Problème de Buffon et polynômes aléatoires . . . . .	21
<b>3 Formules de Rice pour un polynôme aléatoire à deux indéterminées</b>	<b>22</b>
3.1 Formule de Rice en dimension 1 . . . . .	22
3.2 Formule de Rice en dimension 2 et notations . . . . .	25
3.3 Cas stationnaire et applications . . . . .	28
<b>Bibliographie</b>	<b>32</b>

# Introduction

Trouver les zéros réels d'un polynôme quelconque est un problème difficile. En effet, dès lors que le degré du polynôme étudié est supérieur ou égal à cinq, le mathématicien norvégien, Niels Henrik Abel a démontré qu'il n'existait pas de formule générale permettant de calculer ses racines.

Trouver le nombre exact de zéros réels d'un polynôme quelconque à une indéterminée ou le nombre de domaines nodaux d'un polynôme à plusieurs variables n'est pas moins difficile. Cependant, en posant des conditions sur les coefficients du polynôme (loi de probabilité, indépendance), on va voir que l'on peut donner un nombre moyen de racines réelles (respectivement de domaines nodaux) pour un polynôme aléatoire à une indéterminée (respectivement plusieurs indéterminées).

L'objectif de ce Travail d'Étude et de Recherche est d'énoncer puis démontrer de tels résultats.

On s'intéresse ici à des polynômes dont les coefficients suivent exclusivement des lois normales (centrées) et on essaiera d'appliquer les résultats théoriques à différentes distributions.

Dans le premier chapitre on se consacrera aux polynômes à une seule variable. On énoncera d'abord la formule de Kac en dimension 1 avant de démontrer un résultat plus général qui donne l'espérance du nombre de zéros réels d'un polynôme aléatoire dont les coefficients suivent des lois normales centrées.

Le second chapitre est une parenthèse présentant une introduction au problème de Buffon dans le plan puis sur la sphère unité. On verra que ce problème célèbre n'est pas sans lien avec notre sujet.

Enfin, dans le troisième chapitre, on cherchera à majorer le nombre moyen de domaines nodaux d'un polynôme aléatoire à deux indéterminés par le nombre moyen de points critiques du polynôme aléatoire. On énoncera la formule de Rice dans le cas général avant de se restreindre au cas d'un polynôme stationnaire.

# Chapitre 1

## Zéros réels d'un polynôme aléatoire à une seule variable

On s'intéresse dans ce chapitre à des polynômes à une seule indéterminée. L'objectif est de donner un nombre moyen de zéros réels d'un polynôme aléatoire dont les coefficients suivent une loi normale centrée donnée. Pour cela on a besoin d'un résultat géométrique qui sera introduit dans la première partie et démontré dans le chapitre suivant.

### 1.1 Un peu de géométrie

Ce premier paragraphe ne fait mention d'aucun polynôme mais introduit un résultat géométrique qui sera utilisé dans la suite du chapitre et démontré postérieurement.

On va travailler sur la sphère unité  $\mathbb{S}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Commençons par donner quelques définitions et notations.

#### Définition 1.1.1

Soit  $\mathbb{S}^n$  la sphère unité dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Soit  $P$  un point sur cette sphère. On appelle *équateur associé* à  $P$  et on note  $P_\perp$  l'ensemble des points d'intersection de  $\mathbb{S}^n$  avec le plan orthogonal au vecteur  $\overrightarrow{OP}$  ( $O$  est le centre de la sphère unité).

On pourra remarquer que  $P_\perp$  est toujours une sphère unité de dimension  $n - 1$ . Ainsi sur la Figure 1.1 on observe que pour  $n = 2$ ,  $P_\perp$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

#### Définition 1.1.2

Soit maintenant  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  une fonction continue dont l'image est une courbe dans  $\mathbb{S}^n$  de longueur finie  $L$ . On pose  $\gamma_\perp := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \gamma(t)_\perp$ .

**Notation.**

On note  $A_L$  l'aire de  $\gamma_\perp$ .

$A_L$  représente la surface balayée par  $\gamma(t)_\perp$  quand  $t$  varie. Cette définition tient compte de la multiplicité des points (i.e. du nombre de fois que  $\gamma(t)_\perp$  survole chaque point). De plus, le fait que la courbe de  $\gamma$  soit de longueur finie assure que l'aire de  $\gamma_\perp$  est finie.

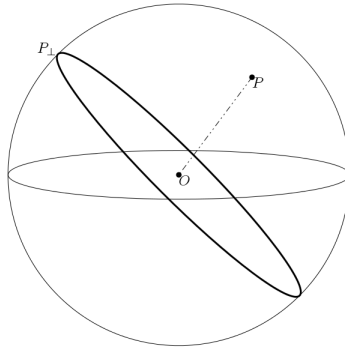


FIGURE 1.1

On va chercher à exprimer l'aire de  $\gamma_\perp$  en fonction de  $L$ . Commençons d'abord par un exemple simple qui nous permettra de nous faire une idée quant au résultat attendu.

**Exemple 1.1.1 (Arc de cercle sur la sphère)**

Supposons que l'image de  $\gamma$  est un arc de cercle de centre  $O$  de longueur  $L$  sur  $\mathbb{S}^n$ . En dimension 2, il est aisé de constater que l'aire de  $\gamma_\perp$  vaut  $2L$  (Figure 1.2a) ou encore — en compliquant un peu l'écriture

$$A_L = \frac{L}{\pi}(2\pi) = \frac{L}{\pi} \times \text{Aire}(\mathbb{S}^1)$$

En dimension 3, l'aire balayée par  $\gamma(t)_\perp$  est proportionnelle à  $L$  (Figure 1.2b). On a donc  $A_L = K \times L$  avec  $K$  une constante à déterminer. Remarquons que lorsque  $\gamma$  est un arc de longueur  $\pi$ , l'aire balayée est l'ensemble de la sphère unité. Ceci nous permet de trouver  $K$ . On a alors

$$A_L = \frac{L}{\pi} \times \text{Aire}(\mathbb{S}^2)$$

En fait, on verra plus tard — dans le chapitre suivant — que l'on peut généraliser cette formule à tout arc de cercle de longueur  $L$  dans  $\mathbb{S}^n$  :

$$A_L = \frac{L}{\pi} \times \text{Aire}(\mathbb{S}^n) \tag{1.1}$$

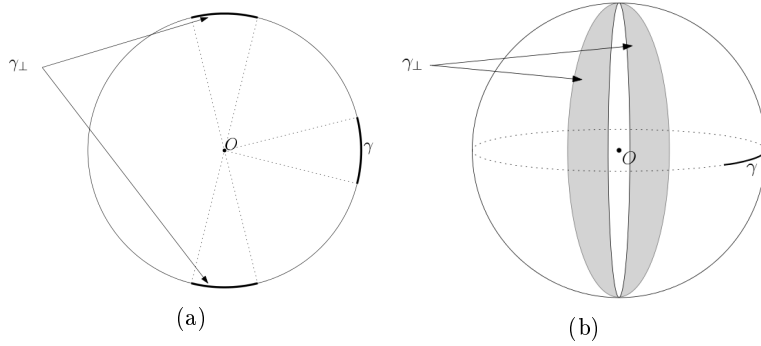


FIGURE 1.2

Revenons maintenant au cas général où l'image de  $\gamma$  est une courbe quelconque de longueur  $L$  sur la sphère  $\mathbb{S}^n$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 1.1.1**

Soit  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^n$  une fonction continue dont l'image est une courbe dans  $\mathbb{S}^n$  de longueur finie  $L$ . On a :

$$A_L = \frac{L}{\pi} \times \text{Aire}(\mathbb{S}^n) \quad (1.2)$$

**Preuve.**

On découpe  $\gamma$  en  $m$  segments indépendants de longueur  $L_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) que l'on peut approcher par des arcs de cercle. On applique ensuite (1.1) à chaque segment et on somme pour obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m L_i \times \text{Aire}(\mathbb{S}^n) \\ &= \frac{L}{\pi} \times \text{Aire}(\mathbb{S}^n) \end{aligned}$$

□

## 1.2 De la géométrie aux zéros des polynômes aléatoires - Formule de Kac

Ce paragraphe permet d'abord de faire le lien entre les notations présentes dans le premier paragraphe et un polynôme aléatoire dont les coefficients sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d) selon une loi normale centrée réduite. Nous aboutirons ainsi à la formule de Kac qui donne le nombre moyen de zéros réels pour un tel polynôme.

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n > 0$  à coefficients réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

$$P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k \quad (1.3)$$

**Notation.**

On définit  $a$  le vecteur des coefficients de  $P$  et  $v(t)$  celui des puissances de  $t$  comme ci-dessous.

$$a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Remarquons que  $P(t) = \langle a | v(t) \rangle$ . En conséquence, rechercher les zéros réels de  $P$  revient à chercher les  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $a$  et  $v(t)$  soient orthogonaux ou encore trouver les  $t$  tels que  $a$  soit dans le plan orthogonal au vecteur  $v(t)$  (noté  $v(t)_\perp$  avec les notations précédentes).

Ce problème semble familier; il rejoint en effet la question traitée dans le paragraphe précédent ceci mis à part qu'on ne travaille plus sur la boule unité mais sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  tout entier. Qu'à cela ne tienne, il suffit de normaliser les vecteurs  $a$  et  $v(t)$ . On pose

$$\alpha = \frac{a}{\|a\|}, \quad \gamma(t) = \frac{v(t)}{\|v(t)\|} \quad (1.5)$$

(où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  associée au produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ )

Si  $\alpha \in \gamma(t)_\perp$  pour un certain  $t$  alors on peut vérifier que  $t$  est une racine du polynôme  $P$  (en effet,  $t$  est une racine de  $\frac{1}{\|a\|}P$ ). Ainsi, le nombre de zéros réels de  $P$  est égal au nombre de fois que  $\alpha$  est recouvert par  $\gamma_\perp$ .

On prend maintenant un polynôme  $P$  de degré  $n$  défini comme dans (1.3) mais dont les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont i.i.d. selon une loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Proposition 1.2.1**

*Le vecteur  $a$  est un vecteur gaussien qui suit une loi normale centrée réduite et  $\alpha$  suit une loi uniforme sur la sphère unité  $\mathbb{S}^n$ .*

**Preuve.**

Etant donné que pour tout  $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$   $a_i$  est une gaussienne,  $a$  est un vecteur gaussien. On peut calculer sa fonction de densité :

$$f_a \left( \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n+1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n a_k^2\right)$$

$f_a$  est une fonction de  $r$  la norme euclidienne du vecteur (qui est aussi le rayon en coordonnées sphériques). Donc  $f_a$  est constante sur la sphère unité. Or,  $\alpha$  prend ses valeurs sur cette sphère. En conséquence, la probabilité que pour un  $t$  donné  $\alpha$  soit dans  $\gamma_\perp(t)$  est

$$\mathbb{P}(\alpha \in \gamma_\perp(t)) = \frac{\text{Aire}(\gamma_\perp(t))}{\text{Aire}(\mathbb{S}^n)} \quad (1.6)$$

□

**Notation.**

On note  $E_n$  le nombre moyen de zéros réels pour un polynôme aléatoire de degré  $n$  dont les coefficients sont i.i.d. suivant  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

En sommant (1.6) sur tous les  $t$  on obtient

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{\text{Aire}(\mathbb{S}^n)} \times \int_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(\alpha \in \gamma_\perp(t)) dt \\ &= \frac{A_L}{\text{Aire}(\mathbb{S}^n)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

C'est ici qu'intervient le résultat montré dans le paragraphe précédent : d'après le théorème 1.1.1 on a

$$E_n = \frac{L}{\pi} \quad (1.8)$$

(on rappelle que  $L$  est la longueur de  $\gamma(\mathbb{R})$  et qu'elle est finie par hypothèse).

Le problème se ramène donc à calculer  $L$ . C'est le mathématicien polonais Mark Kac qui en 1943 fût le premier à achever le calcul [4].

**Théorème 1.2.1 (Formule de Kac)**

Le nombre moyen de zéros réels d'un polynôme de degré  $n$  dont les coefficients sont i.i.d. suivant  $\mathcal{N}(0, 1)$  est

$$E_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{(t^2 - 1)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(t^{2n+2} - 1)^2}} dt \quad (1.9)$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(1-t^{2n+2})^2}} dt \quad (1.10)$$



**Preuve.**

Soit  $\gamma$  une courbe sur  $\mathbb{S}^n$ . On sait que la longueur de  $\gamma$  est égale à

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\gamma'(t)\| dt \quad (1.11)$$

On dérive ensuite  $\gamma$

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \frac{v'(t) \|v(t)\| - v(t) \frac{\langle v'(t)|v(t) \rangle}{\|v(t)\|}}{\|v(t)\|^2} \\ &= \frac{v'(t) \|v(t)\|^2 - v(t) \langle v'(t)|v(t) \rangle}{\|v(t)\|^3} \end{aligned}$$

En conséquence on a

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \frac{\|v'(t)\|^2 \|v(t)\|^2 - \langle v'(t)|v(t) \rangle^2}{\|v(t)\|^4} \quad (1.12)$$

Nous avons maintenant plusieurs façons de procéder.

La première, la plus naturelle, serait de calculer les différents produits scalaires ( $\langle v(t)|v(t) \rangle$ ,  $\langle v'(t)|v(t) \rangle$ ,  $\langle v'(t)|v'(t) \rangle$ ) puis de les réinjecter dans (1.11). Cette méthode est cependant longue. En effet, si le calcul de  $\langle v(t)|v(t) \rangle$  est aisé, ce n'est pas le cas des deux autres.

Dans leur article [3], Edelman et Kostlan proposent une seconde approche plus élégante qui consiste à remarquer que

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \left. \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(\langle v(x)|v(y) \rangle) \right|_{x=y=t} \quad (1.13)$$

Nous n'avons ainsi plus qu'un seul produit scalaire à calculer :

$$\langle v(x)|v(y) \rangle = \sum_{k=0}^n x^k y^k = \frac{1 - (xy)^{n+1}}{1 - xy}$$

Et alors en remplaçant dans (1.12) on obtient

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \frac{1}{(1-t^2)^2} - \frac{(n+1)^2 t^{2n}}{(1-t^{2n+2})^2} \quad (1.14)$$

Ceci nous donne (1.9). On obtient (1.10) en utilisant la parité de la fonction  $t \mapsto \|\gamma'(t)\|^2$  puis en effectuant le changement de variable  $u = \frac{1}{t}$ .  $\square$

Le problème de ce résultat est qu'il n'est pas vraiment "maniable". En effet, pour des valeurs de  $n$  très grande, le calcul de  $E_n$  n'est pas immédiat. On va donc chercher à trouver un équivalent de  $E_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Théorème 1.2.2**

Quand  $n \rightarrow +\infty$  on a

$$E_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln n \quad (1.15)$$

**Preuve.**

Soit  $h_n(t) = \frac{(n+1)t^n(1-t^2)}{1-t^{2n+2}}$ . D'après (1.10) on a

$$E_n = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-h_n(t)^2}}{(1-t^2)} dt \quad (1.16)$$

On cherche dans un premier temps à majorer  $E_n$ . Pour ce faire on va majorer la fonction sous l'intégrale.

Remarquons d'abord que

$$\forall t \in [0, 1], h_n(t) \geq \frac{t^n(1+t)}{2}$$

En effet,  $1-t^{2n+2} = (1-t)(1+t+t^2+\dots+t^{2n+1}) \leq (1-t)(2n+2)$  (car  $0 \leq t \leq 1$ ).

On a alors que

$$\begin{aligned} 0 \leq 1-h_n(t)^2 &\leq \left(1 - \frac{t^n(1+t)}{2}\right) \left(1 + \frac{t^n(1+t)}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{4} (2-t^n(1+t))(2+t^n(1+t)) \\ &\leq 2-t^n(1+t) \end{aligned}$$

On définit  $f : [t, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(x) = x^n(1+x)$ .

Par le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in [t, 1]$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(t)}{1-t}$$

$$\text{i.e. } (1-t)(nc^{n-1} + (n+1)c^n) = 2 - t^n(1+t)$$

En conséquence, pour tout  $t$  il existe  $0 \leq c \leq t$  tel que

$$1-h_n(t)^2 \leq (1-t)(nc^{n-1} + (n+1)c^n) \leq (1-t)(2n+1)$$

Et ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1-h_n(t)^2}}{1-t^2} &\leq \sqrt{\frac{2n+1}{1-t}} \frac{1}{1+t} \\ &\leq \sqrt{\frac{2n+1}{1-t}} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut également majorer  $1 - h_n(t)^2$  par 1 sur  $[0, 1]$ .  
On a finalement

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - h_n(t)^2}}{1 - t^2} dt &\leq \int_0^{1 - \frac{1}{n+1}} \frac{1}{1 - t^2} dt + \int_{1 - \frac{1}{n+1}}^1 \sqrt{\frac{2n+1}{1-t}} dt \\ &\leq -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) + 2\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{2} \ln(n) + C \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

On obtient la majoration suivante

$$E_n \leq \frac{2}{\pi} \ln(n) + \frac{4}{\pi} C \quad (1.17)$$

Pour minorer  $E_n$  on prend  $\varepsilon, \delta \in [0, 1]$ . Comme la fonction sous l'intégrale est positive sur  $[0, 1]$  on a

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1 - h_n(t)^2}}{1 - t^2} dt \geq \int_0^{1 - (n+1)^{\delta-1}} \frac{\sqrt{1 - h_n(t)^2}}{1 - t^2} dt$$

Or,  $\forall t \in [0, 1 - (n+1)^{\delta-1}]$ ,

$$\begin{aligned} h_n(t) &\leq (n+1)t^n \\ &\leq (n+1) \left(1 - (n+1)^{\delta-1}\right)^n = u_n^\delta \end{aligned}$$

Pour tout  $\delta$  dans  $[0, 1]$  on a que  $u_n^\delta \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc pour tout  $\varepsilon$  dans  $[0, 1]$  on a  $h_n(t) \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$  pour  $n$  assez grand. D'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - h_n(t)^2}}{1 - t^2} dt &\geq \int_0^{1 - (n+1)^{\delta-1}} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon}}{1 - t^2} dt \\ &\geq \frac{\sqrt{1 - \varepsilon}}{2} \ln\left(\frac{2 - (n+1)^{\delta-1}}{(n+1)^{\delta-1}}\right) \\ &\geq \frac{\sqrt{1 - \varepsilon}(\delta - 1)}{2} \ln(n) \end{aligned}$$

Ceci nous donne une minoration de  $E_n$  qui ajoutée au résultat (1.16) permet de conclure sur l'équivalent quand  $n \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Définition 1.2.1 (Fonction de densité)**

On définit la fonction  $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$E_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) dt \quad (1.18)$$

$\rho_n(t)$  représente le nombre moyen de zéros par unité de longueur au point  $t$ . Il s'agit là d'une densité. On l'appelle donc la *fonction de densité des zéros*.

En écrivant le développement limité de  $\rho_n$  à l'ordre deux, Edelman et Kostlan [3] obtiennent une estimation plus précise de l'équivalent de  $E_n$ .

**Théorème 1.2.3**

Quand  $n \rightarrow +\infty$  on a

$$E_n = \frac{2}{\pi} \ln(n) + C_1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (1.19)$$

avec

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{\pi} \left( \log(2) + \int_0^{+\infty} \left[ \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4 \exp^{-2x}}{(1 - \exp^{-2x})^2}} - \frac{1}{x+1} \right] dx \right) \\ &= 0.6257358072 \dots \end{aligned}$$

### 1.3 Un résultat plus général

En s'inspirant de la preuve de la formule de Kac, on va maintenant montrer un résultat plus général. On s'intéresse désormais à un polynôme aléatoire  $P$  dont les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n$  suivent toujours une loi normale centrée. Cependant, on n'impose pas qu'ils soient indépendants ou que les lois qu'ils suivent soient réduites. On cherche le nombre moyen de zéro réel de  $P$ .

**Notation.**

On notera  $\Sigma$  la matrice de covariance associée aux coefficients de  $P$ .

$$\Sigma = (\text{Cov}(a_i, a_j))_{0 \leq i, j \leq n} \quad (1.20)$$

En reprenant les notations du paragraphe précédent, on a que  $a$ , défini par (1.4) (page 6), est un vecteur gaussien qui suit une loi normale multidimensionnelle  $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ .

On a traité dans le paragraphe précédent le cas où  $a$  suivait une loi normale centrée réduite (i.e.  $\Sigma = I_{n+1}$ ). On souhaite donc se ramener à ce cas. Cela est possible en effectuant le changement de variable  $a' = \Sigma^{-\frac{1}{2}}a$ . On prend

$$\alpha = \frac{a'}{\|a'\|}, \quad \gamma(t) = \frac{\Sigma^{\frac{1}{2}}v(t)}{\|\Sigma^{\frac{1}{2}}v(t)\|} \quad (1.21)$$

**Théorème 1.3.1**

Soit  $P$  un polynôme aléatoire de degré  $n$  dont les coefficients suivent des lois normales centrées. Soit  $\Sigma$  leur matrice de covariance. Alors le nombre moyen de zéros réels de  $P$  sur l'intervalle  $I$  est

$$E_n(I) = \frac{1}{\pi} \int_I \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(v(x)^T \Sigma v(y))} \Big|_{x=y=t} dt \quad (1.22)$$

**Preuve.**

Comme  $\Sigma$  est symétrique, pour tout  $t$ , on a

$$\langle a|v(t) \rangle = \langle \Sigma^{-\frac{1}{2}}a | \Sigma^{\frac{1}{2}}v(t) \rangle$$

Donc on a toujours

$$E_n(I) = \frac{1}{\pi} \int_I \|\gamma'(t)\| dt$$

avec  $\gamma$  défini par (1.21).

Et d'après (1.13) on vérifie

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(v(x)^T \Sigma v(y)) \Big|_{x=y=t}$$

Ce qui nous donne le résultat voulu.  $\square$

**Exemple 1.3.1 (Un résultat étonnamment simple)**

Soit  $P$  un polynôme aléatoire de degré  $n$ . On suppose que pour tout  $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$   $a_i$  suit une loi normale centrée de variance  $\binom{n}{i}$  et que les  $a_i$  sont indépendants. On a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de  $v(x)^T \Sigma v(y)$  nous donne  $\rho_n$  :

$$\begin{aligned} \rho_n(t) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(v(x)^T \Sigma v(y)) \Big|_{x=y=t}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln((xy+1)^n) \Big|_{x=y=t}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\pi(t^2+1)} \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$E_n(\mathbb{R}) = \sqrt{n}$$

En fait ce résultat très simple peut se déduire de l'allure de la courbe de  $\gamma$ . En faisant le changement de variable  $t = \tan(\theta)$  on obtient

$$\gamma(\theta) = \begin{pmatrix} \binom{n}{0}^{\frac{1}{2}} \cos^n(\theta) \\ \binom{n}{1}^{\frac{1}{2}} \cos^{n-1}(\theta) \sin(\theta) \\ \vdots \\ \binom{n}{n}^{\frac{1}{2}} \sin^n(\theta) \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Puis, en dérivant  $\gamma$  par rapport à  $\theta$  on remarque que la fonction vérifie une équation différentielle :

$$\gamma'(\theta) = A\gamma(\theta), \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & -a_2 & & \vdots \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & a_{n-1} & 0 & -a_n \\ \dots & & & & a_n & 0 \end{pmatrix}$$

où  $a_k = \sqrt{k(n+1-k)}$ ,  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

On a alors

$$\gamma(\theta) = \exp(A\theta)\gamma(0) \quad (1.24)$$

Cela signifie que la courbe de  $\gamma$  est invariante par rotation. Notons que  $\exp(A\theta)$  est une matrice orthogonale (car  $A$  est antisymétrique) et qu'en conséquence,  $\|\exp(A\theta)v\| = \|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n+1}$  — autrement dit,  $v \mapsto \exp(A\theta)v$  est une isométrie.

On dérive maintenant (1.24) ce qui nous donne

$$\gamma'(\theta) = \exp(A\theta)\gamma'(0) \quad (1.25)$$

La norme de  $\gamma'$  en  $\theta$  vaut alors

$$\begin{aligned} \|\gamma'(\theta)\|^2 &= \|\exp(A\theta)\gamma'(0)\|^2 \\ &= \|\exp(A\theta)a_1e_1\|^2 \end{aligned}$$

où  $e_1$  est le premier vecteur de la base canonique (orthonormée) de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . D'où,

$$\|\gamma'(\theta)\|^2 = |a_1|^2 = n \quad (1.26)$$

$\|\gamma'\|$  est constant (égal à  $\sqrt{n}$ ) pour tout  $\theta$  dans  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . En intégrant sur cet intervalle, on trouve bien que la longueur de la courbe de  $\gamma$  est égale à  $\pi\sqrt{n}$ .

**Proposition 1.3.1**

$$P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{\sqrt{(n-k)!k!}} t^k \quad (1.27)$$

où les  $a_i$  sont indépendants suivant des lois normales  $\mathcal{N}(0, \binom{n}{i})$  et les  $b_i$  sont i.i.d. suivant une loi normale centrée réduite.

**Proposition 1.3.2**

Soit  $P$  le polynôme de degré  $n$  défini par (1.27). Alors

$$E_n(\mathbb{R}) = \sqrt{n} \quad (1.28)$$

**Exemple 1.3.2 (Série entière)**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une série entière définie par :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k \quad (1.29)$$

où les  $a_i$  sont indépendants suivant une loi normale centrée  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{i!})$ . Comme précédemment, on peut écrire

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{\sqrt{k!}} t^k \quad (1.30)$$

où les  $b_i$  sont i.i.d. suivant une loi normale centrée réduite.

La matrice de covariance  $\Sigma$  de  $f$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent  $\frac{1}{|I|}$ . Le calcul de  $v(x)^T \Sigma v(y)$  nous donne

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(e^{xy}) \Big|_{x=y=t}} \\ &= \frac{1}{\pi}\end{aligned}\tag{1.31}$$

**Proposition 1.3.3**

Soit  $f$  la série entière définie par (1.30). Alors pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  on a

$$E(I) = \frac{|I|}{\pi}\tag{1.32}$$

où  $|I|$  est la longueur de l'intervalle.



## Chapitre 2

# Problème de l'aiguille de Buffon et longueur d'un arc

George-Louis Leclerc, Comte de Buffon, naquit au début du XVIIIème siècle dans une petite ville de Bourgogne. Il commence par étudier le droit pour faire plaisir à son père, conseiller au parlement de Bourgogne. Puis il s'oriente vers les sciences et plus particulièrement les mathématiques et la physique. En 1733, il présente un mémoire *Sur le jeu du franc carreau* à l'Académie des Sciences. Celui-ci introduit le problème de l'aiguille que nous allons maintenant présenter.

### 2.1 Le problème de Buffon dans le plan

Le résolution du problème de l'aiguille de Buffon donne une autre démonstration de la formule (1.8) (page 7) utilisée précédemment.

On munit le plan d'une famille de droites parallèles telles que deux droites consécutives sont distantes de  $d$  une constante. On jette ensuite au hasard une aiguille dans ce plan.

Le Comte de Buffon (1707-1788) s'intéressa au nombre  $S$  de droites coupées par l'aiguille. Il démontra, le résultat suivant.

#### **Théorème 2.1.1**

*Si on jette une aiguille de longueur  $L$  sur un plan muni d'une famille de droites parallèles définie comme ci-dessus, alors en moyenne, l'aiguille intersecte  $\frac{2L}{\pi d}$  droites — autrement dit*

$$E(S) = \frac{2L}{\pi d} \tag{2.1}$$

**Preuve.**

Pour démontrer ce résultat on va distinguer deux cas :  $L < d$  et  $L \geq d$ .

Avant toute chose, on définit  $x$  l'abscisse du milieu de l'aiguille et  $\theta$  l'angle formé par  $Ox$  et l'aiguille comme sur la Figure 2.1. Quitte à translater le repère et en utilisant les symétries du problème on peut supposer  $x \in [0, \frac{d}{2}[$  et  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

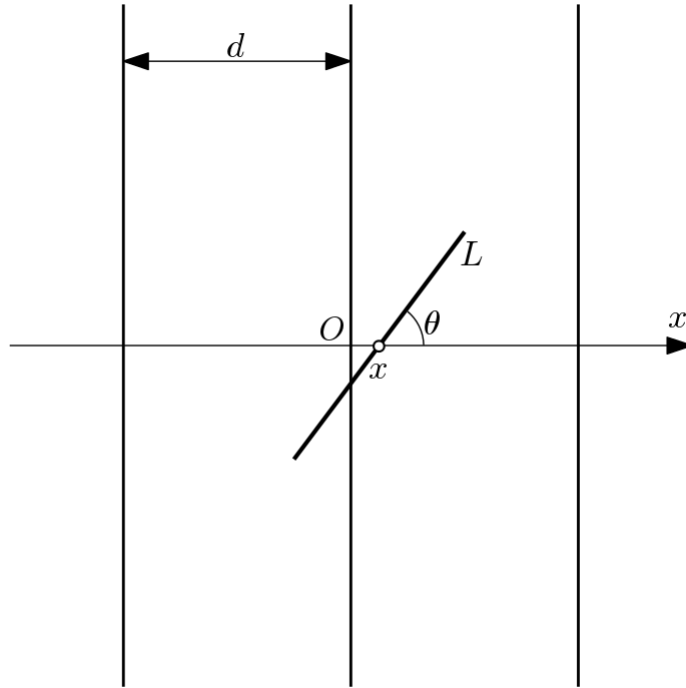


FIGURE 2.1

Supposons dans un premier temps que  $L < d$ . Remarquons que l'aiguille coupe au plus une droite et qu'il y a une intersection si et seulement si  $x \leq \frac{L}{2} \cos(\theta)$ .  $x$  et  $\theta$  sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur  $[0, \frac{d}{2}[$  et  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  respectivement. Donc

$$E(S) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbb{P}(x \leq \frac{L}{2} \cos(\theta)) d\theta = \frac{2L}{\pi d}$$

On suppose désormais que  $L \geq d$ .  $E(S)$  est une fonction croissante de  $L$ . On note  $E(S) = f(L)$  où  $f$  est croissante. Remarquons que  $\lim_{L \rightarrow 0} f(L) = 0$ .

On découpe l'aiguille en  $n$  segments de longueur  $\frac{L}{n}$ . Pour  $n$  assez grand on a  $\frac{L}{n} < d$ .  $S$  est la somme des nombres de points d'intersections de chaque segment

avec une droite. Et comme tous ces segments ont la même probabilité de couper une droite on obtient

$$\begin{aligned} E(S) &= f(L) = nf\left(\frac{L}{n}\right) \\ &= n \times \frac{2L}{\pi nd} = \frac{2L}{\pi d} \end{aligned}$$

□

On a ainsi prouvé (2.1). On peut cependant généraliser ce résultat sur les segments de longueur  $L$  à toute courbe dans le plan ainsi que l'a montré le mathématicien français Barbier [2] en 1860.

**Théorème 2.1.2**

*Soit  $C$  une courbe quelconque de longueur  $L$  dans le plan muni d'une famille de droites parallèles telles que deux droites consécutives sont distantes de  $d$  (Figure 2.2). Alors l'espérance du nombre d'intersections  $S$  entre la courbe  $C$  et les droites parallèles vaut*

$$E(S) = \frac{2L}{\pi d} \tag{2.2}$$

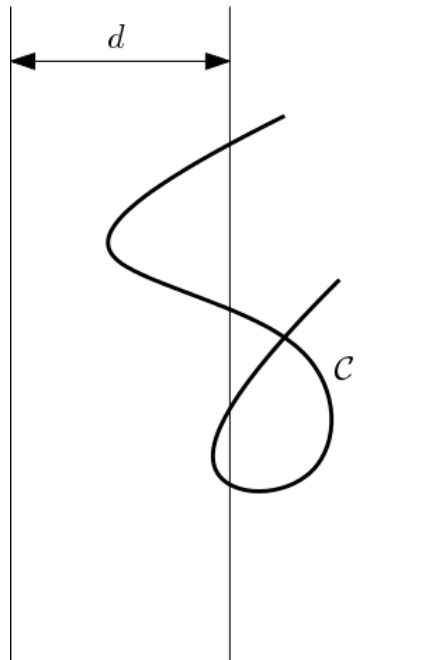


FIGURE 2.2

**Preuve.**

Ce résultat (2.2) se démontre en faisant une approximation infinitésimale de la courbe  $\mathcal{C}$  par des segments. On applique ensuite le résultat du théorème 2.1.1 à chacun d'eux puis on somme les nombres moyens d'intersections obtenus en utilisant la linéarité de l'espérance.

## 2.2 Projection sur la sphère unité

Comme nous travaillons sur la sphère unité dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans le premier chapitre, nous allons chercher à généraliser le problème de l'aiguille de Buffon sur  $\mathbb{S}^n$  comme le fit Barbier avant nous [6]. Mais introduisons d'abord un objet géométrique qui nous sera fort utile pour la suite.

**Définition 2.2.1 (Grand cercle)**

On appelle *grand cercle* sur la sphère unité un cercle tracé sur  $\mathbb{S}^n$  de même diamètre que  $\mathbb{S}^n$  ( $n \geq 2$ ).

De manière équivalente, on peut dire qu'un grand cercle est un cercle sur la sphère de centre  $O$  ou encore que c'est l'intersection entre un plan passant par  $O$  et la sphère.

En dimension 3, quand  $n = 2$ , les arcs de grands cercles sont les géodésiques de la sphère.

Le problème est le suivant. On fixe un grand cercle  $C$  de  $\mathbb{S}^n$  ( $n \geq 2$ ) et on jette une *aiguille* sur la sphère unité de façon aléatoire (une aiguille sur  $\mathbb{S}^n$  est un arc d'un grand cercle de longueur  $L$ ). On cherche le nombre moyen  $E(S)$  de points d'intersections entre  $C$  et notre aiguille. Remarquons que si on fixe notre aiguille et qu'on prend un grand cercle aléatoirement on obtient le même résultat. C'est ce que nous allons faire dans la suite.

Soit  $C$  une courbe quelconque sur la sphère unité (Figure 2.3). Tout d'abord il nous faut remarquer que  $E(S)$  est proportionnel à  $L$ , la longueur de  $C$ . En effet, si on approxime la courbe dans  $\mathbb{S}^n$  par une série d'arcs de grands cercles (de la même façon qu'on a approximé une courbe de  $\mathbb{R}^2$  par une série de segments) on a que l'espérance du nombre total d'intersections de la courbe avec un grand cercle pris au hasard est la somme des espérances pour chaque segment. En conséquence  $E(S)$  est un multiple de  $L$ .

$$E(S) = k \times L$$

On va d'abord faire la démonstration dans  $\mathbb{R}^3$ .

Afin de déterminer la constante  $k$  on prend le cas particulier suivant : la courbe  $C$  est un grand cercle. Dans  $\mathbb{S}^2$ , deux grands cercles distincts s'intersectent exactement deux fois et la longueur d'un grand cercle vaut  $2\pi$  (Figure 2.4). Ainsi, quelque soit le second grand cercle prit au hasard, il intersecte exactement

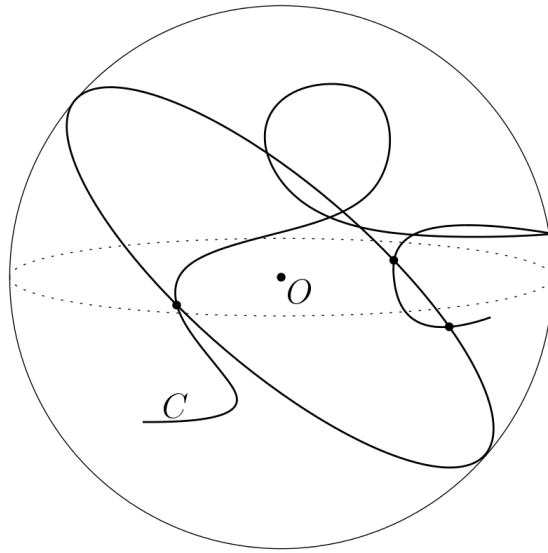


FIGURE 2.3

deux fois l'aiguille (sauf si  $C$  et l'aiguille coïncident mais cela est un évènement négligeable — donc de mesure nulle). De cela on déduit la valeur de  $k$

$$k = \frac{1}{\pi}$$

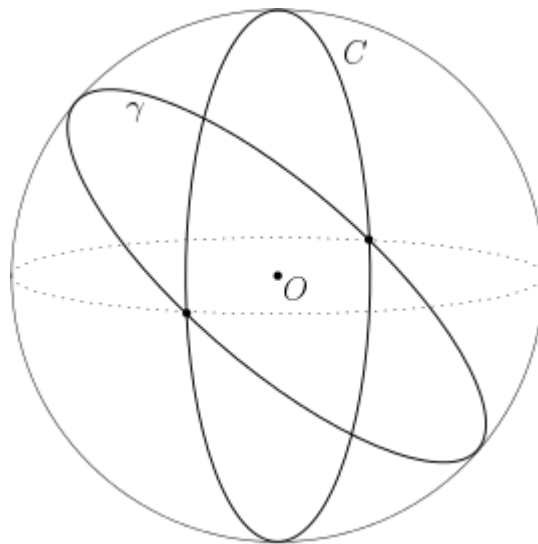


FIGURE 2.4

On peut généraliser cette formule en dimension supérieure.

**Théorème 2.2.1**

*Soit une courbe  $C$  de longueur  $L$  dans  $\mathbb{S}^n$  ( $n \geq 2$ ). L'espérance du nombre d'intersections  $S$  entre  $C$  et un grand cercle de  $\mathbb{S}^n$  prit au hasard vaut*

$$E(S) = \frac{L}{\pi} \tag{2.3}$$

**Preuve.**

On a déjà fait le cas  $n = 2$ . Le cas général  $n \geq 3$  se fait de façon similaire en regardant l'intersection entre un grand cercle de  $\mathbb{S}^n$  et une sphère de dimension  $n - 1$ .  $\square$

## 2.3 Problème de Buffon et polynômes aléatoires

Le problème de Buffon dans le plan est connu pour être un moyen de calculer une approximation de  $\pi$  à l'aide des probabilités. Cependant, il a été évoqué ici car — comme nous l'avons dit précédemment — il permet également de redémontrer le résultat (1.8) énoncé dans le premier chapitre (page 7).

Pour relier le résultat du théorème 2.2.1 ci-dessus aux zéros d'un polynôme aléatoire  $P$  de degré  $n$  défini par (1.3) il suffit de prendre comme courbe la courbe  $\gamma$  définie par (1.5), de longueur  $L$  sur la sphère  $\mathbb{S}^n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ . D'après le théorème 2.2.1 le nombre moyen  $E(S)$  d'intersections de  $\gamma$  avec un grand cercle de  $\mathbb{S}^n$  prit au hasard vaut  $\frac{L}{\pi}$ . Reste à montrer que cette espérance correspond au nombre moyen de zéros réels d'un polynôme aléatoire de degré  $n$ .

Un polynôme  $P$  de degré  $n$  est représenté par la donnée d'un vecteur  $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$  défini comme dans (1.5) (page 6). À ce vecteur on associe un grand cercle, noté  $\alpha_\perp$ , qui correspond au grand cercle de  $\mathbb{S}^n$  orthogonal à  $\overline{O\alpha}$  (avec  $O$  le centre de la sphère unité). On rappelle que le nombre de zéros réels de  $P$  est exactement le nombre d'intersections de la courbe  $\gamma$  avec le grand cercle  $\alpha_\perp$ .

Ainsi, prendre un polynôme de degré  $n$  aléatoirement revient donc à choisir un  $\alpha$  au hasard et donc à prendre un grand cercle de  $\mathbb{S}^n$  au hasard sur la sphère unité. En conséquence,  $E(S)$  représente bien le nombre moyen de zéros réels d'un polynôme de degré  $n$  pris au hasard.

## Chapitre 3

# Formules de Rice pour un polynôme aléatoire à deux indéterminées

Dans ce chapitre nous allons démontrer la formule de Rice qui donne le nombre moyen de racines réelles d'un polynôme aléatoire à une indéterminée. On l'utilisera ensuite pour trouver le nombre moyen de points critiques d'un polynôme aléatoire à deux indéterminées ce qui nous donnera une majoration du nombre de ses domaines nodaux.

### 3.1 Formule de Rice en dimension 1

Ce paragraphe est un retour sur les polynômes à une seule indéterminée. Il ne présente pas de nouveau résultat mais permet de se familiariser avec les méthodes utilisées dans la suite du chapitre.

**Notation.**

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n > 0$  à coefficients réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

$$P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$$

On pose  $C(P, I)$  l'ensemble des zéros de  $P$  sur  $I$  et  $N(P, I)$  le nombre de racines du polynôme sur  $I$ .

$$C(P, I) := \{t \in I \mid P(t) = 0\}$$

$$N(P, I) := \#C(P, I)$$

L'objectif est de trouver l'espérance de  $N(P, I)$ . Azaïs et Wschebor [1] y parviennent en écrivant  $N(P, i)$  comme la limite d'une intégrale.

**Proposition 3.1.1 (Formule de Kac)**

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ( $I = [t_1, t_2]$ ) et  $P$  un polynôme à une variable.

Supposons que  $P$  ne s'annule pas sur les bords de l'intervalle  $I$  (i.e.  $P(t_1) \neq 0$  et  $P(t_2) \neq 0$ ) et qu'il n'a pas de racine multiple.

Alors

$$N(P, I) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\delta} \int_I \mathbf{1}_{\{|P(t)| < \delta\}} |P'(t)| dt \quad (3.1)$$

**Preuve.**

Comme  $P$  est non nul ( $P(t_1) \neq 0$  et  $P(t_2) \neq 0$ ) on en déduit que  $N(P, I)$  est fini. On pose  $N(P, I) = n$ .

Si  $n=0$ , alors quelque soit  $t \in I$ ,  $|P(t)| > \delta$  pour  $\delta$  assez petit.

Donc  $\mathbf{1}_{\{|P(t)| < \delta\}} = 0$  pour tout  $t$  dans  $I$  et en conséquence,

$$\int_I \mathbf{1}_{\{|P(t)| < \delta\}} |P'(t)| dt = 0$$

Supposons maintenant  $n \geq 1$ .  $C(P, I) = \{r_1, \dots, r_n\}$ . Par hypothèse,  $P(r_i) = 0$  et  $P'(r_i) \neq 0$  pour tout  $i$ . Donc pour  $\delta$  assez petit

$$P^{-1}(] - \delta, \delta]) = \bigsqcup_{i=1}^n J_i$$

où  $J_i$  est un intervalle de  $I$  contenant  $r_i$ .

Comme  $J_i \cap J_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ ,

$$\int_I \mathbf{1}_{\{|P(t)| < \delta\}} |P'(t)| dt = \sum_{i=1}^n \int_{J_i} |P'(t)| dt$$

Pour tout  $i$ ,  $P|_{J_i}$  est un difféomorphisme. Donc

$$\int_{J_i} |P'(t)| dt = 2\delta$$

$$\frac{1}{2\delta} \int_I \mathbf{1}_{\{|P(t)| < \delta\}} |P'(t)| dt = \frac{1}{2\delta} \sum_{i=1}^n 2\delta = n$$

□

En calculant l'espérance de  $N(P, I)$  à l'aide de (3.1) on en déduit la formule de Rice ci-dessous.



**Théorème 3.1.1 (Formule de Rice)**

Avec les notations du chapitre, on a

$$E(N(P, I)) = \int_I E(|P'(t)| \mid P(t) = 0) \mathbb{P}(P(t) = 0) dt \quad (3.2)$$

On va maintenant appliquer ce résultat à un polynôme aléatoire. Un polynôme aléatoire peut être vu comme un processus stochastique. Dans le cas d'un polynôme aléatoire dont les coefficients sont indépendants et suivent des lois normales centrées c'est un processus gaussien (centré). On notera désormais notre polynôme  $X$ .

$$X(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$$

**Définition 3.1.1 (Fonction de covariance)**

Soit  $X$  un processus gaussien centré comme ci-dessus. On définit

$$k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k(s, t) = E(X(s)X(t)) \quad (3.3)$$

On appelle  $k$  la *fonction de covariance* de  $X$ .

Avec ces notations, le théorème 1.3.1 qu'on souhaite remonter devient.

**Théorème 3.1.2**

Soit  $X$  un processus gaussien centré. Soit  $k$  sa fonction de covariance. Alors le nombre moyen de zéros réels de  $X$  sur l'intervalle  $I$  est

$$E(N(X, I)) = \frac{1}{\pi} \int_I \sqrt{\left. \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(k(x, y)) \right|_{x=y=t}} dt \quad (3.4)$$

**Preuve.**

D'après la formule de Rice, on a

$$E(N(X, I)) = \int_I E(|X'(t)| \mid X(t) = 0) \mathbb{P}(X(t) = 0) dt$$

Comme  $X$  est un processus gaussien,  $\mathbb{P}(X(t) = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k(t, t)}}$

D'autre part, on utilise une formule de régression linéaire — démontrée par Nicolaescu [5] — pour calculer  $E(|X'(t)| \mid X(t) = 0)$ .

$$E(|X'(t)| \mid X(t) = 0) = E(|Y(t)|)$$

où  $Y$  est un vecteur gaussien centré (car  $X$  et  $X'$  sont centrés) et de fonction de covariance

$$k_Y(t, t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} k(x, y) \Big|_{x=y=t} - \frac{\partial}{\partial x} k(x, y) \Big|_{x=y=t} k(t, t)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} k(x, y) \Big|_{x=y=t}$$

On en déduit que

$$E(|Y(t)|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{k_Y(t, t)}$$

On a alors

$$E(N(X, I)) = \frac{1}{\pi} \int_I \sqrt{\frac{k_Y(t, t)}{k(t, t)}} dt \quad (3.5)$$

Il ne reste plus qu'à montrer que

$$\frac{k_Y(t, t)}{k(t, t)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln(k(x, y)) \Big|_{x=y=t}$$

□

Un bon exercice consiste à appliquer cette formule aux différents polynômes étudiés dans le premier chapitre pour vérifier qu'on retrouve bien les résultats voulus.

## 3.2 Formule de Rice en dimension 2 et notations

Les zéros d'un polynôme à deux indéterminées ne sont en général pas ponctuels et ce même si le polynôme est non nul (Figure 3.1). Dans ce paragraphe, on ne cherche donc pas à déterminer le nombre moyen de zéro d'un polynôme à deux variables — ce nombre étant la plupart du temps infini — mais on va trouver une majoration du nombre moyen de domaines nodaux du polynôme. Commençons par définir ces derniers.

### Définition 3.2.1 (Domaine nodal d'un polynôme)

Soit  $D$  un domaine régulier de  $\mathbb{R}^2$  et  $P$  un polynôme qui prend ces valeurs dans  $D$ . On pose

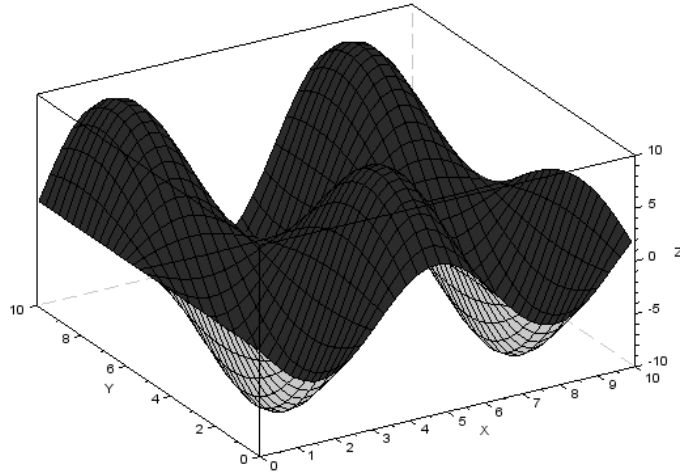
$$C(P, D) := \{z \in D \mid P(z) = 0\}$$

$C(P, D)$  est appelé *ensemble nodal* de  $P$  sur  $D$ .

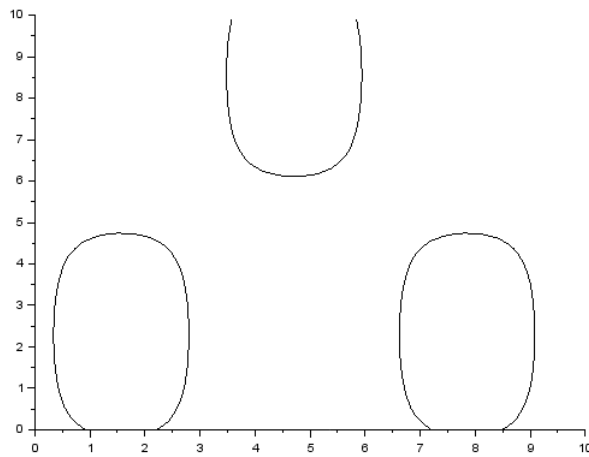
Les *domaines nodaux* de  $P$  sur  $D$  sont les composantes connexes de  $D \setminus C(P, D)$ .

Chaque domaine nodal admet un ou plusieurs extrema locaux. En conséquence, le nombre de points critiques du polynôme  $P$  sur l'ensemble  $D$  — supérieur au nombre d'extrema locaux sur ce même domaine — va majorer le nombre

de domaines nodaux. En passant à la moyenne, la majoration est conservée. On cherche désormais le nombre moyen de points critiques d'un polynôme aléatoire qu'on notera  $N(P, D)$ .



(a)



(b) Ensemble nodal et domaines nodaux du graphe de la Figure 3.1a

FIGURE 3.1

**Notation.**

Comme précédemment, on notera  $X$  un polynôme aléatoire dont les coefficients sont indépendants et suivent des lois normales centrées. C'est encore un processus gaussien centré.

$$X(x, y) = \sum_{i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j \quad (3.6)$$

On définit également  $Y$  le vecteur des dérivées partielles de  $X$  et  $Z$  la Jacobienne de  $Y$ .

$$Y := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} X & \frac{\partial}{\partial y} X \end{pmatrix}$$

$$Z := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X & \frac{\partial^2}{\partial y^2} X \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

On remarque que  $Z$  est une matrice symétrique. On peut voir  $Z$  comme un vecteur dans  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} X \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} X \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} X \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

**Définition 3.2.2**

Comme précédemment, on peut définir la fonction de covariance de  $X$ , un processus gaussien centré dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$k : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k(z, z') = E(X(x, y)X(x', y')) \quad (3.9)$$

où  $z = (x, y)$  et  $z' = (x', y')$ .

**Notation.**

On notera dans la suite  $Cov(Y)$ ,  $Cov(Z)$  les matrices de covariance des vecteurs  $Y$  et  $Z$ .

$$Cov(Y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} k & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} k \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y'} k & \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} k \end{pmatrix} \Big|_{z=z'}$$

$$\text{Cov}(Z) := \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial x'^2} k & \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial x' \partial y'} k & \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y'^2} k \\ \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial x' \partial y'} k & \frac{\partial^4}{\partial x \partial x' \partial y \partial y'} k & \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x' \partial y'} k \\ \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y'^2} k & \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x' \partial y'} k & \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial y'^2} k \end{array} \right) \Bigg|_{z=z'}$$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème de Rice en dimension 2 qui nous donne le nombre moyen de points critiques d'un polynôme aléatoire sur un domaine de  $\mathbb{R}^2$ .

**Théorème 3.2.1 (Formule de Rice en dimension 2)**

Soit  $X$  un polynôme aléatoire et  $Y, Z$  définis par (3.6) et (3.7) sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons

1.  $Y$  est un processus gaussien.
2.  $z \rightarrow Y(z)$  est presque sûrement  $C^1$ .
3.  $\forall z \in U, Y(z)$  a une distribution non dégénérée (i.e.  $\det \text{Cov}(Y) > 0$ ).
4.  $\mathbb{P}(\exists z \in U | Y(z) = 0 \text{ et } \det(Z(z)) = 0) = 0$

Alors, pour  $D \subset U$  mesurable, le nombre moyen de points critiques de  $X$  sur  $D$  vaut

$$E(N(X, D)) = \int_D E(|\det(Z(z))| | Y(z) = 0) \mathbb{P}(Y(z) = 0) dz \quad (3.10)$$

où  $d$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$ .

Remarquons que les conditions 1 et 2 du théorème sont toujours vérifiées puisque l'on travaille avec des polynômes aléatoires ( $C^\infty$ ) qui sont également des processus gaussiens (car les coefficients suivent des lois normales).

La condition 3 est une condition nécessaire et suffisante pour que  $z \rightarrow \mathbb{P}(Y(z) = 0)$  soit bien définie.

Enfin, la condition 4 traduit le fait qu'un point critique de  $X$  est presque sûrement non dégénéré. Ainsi, tout point critique de  $X$  est presque sûrement isolé et donc le nombre moyen de points critiques sur un domaine  $D$  borné est presque sûrement fini.

### 3.3 Cas stationnaire et applications

Dans ce paragraphe, on va se restreindre à l'étude du cas stationnaire, où la fonction de covariance du polynôme aléatoire  $X$ ,  $k$  évaluée en  $(z, z')$  ne dépend que de la norme de la différence  $z - z'$ .

**Notation.**

On écrira

$$k(z, z') = \Gamma(\|z - z'\|^2) \quad (3.11)$$

**Théorème 3.3.1**

Soit  $X$  un polynôme aléatoire vérifiant les conditions du théorème 3.2.1 et dont la fonction de covariance  $k$  vérifie (3.11). Alors, le nombre moyen de points critiques de  $X$  sur  $D$  vaut

$$E(N(X, D)) = \frac{\text{Aire}(D)}{\sqrt{3}\pi} \left| \frac{\Gamma''(0)}{\Gamma'(0)} \right| \quad (3.12)$$

**Preuve.**

Le calcul nous permet d'affirmer que  $Y$  et  $Z$  sont indépendants. La formule de Rice devient donc

$$E(N(X, D)) = \int_D E(|\det(Z(z))|) \mathbb{P}(Y(z) = 0) dz$$

On peut également vérifier que

$$\text{Cov}(Y) = -2\Gamma'(0)I_2, \quad \text{Cov}(Z) = 4\Gamma''(0) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Comme  $\Gamma'(0)$  et  $\Gamma''(0)$  sont non nuls (par les conditions 3 et 4 du théorème 3.2.1),  $\text{Cov}(Y)$  et  $\text{Cov}(Z)$  sont inversibles.

On en déduit

$$\mathbb{P}(Y(z) = 0) = \frac{1}{4\pi|\Gamma'(0)|}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} E(|\det(Z)|) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|ab - c^2|}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{|\det \text{Cov}(Z)|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a \ c \ b) \text{Cov}(Z)^{-1} \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}\right) da db dc \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|ab - c^2|}{(8\Gamma''(0))^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{64\Gamma''(0)}(3a^2 + 3b^2 + 8c^2 - 2ab)\right) da db dc \end{aligned}$$

Après une succession de changements de variables s'inspirant de l'annexe C de l'article de Nicolaescu [5], on obtient

$$E(|\det(Z)|) = \frac{4}{\sqrt{3}} |\Gamma''(0)|$$

On a finalement

$$E(N(X, D)) = \int_D \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \frac{|\Gamma''(0)|}{|\Gamma'(0)|} dz = \frac{\text{Aire}(D) |\Gamma''(0)|}{\sqrt{3}\pi |\Gamma'(0)|} \quad \square$$

Montrons maintenant l'importance du cas stationnaire à travers un exemple.

**Exemple 3.3.1 (Série entière)**

Soit  $X$  le polynôme aléatoire à deux variables dont les coefficients  $a_{i,j}$  sont indépendants et suivent des lois normales centrées  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{i!j!})$ .

$$X(x, y) = \sum_{i,j=0}^{+\infty} a_{i,j} x^i y^j \quad (3.13)$$

$X$  peut également s'écrire

$$X(x, y) = \sum_{i,j=0}^{+\infty} \frac{b_{i,j}}{\sqrt{i!j!}} x^i y^j \quad (3.14)$$

où les  $b_{i,j}$  sont indépendants et identiquement distribués selon une loi normale centrée réduite.

La fonction de covariance de ce polynôme est

$$k(z, z') = \exp(\langle z | z' \rangle)$$

où  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^2$ .

Il est clair que  $k(z, z')$  ne dépend pas de  $\|z - z'\|^2$ . On définit alors  $\tilde{X}$  par

$$\tilde{X}(x, y) = X(x, y) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$$

Notons que  $\tilde{X}$  et  $X$  ont le même ensemble nodal et donc les mêmes domaines nodaux.

Il s'ensuit que  $E(N(X, D)) = E(N(\tilde{X}, D))$ . De plus,

$$\tilde{k}(z, z') = \exp\left(-\frac{1}{2} \|z - z'\|^2\right) = \Gamma(\|z - z'\|^2)$$

On pose  $\Gamma(t) = \exp(-\frac{1}{2}t)$ . En dérivant puis en évaluant en 0 on obtient

$$\Gamma'(0) = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma''(0) = \frac{1}{4}$$

On vérifie que  $\tilde{X}$  vérifie les conditions 3 et 4 du théorème 3.2.1. On peut donc appliquer le résultat du théorème 3.3.1.

Donc

$$E(N(\tilde{X}, D)) = \frac{\text{Aire}(D)}{2\sqrt{3}\pi}$$

Ainsi on a la proposition suivante

**Proposition 3.3.1**

*La série entière définie par (3.14) sur un domaine  $D$  possède un nombre de points critiques moyen qui vaut :*

$$E(N(X, D)) = \frac{\text{Aire}(D)}{2\sqrt{3}\pi} \quad (3.15)$$

En conséquence, le nombre moyen de domaine nodaux sur  $D$  est inférieur à  $\frac{\text{Aire}(D)}{2\sqrt{3}\pi}$ .



# Bibliographie

- [1] J.M. Azaïs and M. Wschebor. *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields*. Wiley, 2009.
- [2] E. Barbier. Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. *Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, 5 :273–286, 1860.
- [3] A. Edelman and E. Kostlan. How many zeros of a random polynomial are real? *Bulletin of the American Mathematical Society*, 32 :1–37, 1994.
- [4] M. Kac. On the average number of real roots of a random algebraic equation. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49 :314–320, 1943.
- [5] L. Nicolaescu. Critical sets of random smooth functions on compact manifolds. *Asian J. Math*, page 2011, 2012.
- [6] E. Wegert and L.N. Trefethen. From the buffon needle problem to the kreiss matrix theorem. *The American Mathematical Monthly*, 101 :132–139, 1994.