



UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES

INSTITUT FOURIER

MASTER 1

Le Théorème d'Ehrhart

Auteur :
Hélène CHAKROUN

Encadrant :
Emmanuel PEYRE

22 mai 2017

LE THÉORÈME D'EHRHART

CHAKROUN HÉLÈNE

22 mai 2017

RÉSUMÉ. Le théorème d'Ehrhart fournit une fonction de comptage polynomiale (et donc relativement simple) des éléments d'un réseau euclidien de dimension finie se trouvant à l'intérieur d'un polytope fermé construit sur ce réseau. Cette fonction a d'autres caractéristiques remarquables, la fonction de réciprocité permet notamment de compter les points de l'intérieur strict du même polytope. Quant au terme constant du polynôme, il est lié à un invariant topologique : la caractéristique d'Euler-Poincaré.

TABLE DES MATIÈRES

1. Contexte et énoncé	2
2. Cas de la dimension 2	2
3. Preuve pour un simplexe	7
3.1. Existence de $f_{\mathcal{P}}$ polynomiale	7
3.2. Loi de réciprocité	9
4. Polynôme de Ehrhart	11
4.1. Subdivision par des simplexes entiers	11
4.2. Polynôme de Ehrhart et coefficient dominant	12
5. Caractéristique d'Euler-Poincaré, coefficient constant et loi de réciprocité	12
5.1. Coefficient constant	12
5.2. Loi de réciprocité	23

1. CONTEXTE ET ÉNONCÉ

On se place dans l'espace euclidien \mathbb{R}^m , contenant le réseau (sous groupe discret de rang fini) \mathbb{Z}^m . L'enveloppe convexe \mathcal{P} d'un ensemble fini $S \subset \mathbb{Z}^m$ est appelée *polytope entier*. C'est un sous ensemble compact de \mathbb{R}^m . Le volume normalisé d'un polytope entier est pris pour que le volume d'une maille du réseau soit égal à 1. Le théorème de Ehrhart concerne l'application de comptage des points entiers dans les homothétiques de \mathcal{P} :

$$f_{\mathcal{P}}(N) = \text{Card}((N\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^m)$$

Théorème 1 (Ehrhart). *Si S engendre \mathbb{R}^n comme espace affine (avec $n \leq m$), $N \mapsto f_{\mathcal{P}}(N)$ est polynomiale de degré n pour $N \geq 1$. Son coefficient dominant est le volume normalisé de \mathcal{P} , noté $V(\mathcal{P})$, et son coefficient constant est égal à 1. De plus $f_{\mathcal{P}}(0) = 1$ et on a la relation (loi de réciprocité) pour tout $N \geq 1$:*

$$f_{\mathcal{P}}(-N) = (-1)^m \text{Card}((N\overset{\circ}{\mathcal{P}}) \cap \mathbb{Z}^m)$$

où $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ désigne l'intérieur de \mathcal{P} .

2. CAS DE LA DIMENSION 2

Lorsque $m = 2$, on peut expliciter facilement le polynôme de Ehrhart grâce à la *formule de Pick* qui donne l'aire d'un polygone (i.e. son volume $V(\mathcal{P})$ en dimension 2) en fonction de $f_{\mathcal{P}}(N)$ et du nombre de points sur le bord de \mathcal{P} .

Définition 2. Un polygone simple est un compact du plan euclidien dont le bord est la réunion de d segments $([A_i, A_{i+1}])_{i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}$, avec $A_d = A_0$, et tels que si i et j sont dans $\llbracket 0, d-1 \rrbracket$,

$$[A_{d-1}, A_d] \cap [A_0, A_1] = \{A_0\}$$

$$[A_i, A_{i+1}] \cap [A_j, A_{j+1}] = \begin{cases} [A_i, A_{i+1}] & \text{si } i = j \\ \{A_i\} & \text{si } i = j + 1 \\ \{A_{i+1}\} & \text{si } i = j - 1 \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

et pour tout $i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $A_i \notin [A_{i-1}, A_{i+1}]$.

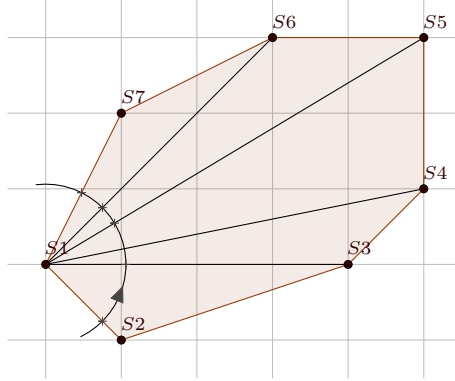
Théorème 3 (Formule de Pick.). *Soit \mathcal{P} un polygone simple à sommets entiers possédant $i_{\mathcal{P}} = \text{Card}(\overset{\circ}{\mathcal{P}} \cap \mathbb{Z}^2)$ points entiers intérieurs et $b_{\mathcal{P}} = \text{Card}(\partial\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^2)$ points entiers sur son bord. L'aire $a_{\mathcal{P}}$ du polygone (i.e. son volume $V(\mathcal{P})$ en dimension 2) est alors donnée par la relation :*

$$(*) \quad a_{\mathcal{P}} = i_{\mathcal{P}} + \frac{b_{\mathcal{P}}}{2} - 1$$

La preuve repose sur l'existence d'une triangulation de tout polygone simple. Cet algorithme est simple pour un polygone convexe.

Théorème 4. *Tout polygone convexe à sommets entiers est la réunion de triangles à sommets entiers dont les intérieurs sont disjoints.*

Démonstration. Soit S un ensemble fini de points de \mathbb{Z}^2 . $\mathcal{P} = \text{Conv}(S)$ est un polygone convexe. Il existe une famille minimale de sommets $(s_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket} \subset S^r$ telle que $\mathcal{P} = \text{Conv}((s_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket})$. D'après le théorème de Hahn-Banach, le polygone convexe \mathcal{P} est entièrement contenu dans un demi plan fermé dont s_1 est sur le bord. Quitte à les réordonner, on peut supposer que s_2, \dots, s_r sont classés de façon à ce que $i \in \llbracket 2, r \rrbracket \mapsto \arg(z_{s_1 s_i}) \in [\arg(z_{s_1 s_2}), \arg(z_{s_1 s_r}) + \pi]$ soit strictement croissante.



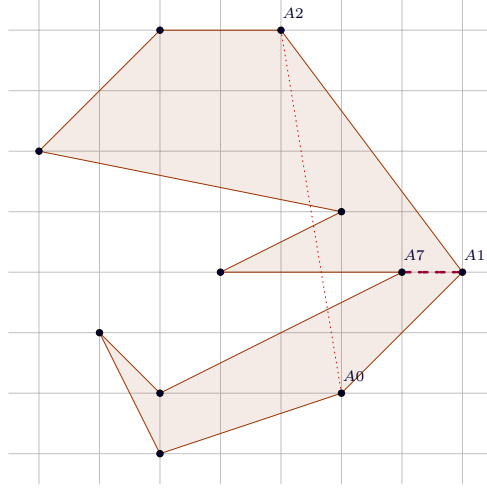
Le polygone \mathcal{P} est alors la réunion des triangles $\Delta_i = s_1 s_i s_{i+1}$ pour $i \in \llbracket 2, r-1 \rrbracket$. De plus, si $i, j \in \llbracket 2, r-1 \rrbracket$, $i \neq j$, alors $\overset{\circ}{\Delta}_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_j$ est vide car soit $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, soit $j = i+1$ et $\Delta_i \cap \Delta_j = [s_1 s_{i+1}]$ et est donc d'intérieur vide (cf. $\overset{\circ}{\Delta}_i \cap \overset{\circ}{\Delta}_j \subset \widehat{\Delta_i \cap \Delta_j}$). \square

Un algorithme simple et intuitif, bien que non optimal, permet de triangulariser un polygone simple quelconque. C'est un procédé itératif.

Soit \mathcal{P} un polygone simple. On reprend les notations de la définition pour ses d sommets.

On suppose $d \geq 4$. Il existe $i_0 \in \llbracket 1, d \rrbracket$, tel que le sommet A_{i_0} sorte de \mathcal{P} , i.e. si $r = \min_{i, j \in \llbracket 1, d \rrbracket, i \neq j} \text{dist}(A_i, A_j) > 0$ alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{B}(A_{i_0}, \frac{r}{2})$ est convexe. Quitte à renuméroter les sommets, on peut prendre $i_0 = 1$. Considérons $\mathcal{C} = \{i \in \llbracket 1, d \rrbracket \mid A_i \in \text{Conv}(A_0, A_1, A_2)\}$. Si \mathcal{C} est vide, alors le triangle $\text{Conv}(A_0, A_1, A_2)$ est inclus dans \mathcal{P} : le polygone de sommets $(A_i)_{i \in \llbracket 2, d \rrbracket}$ est encore un polygone simple et on peut réitérer. Sinon, l'ensemble $\mathcal{D} = \{\text{dist}(A_i, (A_0 A_2)) \mid i \in \mathcal{C}\}$ admet un élément maximal δ_m . Si $I = \{i \in \mathcal{C} \mid \text{dist}(A_i, (A_0 A_2)) = \delta_m\}$, considérons $i_m \in I$. Le segment $[A_1 A_{i_m}]$ est alors inclus dans \mathcal{P} : supposons, par l'absurde, que $[A_1 A_{i_m}] \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}) \neq \emptyset$, soit $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] \mid [A_1, A_1 + t \overrightarrow{A_1 A_{i_m}}] \subset \mathcal{P}\}$. On remarque que l'hypothèse implique $t_0 < 1$. \mathcal{P} est fermé, donc $A_1 + t_0 \overrightarrow{A_1 A_{i_m}} \in \partial \mathcal{P} = \bigcup_{i \in \llbracket 1, d \rrbracket} [A_i A_{i+1}]$. Soit i_1 tel que

$A_1 + t_0 \overrightarrow{A_1 A_{i_m}} \in [A_{i_1} A_{i_1+1}]$. On obtient que $\text{dist}(A_{i_1}, (A_0 A_2)) > \delta_m$ ou $\text{dist}(A_{i_1+1}, (A_0 A_2)) > \delta_m$ (l'un des deux au moins est plus éloigné de $(A_0 A_2)$ que $A_1 + t_0 \overrightarrow{A_1 A_{i_m}}$ qui vérifie $\text{dist}(A_1 + t_0 \overrightarrow{A_1 A_{i_m}}, (A_0 A_2)) > \delta_m$). Ceci contredit la maximalité de δ_m et conclut le raisonnement par l'absurde. \mathcal{P} est donc la réunion des polygones simples de sommets $(A_i)_{i \in [1, i_m]}$ et $(A_i)_{i \in [i_m, d+1]}$ (où $A_{d+1} = A_1$). l'intersection de ces polygones est $[A_1 A_{i_m}] \subset \mathcal{P}$, et leur nombre de sommets est strictement inférieur à celui de \mathcal{P} . En itérant cet algorithme sur les polygones simples obtenus tant qu'ils possèdent au moins 4 sommets, on découpe \mathcal{P} en triangles ($d = 3$) dont les sommets sont parmi ceux de \mathcal{P} .



Si la propriété (*) est vraie pour chaque sous triangle de \mathcal{P} , on montre par une récurrence identique à celle traitée dans la suite (dans le premier cas de l'hérédité) qu'elle est vraie pour le polygone entier.

Il reste à prouver la formule (*) pour un triangle Δ quelconque. On peut procéder par récurrence sur le nombre $l_\Delta = i_\Delta + b_\Delta$. L'initialisation se fait avec $l_\Delta = i_\Delta = 3$ et repose sur le lemme suivant :

Lemme 5 (Théorème de Pick). *Tout triangle à sommets entiers contenant exactement 3 points entiers est isométrique au triangle*

$$\Delta_2 = \text{Conv}(0_{\mathbb{Z}^2}, e_1, e_2).$$

En particulier, son aire est $\frac{1}{2}$.

Notations 6. $(e_i)_{i \in [1, m]}$ désigne la base usuelle de \mathbb{R}^m .

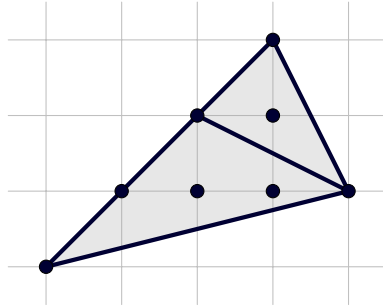
Démonstration. Soit Δ un triangle à sommets entiers tel que $l_\Delta = 3$. On peut se ramener par translation à considérer que ses sommets sont de coordonnées $(0_{\mathbb{Z}^2}, v, w) \in (\mathbb{Z}^2)^3$. L'image de Δ par la réflexion $r : x \mapsto v + w - x$ ne contient comme points de \mathbb{Z}^2 que les images $v + w$, w et v de 0 , v et w respectivement. Le parallélogramme $\text{Conv}(0, v, w, v + w)$ contient donc exactement 4 points à coordonnées entières. On peut paver \mathbb{R}^2 par translations entières selon v et w : l'application $\phi : k_1 e_1 +$

$k_2 e_2 \in \mathbb{Z}^2 \mapsto k_1 v + k_2 w \in \mathbb{Z}^2$ est un automorphisme linéaire de \mathbb{Z}^2 , et donc de déterminant $\det(\phi) \in \pm 1$. Δ et Δ_2 sont donc isomorphes et de même aire $\frac{1}{2}$. \square

On a bien si $l_\Delta = 3$, $a_\Delta = \frac{1}{2} = 0 + \frac{3}{2} - 1$, et donc la formule (*) est vérifiée au rang d'initialisation.

On prend maintenant un triangle Δ à sommets entiers, tel que $l_\Delta \geq 4$ et on suppose (*) vérifiée par tout triangle Δ' tel que $l_{\Delta'} < l_\Delta$. Deux cas sont alors possibles :

Cas n°1 : $b_\Delta \geq 4$. On peut découper Δ en deux sous triangles à sommets entiers \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 suivant une corde qui joint un point entier d'un bord qui n'est pas un sommet (qui existe d'après l'hypothèse) et le sommet opposé.



\mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 vérifient (*), donc on a :

$$a_{\mathcal{T}_1} = i_{\mathcal{T}_1} + \frac{b_{\mathcal{T}_1}}{2} - 1 \quad \text{et} \quad a_{\mathcal{T}_2} = i_{\mathcal{T}_2} + \frac{b_{\mathcal{T}_2}}{2} - 1$$

avec les notations de la formule.

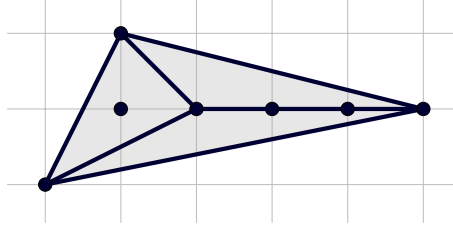
Soit i_ϵ le nombre de points à coordonnées entières sur l'intérieur relatif de la corde $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Les points entiers dans l'intérieur strict de Δ sont ceux de \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , ainsi que ceux se trouvant éventuellement sur la corde $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. En comptant les points entiers du bord de \mathcal{T}_1 et de \mathcal{T}_2 , on rajoute à b_Δ deux fois le nombre i_ϵ de points entiers de l'intérieur relatif de $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, et on compte deux fois les extrémités de cette même corde. On peut donc écrire les relations suivantes :

$$i_\Delta = i_{\mathcal{T}_1} + i_{\mathcal{T}_2} + i_\epsilon \quad \text{et} \quad b_\Delta = b_{\mathcal{T}_1} + b_{\mathcal{T}_2} - 2i_\epsilon - 2$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} a_\Delta &= a_{\mathcal{T}_1} + a_{\mathcal{T}_2} \\ &= i_{\mathcal{T}_1} + i_{\mathcal{T}_2} + \frac{1}{2}(b_{\mathcal{T}_1} + b_{\mathcal{T}_2}) - 2 \\ &= i_\Delta - i_\epsilon + \frac{1}{2}(b_\Delta + 2i_\epsilon + 2) - 2 \\ &= i_\Delta + \frac{b_\Delta}{2} - 1. \end{aligned}$$

Cas n°2 : $i_\Delta \geq 1$. On découpe Δ en trois triangles à sommets entiers \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 et \mathcal{T}_3 délimités par les segments joignant un point de l'intérieur de Δ aux 3 sommets du triangle.



Ces 3 triangles vérifient (*) par hypothèse de récurrence, et on procède de même que dans le cas n°1 : soit $i_{\epsilon_{12}}$, $i_{\epsilon_{13}}$ et $i_{\epsilon_{23}}$ les nombres respectifs de points à coordonnées entières des intérieurs relatifs des segments $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_3$ et $\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_3$. Les points entiers strictement intérieurs à Δ sont ceux strictement intérieurs aux 3 triangles, se trouvant sur l'une des intersections de ceux ci deux à deux (i.e. l'intérieur relatif d'une corde) ou le point entier concourant des 3 cordes. En sommant les points du bord des 3 sous triangles, on répète 3 fois le point concourant des cordes, deux fois les points entiers des intérieurs relatifs des cordes et deux fois (donc une fois de trop) les 3 sommets du triangle. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} i_\Delta &= i_{\mathcal{T}_1} + i_{\mathcal{T}_2} + i_{\mathcal{T}_3} + i_{\epsilon_{12}} + i_{\epsilon_{13}} + i_{\epsilon_{23}} + 1 \\ \text{et } b_\Delta &= b_{\mathcal{T}_1} + b_{\mathcal{T}_2} + b_{\mathcal{T}_3} - 2(i_{\epsilon_{12}} + i_{\epsilon_{13}} + i_{\epsilon_{23}}) - 6 \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned} a_\Delta &= a_{\mathcal{T}_1} + a_{\mathcal{T}_2} + a_{\mathcal{T}_3} \\ &= i_{\mathcal{T}_1} + i_{\mathcal{T}_2} + i_{\mathcal{T}_3} + \frac{1}{2}(b_{\mathcal{T}_1} + b_{\mathcal{T}_2} + b_{\mathcal{T}_3}) - 3 \\ &= i_\Delta - (i_{\epsilon_{12}} + i_{\epsilon_{13}} + i_{\epsilon_{23}} + 1) + \frac{1}{2}(b_\Delta + 2(i_{\epsilon_{12}} + i_{\epsilon_{13}} + i_{\epsilon_{23}}) + 6) - 3 \\ &= i_\Delta + \frac{b_\Delta}{2} - 1. \end{aligned}$$

Ceci conclut la récurrence, et donc la preuve de la formule de Pick.

De cette formule on déduit le théorème de Ehrhart en dimension 2 par les relations :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}, \quad a_{N\mathcal{P}} &= N^2 a_{\mathcal{P}} \\ b_{N\mathcal{P}} &= N b_{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{P}}(N) &= i_{N\mathcal{P}} + b_{N\mathcal{P}} \\ &= a_{N\mathcal{P}} + \frac{b_{N\mathcal{P}}}{2} + 1 \quad \text{d'après (*)} \\ &= N^2 a_{\mathcal{P}} + \frac{N}{2} b_{\mathcal{P}} + 1. \end{aligned}$$

3. PREUVE POUR UN SIMPLEXE

Prenons \mathcal{P} un simplexe de sommets s_0, \dots, s_n (i.e. \mathcal{P} est l'enveloppe convexe $\text{Conv}(s_0, \dots, s_n)$ et $\dim(\mathcal{P}) = n$).

3.1. Existence de $f_{\mathcal{P}}$ polynomiale. Notons Π le sous ensemble de $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}$ défini par :

$$\Pi = \{(q, N) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z} \mid \exists (t_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in [0, 1]^{n+1}, \sum_{i=0}^n t_i (s_i, 1) = (q, N)\}$$

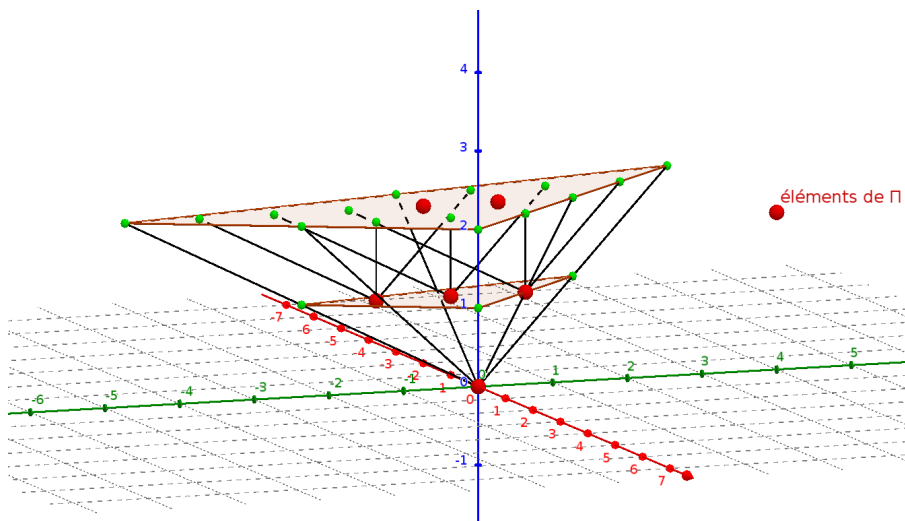
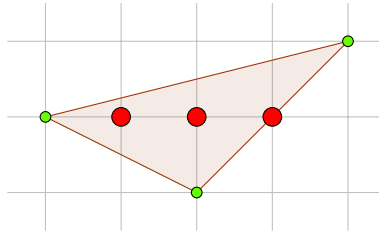


FIGURE 1. Points de Π en dimension $n = 2$ pour le simplexe (triangle) dessiné ci-contre.

Considérons la série formelle :

$$F_{\mathcal{P}}(z) = \sum_{N=0}^{\infty} f_{\mathcal{P}}(N)z^N = \sum_{N \in \mathbb{N}, q \in (\mathbb{Z}^m \cap N\mathcal{P})} z^N$$

Démontrons que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \Pi \times \mathbb{N}^{n+1} &\rightarrow \bigsqcup_{N \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}^m \cap N\mathcal{P}) \times \{N\} \\ ((q_0, N_0), (x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}) &\mapsto (q_0 + \sum_{i=0}^n x_i s_i, N_0 + \sum_{i=0}^n x_i) \end{aligned}$$

est une bijection.

En effet, tout élément de \mathcal{P} s'écrit de manière unique comme $\sum_{i=0}^n u_i s_i$, avec $(u_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ et $\sum_{i=0}^n u_i = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} N\mathcal{P} &= \left\{ \sum_{i=0}^n N u_i s_i \mid (u_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{i=0}^n u_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n t_i s_i \mid (t_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{i=0}^n t_i = N \right\}. \end{aligned}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $q = \sum_{i=0}^n t_i s_i \in \mathbb{Z}^m \cap N\mathcal{P}$ avec $(t_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ et $\sum_{i=0}^n t_i = N$. Cette écriture de q comme barycentre à coefficients positifs des $(s_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est unique. Posons $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_i = \lfloor t_i \rfloor$, $N_0 = N - \sum_{i=0}^n x_i$ (nécessairement un entier positif) et $q_0 = \sum_{i=0}^n (t_i - x_i) s_i : (q_0, N_0) \in \Pi$. $((q_0, N_0), (x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket})$ est l'unique antécédent de (q, N) par Φ . les entiers x_i doivent en effet vérifier $t_i - x_i \in [0, 1[$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, soit donc $x_i \leq t_i < x_i + 1$ pour tout i , et sont donc égaux aux parties entières des t_i . L'existence et l'unicité d'un antécédent pour tout $N \in \mathbb{N}$ implique la bijectivité de Φ .

On peut donc réécrire $F_{\mathcal{P}}$ ainsi :

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{P}}(z) &= \sum_{(q_0, N_0) \in \Pi, (x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{N}^{n+1}} z^{N_0 + \sum_{i=0}^n x_i} \\ &= \sum_{(q_0, N_0) \in \Pi, (x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{N}^{n+1}} z^{N_0} \prod_{i=0}^n z^{x_i} \\ &= \sum_{(q_0, N_0) \in \Pi} z^{N_0} \left(\sum_{(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in \mathbb{N}^{n+1}} \prod_{i=0}^n z^{x_i} \right) \\ &= \sum_{(q_0, N_0) \in \Pi} z^{N_0} \prod_{i=0}^n \left(\sum_{x_i \in \mathbb{N}} z^{x_i} \right) \\ &= \sum_{(q_0, N_0) \in \Pi} z^{N_0} \prod_{i=0}^n \frac{1}{1-z} \\ &= \sum_{(q_0, N_0) \in \Pi} \frac{z^{N_0}}{(1-z)^{n+1}} \end{aligned}$$

On remarque que, pour tout $(q, N) \in \Pi$, on a $0 \leq N < n + 1$ et si $N = 0$, alors $q = 0_{\mathbb{Z}^m}$. On a donc :

$$F_{\mathcal{P}}(z) = \frac{1}{(1-z)^{n+1}} (\delta_0 + \delta_1 z + \dots + \delta_n z^n) \text{ et } \delta_0 = 1$$

$F_{\mathcal{P}}(z)$ est le produit de 2 séries : $\sum_{k=0}^n \delta_k z^k$ et $\frac{1}{(1-z)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^k$, où $\binom{k+n}{n} = \frac{\prod_{j=1}^n (k+j)}{n!}$. On trouve :

$$f_{\mathcal{P}}(N) = \sum_{k=0}^n \delta_k \binom{N+n-k}{n}$$

On note que $f_{\mathcal{P}}(0) = 1$ et $f_{\mathcal{P}}(N)$ est un polynôme de degré n en $N \in \mathbb{N}^*$

3.2. Loi de réciprocité. Notons Π' le sous ensemble de $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}$ défini par :

$$\Pi' = \{(q, N) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z} \mid \exists (t_i)_{i \in [0, n]} \in]0, 1]^{n+1}, \sum_{i=0}^n t_i (s_i, 1) = (q, N)\}$$

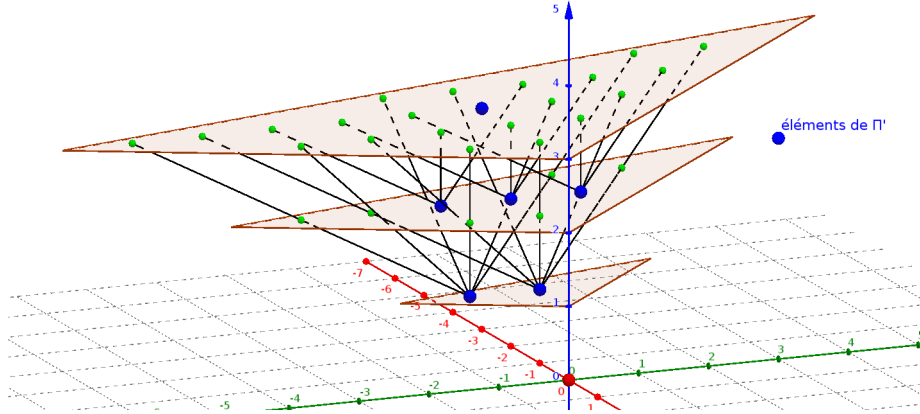


FIGURE 2. Π' en dimension $m = 2$.

Introduisons la série formelle :

$$F_{\mathcal{P}^\circ}(z) = \sum_{N=1}^{\infty} \text{Card}((N\mathcal{P}^\circ) \cap \mathbb{Z}^m) z^N$$

L'application :

$$\Psi : \Pi' \times \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \bigsqcup_{N \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}^m \cap N\mathcal{P}^\circ) \times \{N\}$$

$$((q_0, N_0), (x_i)_{i \in [0, n]}) \mapsto (q_0 + \sum_{i=0}^n x_i s_i, N_0 + \sum_{i=0}^n x_i)$$

est encore une bijection. En effet, puisque les $(s_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base affine de \mathbb{R}^n , tout élément q de $\mathring{\mathcal{P}}$ s'écrit de manière unique comme $\sum_{i=0}^n u_i s_i$, avec $(u_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ et $\sum_{i=0}^n u_i = 1$, et $u_i \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (s'il existe $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $u_i = 0$, alors $q \in \partial\mathcal{P}$). D'où :

$$\begin{aligned} N\mathring{\mathcal{P}} &= \left\{ \sum_{i=0}^n N u_i s_i \mid (u_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}, \sum_{i=0}^n u_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n t_i s_i \mid (t_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}, \sum_{i=0}^n t_i = N \right\} \end{aligned}$$

Π' est l'image de Π par la symétrie de centre $(\frac{1}{2}(s_0 + \dots + s_n), \frac{n+1}{2})$:

$$\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}$$

$$(q, N) \mapsto (s_0 + \dots + s_n - q, n + 1 - N)$$

Par un raisonnement analogue à celui des pages 7 et 8, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} F_{\mathring{\mathcal{P}}}(z) &= \sum_{(q, N) \in \Pi'} \frac{z^N}{(1-z)^{n+1}} \\ &= \sum_{(q, N) \in \Pi} \frac{z^{n+1-N}}{(1-z)^{n+1}} \text{ par la symétrie.} \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{(q, N) \in \Pi} z^{n+1-N} = z^{n+1} \sum_{(q, N) \in \Pi} \left(\frac{1}{z}\right)^N = z^{n+1} \sum_{i=0}^n \delta_i \left(\frac{1}{z}\right)^N = \sum_{i=0}^n \delta_i z^{n+1-N}$$

Donc

$$F_{\mathring{\mathcal{P}}}(z) = \sum_{i=0}^n \delta_i \frac{z^{n+1-N}}{(1-z)^{n+1}}$$

$F_{\mathring{\mathcal{P}}}(z)$ est le produit de 2 séries : $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_{n+1-i} z^i$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^k$. Toujours avec $\delta_k = 0, \forall k > n$ on trouve :

$$\begin{aligned} \text{Card}((N\mathring{\mathcal{P}}) \cap \mathbb{Z}^m) &= \sum_{i=0}^N \delta_{n+1-i} \binom{n+N-i}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \delta_{n+1-i} \binom{n+N-i}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n \delta_k \binom{N+k-1}{n} \end{aligned}$$

Or, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{P}}(-N) &= \sum_{k=0}^n \delta_k \frac{\prod_{j=1}^n (-N - k + j)}{n!} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \delta_k \frac{\prod_{j=1}^n (N + k - j)}{n!} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \delta_k \binom{N+k-1}{n} \end{aligned}$$

D'où la loi de réciprocité.

4. POLYNÔME DE EHRHART

4.1. Subdivision par des simplexes entiers.

Définition 7. On appelle intérieur (formel ou relatif) d'un compact convexe D de \mathbb{R}^m , et l'on note D' , l'intérieur topologique de D dans le sous-espace affine $\text{Aff}(D)$ de \mathbb{R}^m qu'il engendre. Le bord (formel) de D , noté ∂D , est son bord topologique dans $\text{Aff}(D)$, c'est-à-dire le sous-ensemble $D \setminus D'$. La dimension de D , notée $\dim(D)$, est la dimension de $\text{Aff}(D)$.

Proposition 8. *Tout polytope entier \mathcal{P} admet une subdivision en une famille finie $K = (S_j)_{j \in J}$ de simplexes entiers vérifiant :*

- (i) *Si F est une face de S_j , pour un $j \in J$, alors il existe k dans J tel que $F = S_k$.*
- (ii) *$\forall k, j \in J, k \neq j, S_j \cap S_k$ est vide ou est une face de S_j et S_k .*
- (iii) *\mathcal{P} est la réunion disjointe des intérieurs relatifs S'_j des S_j .*

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension n d'un polytope entier.

En dimension 2, on a montré que l'on peut décomposer un polygone convexe en triangles (simplexes de dimension 2), segments (simplexes de dimension 1) et points (dimension 0).

Soit maintenant \mathcal{P} un polytope entier de dimension $n \in \llbracket 3, m \rrbracket$ fixée. Supposons que tout polytope entier \mathcal{Q} de dimension inférieure ou égale à $n - 1$ admette une subdivision en une famille finie $K = (S_j)_{j \in J}$ de simplexes entiers vérifiant les 3 points de la proposition.

Une face de \mathcal{P} est une intersection non vide $\mathcal{P} \cap H$ de \mathcal{P} avec un hyperplan H de \mathbb{R}^m tel que \mathcal{P} soit contenu dans un des demi-espaces délimités par H . Toute face F de \mathcal{P} est un polytope entier de dimension $\leq n - 1$, dont les sommets (i.e. les faces de dimension 0) sont parmi les sommets de \mathcal{P} . Si \mathcal{P} est l'enveloppe convexe de $S \subset \mathbb{Z}^m$ finie, alors l'ensemble S_{min} des sommets de \mathcal{P} est contenu dans S et \mathcal{P} est l'enveloppe convexe de ses sommets. Choisissons maintenant s un sommet de \mathcal{P} . Notons F_1, \dots, F_r les faces de \mathcal{P} ne contenant pas s , et F'_1, \dots, F'_r leurs intérieurs relatifs. En appliquant l'hypothèse de récurrence à ces faces (qui sont des polytopes entiers de dimension $\leq n - 1$), on en obtient une subdivision en des familles finies de simplexes ouverts dont les sommets sont dans S_{min} . \mathcal{P} est la réunion disjointe de $\{s\}$, $\text{Conv}(\{s\} \cup F'_1) \setminus \{s\}, \dots, \text{Conv}(\{s\} \cup F'_r) \setminus \{s\}$, et donc la réunion disjointe de $\{s\}$ et des simplexes ouverts $\text{Conv}(\{s\} \cup S'_i) \setminus \{s, S'_i\}$ et S'_i , où S_i est un simplexe (fermé) de la subdivision des $(F_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$.

□

4.2. Polynôme de Ehrhart et coefficient dominant. Si $K = (S_j)_{j \in J}$ est une subdivision de \mathcal{P} en simplexes d'intérieurs relatifs S'_j disjoints, on peut écrire :

$$\text{Card}((N\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^m) = \sum_{j \in J} \text{Card}((NS'_j) \cap \mathbb{Z}^m)$$

Les simplexes S_j vérifiant la loi de réciprocité, on obtient que $f_{\mathcal{P}}$ est une fonction polynomiale de N s'écrivant :

$$f_{\mathcal{P}}(N) = \sum_{j \in J} (-1)^{\dim(S_j)} f_{S_j}(-N).$$

On note maintenant

$$f_{\mathcal{P}}(N) = a_0(\mathcal{P}) + a_1(\mathcal{P})N + \dots + a_n(\mathcal{P})N^n$$

Pour $N \geq 0$, on a :

$$f_{\mathcal{P}}(N) = \text{Card}((N\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^m) = \text{Card}(\mathcal{P} \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^m) = \sum_{q \in \mathcal{P} \cap \frac{1}{N}\mathbb{Z}^m} 1$$

On en déduit que $N^{-n}f_{\mathcal{P}}(N)$ est une somme de Riemann convergeant vers $\int_{\mathcal{P}} dx = V(\mathcal{P})$. Mais $f_{\mathcal{P}}$ étant de degré n , $N^{-n}f_{\mathcal{P}}(N)$ tend également vers le coefficient dominant $a_n(\mathcal{P})$ de $f_{\mathcal{P}}$, qui est donc bien égal à $V(\mathcal{P})$.

5. CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ, COEFFICIENT CONSTANT ET LOI DE RÉCIPROCITÉ

5.1. Coefficient constant. Le coefficient constant de $f_{\mathcal{P}}$ donné par une subdivision en simplexes $K = (S_j)_{j \in J}$ est

$$a_0(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^n (-1)^{\dim(S_i)}$$

On peut réécrire cette expression sous la forme

$$a_0(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i$$

où c_i désigne le nombre de simplexes de dimension i dans la subdivision K de \mathcal{P} .

On va démontrer que cette expression satisfait 3 axiomes, qui définissent la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(X)$ d'un polytope fini X de manière unique.

PREMIER AXIOME : Si X est réduit à un point, alors $\chi(X) = 1$.

L'expression que l'on a du coefficient constant de $f_{\mathcal{P}}$ vérifie clairement cette propriété.

Définition 9. Un complexe dans un espace euclidien \mathbb{R}^m est un ensemble K de polytopes convexes compacts de \mathbb{R}^m tel que :

- (i) si D_1 et D_2 sont deux polytopes convexes compacts distincts appartenant à K , alors les intérieurs D'_1 et D'_2 sont disjoints ;
- (ii) si $D \in K$, le bord formel $\partial D \subset \mathbb{R}^m$ est réunion d'autres polytopes convexes compacts de K ;
- (iii) si $x \in D \in K$, il existe un voisinage U de x dans \mathbb{R}^m tel que U ne rencontre qu'un nombre fini de polytopes convexes compacts de K

La dimension maximale d'un polytope convexe compact de K est appelée dimension de K . On appelle sous-complexe de K tout complexe constitué d'éléments de K . Étant donné un polytope convexe compact $D \in K$ on appelle hyperface de D toute face de D de dimension $\dim(D) - 1$ dans K (contenue dans ∂D).

Définition 10. Un complexe K est dit simplicial si toute cellule $D \in K$ est un simplexe et si chaque cellule $D' \subset D$ constitue une face entière du simplexe D .

Remarque 11. Une subdivision K d'un polytope entier est un complexe simplicial.

DEUXIÈME AXIOME : χ est additif : Si K_1, K_2 sont deux sous complexes d'un complexe fini K , alors

$$\chi(|K_1 \cup K_2|) = \chi(|K_1|) + \chi(|K_2|) - \chi(|K_1 \cap K_2|)$$

Pour $a_0(\mathcal{P})$, cela découle du fait que le nombre total de faces de dimension i dans $K_1 \cup K_2$ est égal à la somme des nombres de i -faces de K_1 et K_2 moins celui de leur intersection $K_1 \cap K_2$, que l'on avait comptée 2 fois en sommant.

On définit maintenant certaines notions intervenant dans le troisième axiome.

Définition 12. Étant donnés deux espaces topologiques X et Y , deux applications continues f et g de X dans Y sont dites homotopes s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ dont les restrictions $x \mapsto H(0, x)$ et $x \mapsto H(1, x)$ coïncident respectivement avec f et g . On dit que H est une homotopie entre f et g .

Remarque 13. Il est clair que, deux espaces topologiques X et Y étant fixés, l'homotopie définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues de X dans Y .

Définition 14. On dit que les espaces X et Y sont homotopiquement équivalents, ou ont le même type d'homotopie, s'il existe deux applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que la composée $f \circ g$ est homotope à Id_Y et la composée $g \circ f$ est homotope à Id_X . On dit alors que les applications f et g sont des équivalences d'homotopie.

TROISIÈME AXIOME : χ est un invariant d'homotopie : Si X et X' ont le même type d'homotopie, $\chi(X) = \chi(X')$.

Pour démontrer ce dernier point, on va passer par la formule d'Euler-Poincaré, qui donne une autre expression de la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Définition 15. On appelle espace euclidien orienté un couple (E, C) où E est un espace euclidien et C une classe d'équivalence sur l'ensemble des bases de E pour la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par

$$BRB' \iff \det P_{B,B'} > 0$$

L'orientation de F sous-espace vectoriel de dimension $n-p$ de (E, C) espace euclidien orienté de dimension n suivant (e_1, \dots, e_p) une base d'un supplémentaire de F est l'espace euclidien orienté

$$(F, \{(e_{p+1}, \dots, e_n) | (e_1, \dots, e_n) \in C\})$$

On appelle base directe de l'espace euclidien orienté (E, C) une base appartenant à C . On appelle base indirecte de l'espace euclidien orienté (E, C) une base n'appartenant pas à C .

L'espace euclidien orienté usuel correspondant à \mathbb{R}^n est donné par la base (directe par définition)

$$((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1, 0), (0, \dots, 0, 1)).$$

Définition 16. Soit K un complexe (linéaire). On pose :

$$K^{(i)} = \{\sigma \in K \mid \sigma \text{ est une cellule de dimension } i\}$$

et pour tout $\sigma \in K$ on suppose fixée une orientation.

On note $C_i(K)$ le \mathbb{Z} -module des i -chaînes (à support compact) sur K , c'est-à-dire le groupe abélien libre engendré par $K^{(i)}$.

Une i -chaîne $c \in C_i(K)$ est donc une combinaison linéaire

$$c = \sum_{\sigma \in K^{(i)}} c_\sigma \sigma$$

où $c_\sigma \in \mathbb{Z}$ est non-nul seulement pour un ensemble fini de σ .

On dispose sur $C_i(K)$ d'une application de bord ∂ naturelle :

$$\partial : C_i(K) \rightarrow C_{i-1}(K)$$

Cette application étant linéaire, il suffit de donner son expression sur chaque cellule $\sigma \in K^{(i)}$, qui est donnée par la formule :

$$\partial\sigma = \sum_{\tau \text{ hyperface de } \sigma} \pm\tau$$

où le signe \pm est $+$ si l'orientation de τ est induite par celle de σ et $-$ sinon.

Le lemme élémentaire suivant est fondamental.

Lemme 17. Si K est simplicial, on a $\partial \circ \partial = 0$

Démonstration. Il suffit de vérifier la formule sur une cellule $\sigma \in K^{(i)}$.
On a

$$\partial\sigma = \sum_{\tau \text{ hyperface de } \sigma} \pm\tau$$

Chaque face de codimension 2 de σ est l'intersection d'exactly 2 hyperfaces τ et τ' de σ et les orientations induites se compensent. On en déduit par un calcul élémentaire que $\partial(\partial\sigma) = 0$:

Soient s_0, s_1, \dots, s_r les sommets du simplexe $\sigma \in K^{(r)}$ (indexés de manière cohérente avec l'orientation). On note σ_i (resp. σ_{ij}) le simplexe orienté de dimension $r-1$ (resp. $r-2$) obtenu en omettant le sommet s_i (resp. les sommets s_i et s_j).

On a alors

$$\begin{aligned} \partial\sigma &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \sigma_i \\ \partial\sigma_i &= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \sigma_{ji} + \sum_{j=i+1}^r (-1)^{j-1} \sigma_{ij} \end{aligned}$$

et donc

$$\partial(\partial\sigma) = \sum_{j<i} (-1)^{i+j} \sigma_{ji} + \sum_{i<j} (-1)^{j+i} (-1) \sigma_{ij} = 0.$$

□

Remarque 18. La suite

$$\dots \xrightarrow{\partial} C_i(K) \xrightarrow{\partial} C_{i-1}(K) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0$$

est appelée complexe de chaînes. L'application bord est parfois aussi appelée la différentielle du complexe de chaînes.

Définition 19. Une i -chaîne $c \in C_i(K)$ est un i -cycle si son bord est nul, i.e. si $\partial c = 0$. On note

$$Z_i(K) = \ker(\partial : C_i(K) \rightarrow C_{i-1}(K))$$

le sous-module des i -cycles.

Définition 20. Une i -chaîne $c \in C_i(K)$ est un bord (on dit aussi que c est homologue à 0) si elle est le bord d'une $(i+1)$ -chaîne. On note

$$B_i(K) = \text{im}(\partial : C_{i+1}(K) \rightarrow C_i(K))$$

le sous-module des i -chaînes qui sont homologues à 0.

Remarque 21. Le lemme implique que si $c \in C_i(K)$ est un bord, alors c est un i -cycle. Autrement dit, $B_i(K)$ est un sous-module de $Z_i(K)$.

Définition 22. Le groupe quotient

$$H_i(K) = Z_i(K) / B_i(K)$$

est appelé i -ème groupe d'homologie du complexe K .

Remarque 23. Si K est fini, chaque $H_i(K)$ est un groupe abélien de type fini avec une partie libre et une partie de torsion.

Définition 24. Soit K un complexe dont les groupes d'homologie $H_i(K)$ sont de type fini pour tout i . On appelle i -ème nombre de Betti de K le rang de la partie libre de $H_i(K)$; on le note $b_i(K)$.

On appelle i -ème groupe de torsion de K le sous-groupe de torsion de $H_i(K)$; on le note $\text{Tors}_i(K)$.

Propriété 25. Soit K un complexe de dimension n . Alors $H_i(K) = 0$ pour $i \geq n - 1$.

Propriété 26. Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de complexes disjoints dans \mathbb{R}^m . Alors, $H_*(\sqcup K_i) = \bigoplus_{i \in I} H_*(K_i)$.

Démonstration. Ces deux propriétés sont déjà vraies au niveau des complexes de chaînes : d'une part $C_{* > n}(K) = \{0\}$ par définition et d'autre part $C_*(K \sqcup K') = C_*(K) \oplus C_*(K')$ car l'opérateur de bord envoie une face dans une combinaison linéaire de sous-faces. \square

Notations 27. Pour tout complexe K , on note $|K| = \bigcup_{D \in K} D$.

Proposition 28. Pour tout complexe K , le groupe $H_0(K)$ est un groupe abélien libre de rang égal au nombre de composantes connexes du polyèdre $|K|$.

Démonstration. De par la propriété 26, on peut supposer $|K|$ connexe. Le groupe $Z_0(K) = C_0(K)$ est engendré par les sommets de K . Maintenant, l'image d'une arête $\alpha\beta$ par l'application bord ∂ est égale à $\pm(\alpha - \beta)$. Le sous-groupe $B_0(K) \subset Z_0(K)$ est donc engendré par les $\alpha - \beta$, où $\alpha\beta$ est une arête. En identifiant $Z_0(K)$ à \mathbb{Z}^M , où M est le nombre de sommets, on obtient que $B_0(K)$ est contenu dans l'hyperplan L d'équation $x_1 + \dots + x_M = 0$ et l'engendre, puisque K est supposé connexe. On en conclut que $H_0(K) = \mathbb{Z}^M / L$ est isomorphe à \mathbb{Z} . \square

Théorème 29. Soit K un complexe fini de dimension d et $X = |K|$ le polytope correspondant. On note $c_i = c_i(K)$ le rang du complexe de chaînes $C_i(K)$, c'est-à-dire le nombre de i -cellules dans K (et donc le nombre de i -faces du polytope X), et $b_i = b_i(X)$ les nombres de Betti de X . On a alors :

$$\sum_{i=0}^d (-1)^i c_i = \sum_{i=0}^d (-1)^i b_i$$

L'invariant $\sum_{i=0}^d (-1)^i b_i$ est appelée la caractéristique d'Euler-Poincaré du polytope X .

Démonstration. La démonstration est purement algébrique. On abrège par C_i, Z_i, B_i et H_i les \mathbb{Z} -modules $C_i(K), Z_i(K), B_i(K)$ et $H_i(K)$. On a alors des suites exactes de \mathbb{Z} -modules (de type fini)

$$0 \rightarrow Z_i \rightarrow C_i \xrightarrow{\partial} B_{i-1} \rightarrow 0 \text{ et } 0 \rightarrow B_i \rightarrow Z_i \rightarrow H_i \rightarrow 0$$

. On en conclut que

$$\text{rang } C_i = \text{rang } Z_i + \text{rang } B_{i-1} \text{ et } \text{rang } Z_i = \text{rang } B_i + \text{rang } H_i$$

. On a donc

$$\text{rang } C_i = \text{rang } H_i + \text{rang } B_i + \text{rang } B_{i-1}$$

et

$$\sum_i (-1)^i \text{rang } C_i = \sum_i (-1)^i \text{rang } H_i$$

□

Les groupes d'homologie que l'on a défini dépendent a priori de la subdivision K choisie d'un polytope X . Dans les faits, on peut les définir pour X , indépendamment de la subdivision choisie.

Définition 30. On appelle cellulation (linéaire) d'un polytope X la donnée d'un complexe K tel que $X = |K|$. Si de plus K est simplicial, on parlera de triangulation. On dit qu'une cellulation K' d'un polyèdre X est une subdivision d'une autre K , et on écrit $K' < K$, si chaque cellule $D' \in K'$ est contenue dans une cellule $D \in K$.

Lemme 31. Soient K_1 et K_2 deux complexes tels que $|K_1| = |K_2|$. Alors il existe une subdivision commune K_0 , c'est-à-dire $K_0 < K_1$ et $K_0 < K_2$. On dit que les cellulations sont compatibles.

Démonstration. Il suffit d'intersecter les deux cellulations. □

Remarque 32. Étant donné un complexe K et un sous-complexe L , toute subdivision de L induit canoniquement une subdivision de K qui laisse intacte toute cellule de K qui n'est pas dans L .

Le lemme suivant est une généralisation de la preuve constructive de la section précédente.

Lemme 33. Toute cellulation K d'un polyèdre X admet une subdivision $K' < K$ qui est une triangulation.

Démonstration. On procède par récurrence sur la dimension de K . Un complexe de dimension 0 ou 1 est toujours simplicial. Supposons maintenant que tout complexe de dimension k , pour un certain $k \geq 1$, admet une subdivision qui est une triangulation, et considérons un complexe de dimension $k + 1$. Son k -squelette, c'est-à-dire l'union de toutes ses cellules de dimension inférieure ou égale à k , admet une subdivision simpliciale par hypothèse de récurrence, qui, d'après la remarque ci-dessus, induit une subdivision de K . On subdivise alors chaque cellule de dimension $k + 1$ en prenant les cônes depuis un point de son intérieur sur chacune des cellules du bord. Le cône sur chacun de ces simplexes est encore un simplexe. Ainsi, la subdivision de K obtenue est une triangulation. □

Définition 34. Soit $X \subset \mathbb{R}^m$ un polyèdre muni d'une cellulation K . On dit qu'une cellulation K' de X résulte d'une bissection (linéaire) de K en $D \in K$, et on écrit $K \rightarrow K'$, si on peut former K' en remplaçant $D \in K$ par trois cellules D_-, D_+, D_0 , où D_0 est l'intersection transverse d'un hyperplan de \mathbb{R}^m avec D et découpe D en deux cellules non vides D_- et D_+ .

On écrit $K' \prec K$, s'il existe une suite finie de bisections

$$K = K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow \dots \rightarrow K_n = K'$$

et on dit que K' se déduit de K par bisections.

Proposition 35. Soit X un polyèdre compact et K_1, K_2 deux cellulations de X . Alors il existe une cellulation K_0 de X qui est une subdivision par bisections de K_1 et K_2 , c'est-à-dire $K_0 \prec K_1$ et $K_0 \prec K_2$.

Démonstration. Commençons par considérer le cas où $K_1 < K_2$. De par la dernière remarque, on peut procéder cellule par cellule indépendamment, ce qui nous ramène au cas où K_2 est constitué d'une unique cellule D de dimension n et des cellules de son bord. Maintenant il existe une famille finie H_1, \dots, H_k d'hyperplans de \mathbb{R}^n tels que toute cellule de K_1 soit une intersection finie de demi-espaces associés aux H_i . Chaque H_i induit une subdivision par bisections de K_2 , mais aussi de K_1 . Le résultat final commun de ces subdivisions par bisections est la cellulation K_0 recherchée.

En général, K_1 et K_2 étant compatibles, il existe K_3 une cellulation (triangulation) de X telle que $K_3 < K_1$ et $K_3 < K_2$. Le même raisonnement fournit K_0 , obtenue par bisections communes de K_1 et K_2 (car elles sont définies par K_3). \square

Soit X un polyèdre et soit K une cellulation de X , de sorte que $|K| = X$. Supposons maintenant fixée une subdivision $K' < K$. Il lui correspond la famille des applications linéaires F_i de $C_i = C_i(K)$ vers $C'_i = C_i(K')$ qui associent à toute cellule $\sigma \in K^{(i)}$ la somme

$$F_i(\sigma) = \sum_{\sigma' \in K'^{(i)}, |\sigma'| \subset |\sigma|} \pm \sigma'$$

où le signe \pm est $+$ si les orientations de σ et σ' sont compatibles et $-$ sinon.

La proposition suivante est immédiate mais fondamentale.

Proposition 36. L'application $F = (F_i) : C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ est un morphisme de complexes, autrement dit $F = (F_i)$ est une suite d'applications linéaires telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & C_i & \xrightarrow{\partial} & C_{i-1} & \xrightarrow{\partial} & C_{i-2} & \longrightarrow & \dots \\ & & F_i \downarrow & & F_{i-1} \downarrow & & F_{i-2} \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & C'_i & \xrightarrow{\partial} & C'_{i-1} & \xrightarrow{\partial} & C'_{i-2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

soit commutatif.

Remarque 37. Notons que si $\alpha \in C_i$ est un cycle, il découle de la proposition que $F(\alpha)$ est également un cycle :

$$\partial F(\alpha) = F(\partial\alpha) = 0.$$

De la même manière F envoie B_\bullet dans B'_\bullet . Un morphisme de complexes induit donc un morphisme entre les groupes d'homologie de ces complexes.

Théorème 38. *Le morphisme de complexes $F : C_\bullet(K) \rightarrow C_\bullet(K')$ est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire qu'il induit un isomorphisme au niveau des groupes d'homologie.*

Puisque l'on a montré que les cellulations K et K' du polyèdre X possèdent une subdivision commune K_0 qui est une subdivision par bisections de K et de K' , le théorème découle du lemme suivant.

Lemme 39. *Soit K' une subdivision de K résultant d'une bisection élémentaire. Alors le morphisme de complexes $F : C_\bullet(K) \rightarrow C_\bullet(K')$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. Soit D la cellule de K telle que K' est obtenue à partir de K en remplaçant D par trois cellules D_- , D_+ et D_0 comme dans la définition :

Soit n la dimension de D_0 , égale à la dimension de D moins 1. Pour tout i , on a :

$$C_i(K') = C'_i \oplus C_i(K)$$

où $C'_{n+1} = \mathbb{Z}[D_+]$, $C'_n = \mathbb{Z}[D_0]$ et est égal à $\{0\}$ en tous les autres degrés. On en déduit que

$$Z_{n+1}(K') = Z_{n+1}(K) \text{ et } B_{n+1}(K') = B_{n+1}(K)$$

et

$$Z_n(K') = Z_n(K) \oplus \mathbb{Z}[\partial D_+] \text{ et } B_n(K') = B_n(K) \oplus \mathbb{Z}[\partial D_+].$$

Le lemme s'en déduit. \square

On peut maintenant définir l'homologie polyédrale, puisqu'elle ne dépend pas de la cellulation choisie.

Définition 40. Soit X un polyèdre. On appelle homologie polyédrale (ou simpliciale) $H_\bullet(X)$ de X l'homologie $H_\bullet(K)$ où K est une cellulation quelconque de X .

Etendons maintenant les notions introduites précédemment à un espace topologique X .

Définition 41. Soit X un espace topologique. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, un i -simplexe singulier de X est une application continue

$$\sigma : \Delta_i \rightarrow X$$

où

$$\Delta_i = \{(x_0, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^{i+1} \mid x_k \geq 0, \sum_{k=0}^i x_k = 1\}$$

est le simplexe standard de dimension i .

Définition 42. On note $C_i(X) = C_{i,sing}(X)$ le \mathbb{Z} -module libre engendré par l'ensemble de tous les i -simplexes singuliers de X . Chaque élément de $C_i(X)$ est donc une combinaison linéaire de la forme

$$\sum_{\sigma: \Delta_i \rightarrow X} c_\sigma \sigma$$

où seulement un nombre fini des entiers relatifs c_σ est non nul. Les éléments de $C_i(X)$ sont appelés i -chaînes singulières.

Pour $i \geq 1$, on définit une application bord $\partial : C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X)$ de la manière suivante.

Commençons par définir l'image d'un i -simplexe singulier $\sigma : \Delta_i \rightarrow X$. Pour tout $k = 0, \dots, i$, on obtient un $(i-1)$ -simplexe singulier $\partial_k \sigma$ en composant l'application linéaire

$$(x_0, \dots, x_{i-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_{i-1})$$

, de $\Delta_{i-1} \subset \mathbb{R}^i$ vers la k -ème face $x_k = 0$ de Δ_i , par l'application σ . On pose alors :

$$\partial \sigma = \sum_{k=0}^i (-1)^k \partial_k \sigma$$

Maintenant qu'on a défini l'image d'un i -simplexe singulier quelconque, il ne reste plus qu'à étendre par linéarité en une application $\partial : C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X)$. Pour $i = 0$, on pose $C_{-1}(X) = \{0\}$ et on définit $\partial : C_0(X) \rightarrow C_{-1}(X)$ comme l'application nulle.

Remarque 43. Une 0-chaîne singulière est donc juste une combinaison linéaire finie de points de X alors qu'une 1-chaîne est une combinaison linéaire de chemins (paramétrés) dans X . Le bord d'une telle 1-chaîne est la combinaison linéaire correspondante des différences entre les extrémités des chemins.

Remarque 44. On démontre comme pour l'homologie simpliciale (ou polyédrale), avec des définitions équivalentes, que l'opérateur ∂ fait des chaînes singulières un complexe. On peut ainsi définir l'homologie singulière

Lorsque X est un polyèdre on dispose de deux théories homologiques : l'homologie polyédrale ou simpliciale et l'homologie singulière. On montre alors que les groupes d'homologie obtenus sont isomorphes.

Théorème 45. Soit X un polyèdre et $T : |K| \rightarrow X$ une triangulation (T est donc un homéomorphisme). L'application T induit un morphisme de complexes $C_\bullet(K) \rightarrow C_{\bullet,sing}(X)$, qui est un quasi-isomorphisme,

c'est-à-dire qu'il induit un isomorphisme au niveau des groupes d'homologie.

La démonstration se fait à partir des complexes de chaînes.

Remarque 46. Toute variété X admet une triangulation lisse $T : |K| \rightarrow X$. Le théorème ci-dessus montre que, pour déterminer l'homologie singulière de X , on peut calculer l'homologie simpliciale du complexe K . Ceci permet de remplacer le complexe de chaîne $C_{\star, \text{sing}}(X)$ (qui est de dimension infinie) par le complexe de chaîne de dimension finie $C_{\star}(K)$.

Si X et Y sont deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, alors f induit un morphisme de complexes de chaînes $f_{\star} : C_{\star}(X) \rightarrow C_{\star}(Y)$ qui à un simplexe singulier σ associe le simplexe singulier $f \circ \sigma : \Delta_i \rightarrow Y$.

Comme f_{\star} est un morphisme de complexes, il passe au quotient pour définir une application, toujours notée $f_{\star} : H_{\star}(X) \rightarrow H_{\star}(Y)$, entre les groupes d'homologie singulière.

Proposition 47. *Soient f et g deux applications homotopes de X dans Y . Alors les applications induites f_{\star} et g_{\star} de $H_{\star}(X)$ dans $H_{\star}(Y)$ coïncident.*

Le résultat découle alors du lemme (plus fort) suivant.

Lemme 48. *Soient f et g deux applications homotopes de X dans Y . Alors il existe une homotopie de chaînes entre f_{\star} et g_{\star} , c'est-à-dire une famille de morphismes $K = (K_i : C_i(X) \rightarrow C_{i+1}(Y))$ vérifiant*

$$(**) \quad K_i \partial + \partial K_{i+1} = g_{\star} - f_{\star}$$

pour tout i .

Démonstration. Soient $\iota : X \rightarrow X \times [0, 1]$ et $\iota' : X \rightarrow X \times [0, 1]$ les applications définies par $\iota(x) = (x, 0)$ et $\iota'(x) = (x, 1)$. Si h est une homotopie entre f et g , alors $f = h \circ \iota$ et $g = h \circ \iota'$. Il suffit donc de montrer que ι_{\star} et ι'_{\star} sont homotopes. Par linéarité il suffit de construire les K_i sur les i -simplexes singuliers.

Considérons donc un i -simplexe singulier $\sigma : \Delta_i \rightarrow X$. Il lui correspond une application $\sigma \times \text{Id} : \Delta_i \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$. L'idée est alors de décomposer le prisme $\Delta_i \times [0, 1]$ en $(i + 1)$ simplexes de dimension $i + 1$. Notons $(x_0, \dots, x_i; \lambda)$ les coordonnées de $\Delta_i \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{i+1} \times [0, 1]$. Alors pour tout $k \in \{0, \dots, i\}$, le k -ème simplexe de la décomposition du prisme est constitué des points $(x_0, \dots, x_i, \lambda)$ tels que

$$x_0 + \dots + x_{k-1} \leq \lambda \leq x_0 + \dots + x_k.$$

Ce simplexe coïncide avec le simplexe obtenu comme enveloppe convexe des points $(s_0 \times \{1\}, \dots, s_k \times \{1\}, s_k \times \{0\}, s_i \times \{1\})$ où on a noté s_0, \dots, s_i les sommets du simplexe standard.

Chacun de ces simplexes est en outre muni de l'orientation induite par l'orientation naturelle du prisme ; ces orientations sont compatibles. En « restreignant » l'application $\sigma \times \text{Id}$ à chacun de ces simplexes et en formant la somme, on obtient une chaîne singulière de dimension $i + 1$ dans $X \times [0, 1]$.

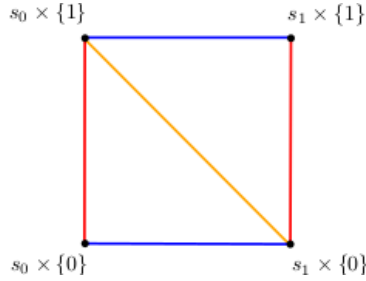
Plus précisément, si t_0, \dots, t_k sont des sommets du prisme, on note $[t_0, \dots, t_k]$ le simplexe induit. On pose alors

$$K_i(\sigma) = \sum_{k=0}^i (-1)^k (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{1\}, \dots, s_k \times \{1\}, s_k \times \{0\}, \dots, s_i \times \{0\}]}.$$

Commençons par vérifier (***) quand σ est un 1-simplexe singulier. On a alors,

$$K_1(\sigma) = (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{1\}, s_0 \times \{0\}, s_1 \times \{0\}]} - (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{1\}, s_1 \times \{1\}, s_1 \times \{0\}]}$$

$$\begin{aligned} \partial K_1(\sigma) &= (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{0\}, s_1 \times \{0\}]} - (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{1\}, s_1 \times \{0\}]} \\ &\quad + (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{1\}, s_0 \times \{0\}]} - (\sigma \times \text{Id})|_{[s_1 \times \{1\}, s_1 \times \{0\}]} \\ &\quad + (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{1\}, s_1 \times \{0\}]} - (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{1\}, s_1 \times \{1\}]} \\ &= (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{0\}, s_1 \times \{0\}]} - (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{1\}, s_1 \times \{1\}]} \\ &\quad + (\sigma \times \text{Id})|_{[s_0 \times \{1\}, s_0 \times \{0\}]} - (\sigma \times \text{Id})|_{[s_1 \times \{1\}, s_1 \times \{0\}]} \\ &= -K_0(\partial\sigma) + \iota \circ \sigma - \iota' \circ \sigma. \end{aligned}$$



Dans le cas général, le bord de $K_i(\sigma)$ est constitué des simplexes singuliers $\iota \circ \sigma$ et $\iota' \circ \sigma$ - correspondant aux bases du prisme - ainsi que d'une chaîne singulière correspondant à la surface latérale du prisme et donc au prisme sur le bord de σ . Les contributions des faces intérieures du prisme se compensent. L'identité (***) sur le simplexe singulier σ s'en déduit. □

Du lemme, il découle que g_\star et f_\star coïncident en homologie puisque si z est un i -cycle, $g_\star(z) - f_\star(z) = \partial K_i(z)$ est un bord, ce qui termine la preuve de la proposition.

Les rangs de $H_\star(X)$ sont donc des invariants d'homotopie, et il en est de même de la caractéristique d'Euler-Poincaré.

5.2. Loi de réciprocité.

Notations 49. Si $K = (S_j)_{j \in J}$ est une subdivision du polytope \mathcal{P} , on note $\text{codim}(S_j) = \dim(\mathcal{P}) - \dim(S_j)$ pour tout $j \in J$.

Lemme 50. *Soit \mathcal{P} un polytope entier et $K = (S_j)_{j \in J}$ une subdivision de \mathcal{P} . Pour tout $x \in \mathcal{P}$, on a*

$$\sum_{j \in J | x \in S_j} (-1)^{\text{codim}(S_j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overset{\circ}{\mathcal{P}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Soit \mathcal{P} un polytope entier de dimension n , $K = (S_j)_{j \in J}$ une subdivision de \mathcal{P} et $x \in \mathcal{P}$. Soit $i \in J$ tel que $x \in S'_i$ (i est unique). On note $d_i = \text{codim}(S_i)$ et $r = \min_{j \in J | S_j \cap S_i = \emptyset} \text{dist}(S_i, S_j) > 0$. $\mathbb{S}_x^{d_i-1} = \{y \in S_i^\perp \mid \|y - x\| = \frac{r}{2}\}$ désigne la sphère centrée en x et de rayon $\frac{r}{2}$ de l'orthogonal S_i^\perp de S_i dans $\text{Aff}(\mathcal{P})$. $\chi(\mathbb{S}_x^{d_i-1})$ est égal à 2 si d_i est impair et 0 sinon.

Si $x \in \overset{\circ}{\mathcal{P}}$, alors la famille $(\mathbb{S}_x^{d_i-1} \cap S_j)_{j \in J | S_i \subsetneq S_j}$ est une triangulation de $\mathbb{S}_x^{d_i-1}$. On a donc

$$\sum_{j \in J | x \in S_j} (-1)^{\text{codim}(S_j)} = (-1)^{d_i} \left(1 + \underbrace{\sum_{j \in J | S_i \subsetneq S_j} (-1)^{\text{codim}(S_j) - d_i}}_{(-1)^{d_i} \chi(\mathbb{S}_x^{d_i-1})} \right) = 1$$

Si $x \in \partial\mathcal{P}$, alors la famille $(\mathbb{S}_x^{d_i-1} \cap S_j)_{j \in J | S_i \subsetneq S_j}$ recouvre une demi-sphère, qui est homéomorphe à un disque fermé, et on a alors $\chi(\mathbb{S}_x^{d_i-1} \cap (\bigcup_{j \in J | S_i \subsetneq S_j} S_j)) = (-1)^{d_i-1}$, car c'est une hypersurface compacte (avec un bord) de dimension $d_i - 1$. D'où

$$\sum_{j \in J | x \in S_j} (-1)^{\text{codim}(S_j)} = (-1)^{d_i} \left(1 + \underbrace{\sum_{j \in J | S_i \subsetneq S_j} (-1)^{\text{codim}(S_j) - d_i}}_{(-1)^{d_i} \chi(\mathbb{S}_x^{d_i-1} \cap (\bigcup_{j \in J | S_i \subsetneq S_j} S_j))} \right) = 0$$

□

Pour \mathcal{P} un polytope entier et $K = (S_j)_{j \in J}$ une subdivision de \mathcal{P} , on a :

$$\begin{aligned}
(-1)^{\dim(\mathcal{P})} f_{\mathcal{P}}(-N) &= \sum_{j \in J} (-1)^{\text{codim}(S_j)} f_{S_j}(N) \\
&= \sum_{j \in J} (-1)^{\text{codim}(S_j)} \text{Card}((NS_j) \cap \mathbb{Z}^m) \\
&= \sum_{j \in J} \sum_{x \in (NS_j) \cap \mathbb{Z}^m} (-1)^{\text{codim}(S_j)} \\
&= \sum_{i \in J} \underbrace{\sum_{x \in (NS'_i) \cap \mathbb{Z}^m} \sum_{j \in J | x \in S_j} (-1)^{\text{codim}(S_j)}}_{\substack{\text{Card}((NS'_i) \cap \mathbb{Z}^m) & \text{si } S'_i \subset \mathring{\mathcal{P}} \\ 0 & \text{sinon.}} \quad \text{d'après le lemme}} \\
&= \text{Card}((N\mathring{\mathcal{P}}) \cap \mathbb{Z}^m)
\end{aligned}$$

D'où la loi de réciprocité :

$$f_{\mathcal{P}}(-N) = (-1)^{\dim(\mathcal{P})} \text{Card}((N\mathring{\mathcal{P}}) \cap \mathbb{Z}^m).$$