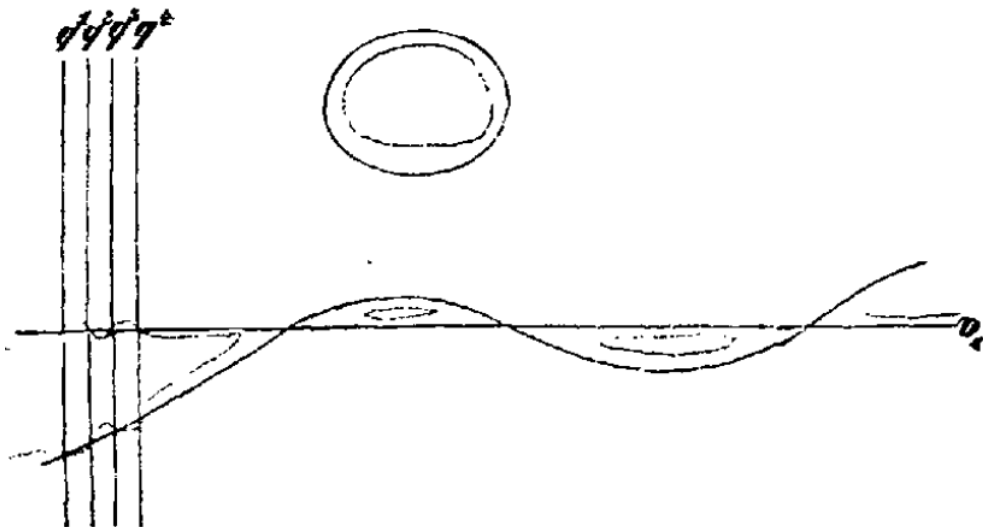


RAPPORT DE TER

Courbes algébriques réelles maximales



Maxime COFFRE

Encadrant : Damien Gayet

Année 2017-2018

COURBES ALGÈBRIQUES RÉELLES MAXIMALES

RÉSUMÉ. La géométrie algébrique réelle est l'étude des sous-ensembles de \mathbb{R}^n et $P(\mathbb{R}^n)$ solutions de systèmes d'équations polynomiales. Dans $P(\mathbb{R}^3)$, toute courbe algébrique non singulière admet un nombre fini de composantes connexes. L'objet de ce TER est de démontrer le théorème de Harnack qui donne une majoration du nombre de composantes connexes d'une courbe non singulière en fonction de son degré. Pour cela, on introduit la notion de multiplicité d'intersection de deux courbes et on démontre le théorème de Bézout. On utilise enfin la méthode par récurrence de Harnack pour contruire une courbe maximale (i.e. qui admet son maximum de composantes connexes) pour tout degré.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Le plan projectif	3
2.1. Définition	3
2.2. Les courbes algébriques dans le plan projectif	4
3. Le théorème de Bézout	5
3.1. Intersection de deux courbes	5
3.2. Le théorème de Bézout	6
4. Le théorème de Harnack	9
4.1. Énoncé du théorème	9
4.2. Démonstration de la majoration	9
4.3. Construction d'une courbe maximale	10
5. Au delà du théorème	18
5.1. Disposition des ovales	18
Références	19

1. INTRODUCTION

La géométrie algébrique réelle est l'étude des sous ensembles de \mathbb{R}^n ou $P(\mathbb{R}^n)$ solution de systèmes d'équations polynomiales. De tels ensembles sont appelés *ensembles algébriques*. Par exemple, si on se place dans \mathbb{R}^n , soit $P \in \mathbb{R}[X_1 \dots X_n]$, alors l'ensemble $P^{-1}(\{0\})$ est un ensemble algébrique. Plus généralement, dans \mathbb{R}^n , un ensemble algébrique est de la forme suivante :

$$\{(P_i)^{-1}(\{0\}) \mid \forall i \in \{1 \dots m\}, P_i \in \mathbb{R}[X_1 \dots X_n]\}.$$

Si P_i est de degré d_i pour tout i , on appelle *degré* de l'ensemble algébrique l'entier $\max_i \{d_i\}$. Dans ce mémoire, nous allons nous concentrer sur les courbes algébriques dans le plan projectif réel. Une introduction au plan projectif $P(\mathbb{R}^3)$ sera faite en début de mémoire.

En une dimension, on connaît certains résultats sur les polynômes comme le théorème fondamental de l'algèbre qui stipule qu'un polynôme complexe non constant admet au moins une racine. De plus, si P est un polynôme complexe de degré $d > 0$ qui admet a comme racine, il existe Q un polynôme de degré $d-1$ tel que $P = (X-a)Q$. On peut donc obtenir le résultat suivant :

Proposition 1. *Tout polynôme P de degré $d > 0$ admet exactement d racines complexes.*

Démonstration. On procède par récurrence sur d . Si $d = 1$, $P = X - a$ avec $a \in \mathbb{C}$, donc a est l'unique racine de P . Supposons que tout polynôme P de degré $k \leq d$ admet exactement k racines. Soit P de degré $d+1$. P admet au moins une racine par le théorème fondamental de l'algèbre. Si on note a cette racine, on a $P = (X - a)Q$ avec Q de degré d . Par hypothèse de récurrence, Q admet exactement d racines. Donc P admet exactement $d + 1$ racines. \square

Dans le cas réel, un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré d admet donc au plus d racines réelles. On connaît aussi une méthode simple pour fabriquer un polynôme réel qui admet exactement d racines réelles : on choisit d réels a_1, \dots, a_d distincts et on pose

$P(X) = \prod_{i=1}^d (X - a_i)$. On peut donc fixer le nombre et la disposition des racines dans \mathbb{R} .

L'objet de ce mémoire va être de généraliser ce résultat en dimension deux. On se place dans $P(\mathbb{R}^3)$. Soit $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que $P^{-1}(\{0\})$ soit une courbe non singulière. Alors $P^{-1}(\{0\})$ est une union de cercles topologiques, correspondants à ses composantes connexes. Le théorème de Harnack, que nous allons énoncer et démontrer, donne une majoration du nombre de composantes connexes d'une courbe algébrique non singulière en fonction de son degré. Pour montrer ce résultat, nous aurons besoin du théorème de Bézout qui donne une majoration du nombre d'intersections de deux courbes non singulières dans $P(\mathbb{R}^3)$. Enfin, nous allons utiliser la méthode de Harnack pour construire une courbe algébrique maximale, c'est à dire qui admet son maximum de composantes connexes, pour tout degré.

2. LE PLAN PROJECTIF

2.1. Définition.

Définition 2. Soit E un espace vectoriel. On appelle *espace projectif associé à E* et on note $P(E)$ l'ensemble des droite vectorielles de E .

Dans notre contexte, l'espace vectoriel considéré est \mathbb{R}^3 . L'espace projectif engendré est appelé *plan projectif*. $P(\mathbb{R}^3)$ peut se voir comme $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ quotienté par la relation d'équivalence suivante :

$$\forall (x, y, z), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, (x, y, z) \sim (u, v, w) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid (u, v, w) = \lambda(x, y, z).$$

De cette manière, un point p de $P(\mathbb{R}^3)$ est défini par un vecteur directeur de la droite vectorielle correspondante. Si ce vecteur a pour coordonnées (x, y, z) dans \mathbb{R}^3 , on note $[x : y : z]$ les *coordonnées homogènes* de p . On notera que, pour tout réel non nul k , les points $[x : y : z]$ et $[kx : ky : kz]$ sont les mêmes. Comme on quotiente $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, il y a au moins une coordonnée de $[x : y : z]$ non nulle. Supposons que $z \neq 0$. On peut alors se ramener à des coordonnées homogènes de la forme $[x : y : 1]$, qui ne dépendent que de deux paramètres, d'où l'appellation *plan projectif*. Si l'on considère \mathbb{R}^3 muni de la topologie des Boréliens, on peut munir $P(\mathbb{R}^3)$ de la topologie quotient correspondante. On considère la projection suivante :

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\rightarrow P(\mathbb{R}^3) \\ (x, y, z) &\mapsto [x : y : z]. \end{aligned}$$

Alors, si $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ est l'ensemble des Boréliens de \mathbb{R}^3 , les ouverts de $P(\mathbb{R}^3)$ sont définis comme suit :

$$\forall U \subset P(\mathbb{R}^3), U \text{ ouvert dans } P(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \Pi^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3).$$

Comme toute droite vectorielle intersecte la sphère S^2 en deux points antipodaux, on peut aussi voir $P(\mathbb{R}^3)$ comme S^2 quotienté par l'involution $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. C'est à dire par la relation d'équivalence :

$$\forall (x, y, z), (u, v, w) \in S^2, (x, y, z) \sim (u, v, w) \Leftrightarrow (u, v, w) = \pm(x, y, z).$$

Dans ce cas, on munit S^2 de la topologie induite : les ouverts de S^2 sont les ensembles de la forme $U \cap S^2$ avec U un Borélien de \mathbb{R}^3 . On appelle cette topologie τ_{S^2} . $P(\mathbb{R}^3)$ est alors muni de la topologie quotient associée. On va montrer que si l'on quotiente S^2 ou $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, les espaces topologiques obtenus sont les mêmes. Considérons la projection suivante :

$$\begin{aligned} p : S^2 &\rightarrow P(\mathbb{R}^3) \\ (x, y, z) &\mapsto [x : y : z]. \end{aligned}$$

On remarque que $p = \Pi|_{S^2}$. Ainsi on a

$$\forall U \subset P(\mathbb{R}^3), p^{-1}(U) = \Pi^{-1}(U) \cap S^2.$$

On appelle τ_{Π} la topologie quotient de la topologie de \mathbb{R}^3 et τ_p la topologie quotient de la topologie induite sur S^2 . On a donc :

$$\forall U \subset P(\mathbb{R}^3), U \in \tau_{\Pi} \Leftrightarrow \Pi^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow p^{-1}(U) \in \tau_{S^2} \Leftrightarrow U \in \tau_p.$$

Les topologies τ_p et τ_{Π} sont donc équivalentes.

2.2. Les courbes algébriques dans le plan projectif.

2.2.1. Définition d'une courbe de $P(\mathbb{R}^3)$:

Soit $P \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$. Pour que $P^{-1}(\{0\})$ définisse une courbe dans $P(\mathbb{R}^3)$, il faut la relation suivante :

$$\forall (x, y, z), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, ([x : y : z] = [u : v : w]) \Rightarrow (P(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow P(u, v, w) = 0).$$

On sait déjà que :

$$\forall (x, y, z), (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, ([x : y : z] = [u : v : w]) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid [u : v : w] = [kx : ky : kz])$$

Il faut donc que P vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, P(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow P(kx, ky, kz) = 0$$

En particulier, tout polynôme homogène vérifie cette relation.

Pour passer d'une courbe dans \mathbb{R}^2 à une courbe dans $P(\mathbb{R}^3)$, nous allons *homogénéiser* la courbe. Cela signifie que nous allons transformer le système de polynômes initial en un système de polynômes homogènes à 3 variables.

Soit Γ la courbe du plan \mathbb{R}^2 de degré d définie par $P(X, Y) = \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} X^i Y^j = 0$.

On appelle *homogénéisé* de P le polynôme $Q(X, Y, Z) = \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} X^i Y^j Z^{d-i-j}$.

De cette manière, Q est bien un polynôme homogène et $\{Q = 0\}$ définit bien une courbe car :

$$\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, Q(kx, ky, kz) = k^d Q(x, y, z).$$

2.2.2. Résultats topologiques.

Nous allons nous intéresser à quelques résultats topologiques sur les courbes algébriques. Tout d'abord, on admettra qu'une courbe algébrique non singulière contient un nombre fini de composantes connexes, toutes difféomorphes à un cercle.

Définition 3. On appelle *ovale* toute composante connexe C d'une courbe algébrique Γ telle que $P(\mathbb{R}^3) \setminus C$ possède deux composantes connexes.

On admettra le lemme suivant :

Lemme 4. *Le complémentaire d'un ovale dans $P(\mathbb{R}^3)$ possède une composante connexe homéomorphe à un disque, et une homéomorphe à un ruban de Möbius.*

Une démonstration de ce lemme est faite dans [1].

Définition 5. On appelle *pseudo-droite* toute composante connexe C d'une courbe algébrique Γ telle que $P(\mathbb{R}^3) \setminus C$ est connexe.

On admettra le lemme suivant.

Lemme 6. *Le complémentaire d'une pseudo-droite dans $P(\mathbb{R}^3)$ est homéomorphe à un plan affine.*

Proposition 7. *Toute courbe algébrique non singulière dans $P(\mathbb{R}^3)$ admet au plus une pseudo-droite.*

Démonstration. Soit Γ une courbe algébrique non singulière possédant une pseudo-droite D . On suppose que Γ a d'autres composantes connexes, soit alors C une de ces composantes. Comme Γ est non singulière, C est contenu dans le complémentaire de D dans $P(\mathbb{R}^3)$. Ce complémentaire est homéomorphe à un plan affine par le lemme 6. Ainsi, le couple $(C, P(\mathbb{R}^3) \setminus D)$ est homéomorphe au couple (S^1, \mathbb{R}^2) . Par

le théorème de Jordan, on sait que S^1 sépare \mathbb{R}^2 en deux composantes connexes. On peut donc dire que C sépare $P(\mathbb{R}^3) \setminus D$ en deux composantes connexes. Comme D n'intersecte pas C , C sépare $P(\mathbb{R}^3)$ en au moins deux composantes connexes, donc C est un ovale. \square

3. LE THÉORÈME DE BÉZOUT

3.1. Intersection de deux courbes.

Dans la suite, si P est un polynôme, on appellera également P son ensemble d'annulation. Soient P et Q deux polynômes homogènes de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$. On se place en un point $p = [x_p : y_p : 1]$ de $P(\mathbb{C}^3)$. On dit que P et Q *s'intersectent* en p si les courbes P et Q contiennent toutes les deux p .

Théorème 8. *Pour tout point p et tout polynôme $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$, il existe un entier $I_p(P, Q)$ qui vérifie :*

- (1) $I_p(P, Q) \geq 0$
- (2) $I_p(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P$ et Q ne s'intersectent pas en p
- (3) $I_p(P, Q) = I_p(Q, P)$
- (4) $I_p(X - x_p, Y - y_p) = 1$
- (5) Si $I_p(P, Q) = 1$, alors les tangentes à P et Q en p sont distinctes.
- (6) pour tout polynôme homogène R on a $I_p(P, Q) = I_p(P, Q + PR)$
- (7) pour tout polynôme homogène R on a $I_p(P, QR) = I_p(P, Q) + I_p(P, R)$

On appelle cet entier multiplicité d'intersection de P et Q en p .

La construction d'un tel entier est faite dans [2].

Si $A \subset P(\mathbb{C}^3)$, on note $I_A(P, Q) = \sum_{x \in A} I_x(P, Q)$. De la même manière, on note

$I(P, Q) = \sum_{x \in P(\mathbb{C}^3)} I_x(P, Q)$. On voit alors facilement que $I(P, Q)$ vérifie les propriétés (1), (3), (6) et (7).

Nous allons faire le parallèle entre multiplicité d'intersection de deux courbes et multiplicité d'une racine d'un polynôme à une indéterminée. Soit $P(X, Y, Z)$ un polynôme homogène complexe et L la droite de $P(\mathbb{C}^3)$ définie par $Y = 0$. Les points d'intersection de P et L vérifient $P(X, Y, Z) = 0$ et $Y = 0$, donc $P(X, 0, Z) = 0$. Pour les points $[x, 0, z]$ tels que $z \neq 0$, cela revient à trouver le lieu d'annulation de $P(X, 0, 1)$ qui est un polynôme à une indéterminée. Les points $[x, 0, 0]$ correspondent en fait au seul point $[1, 0, 0]$. Trouver les points d'intersection de P et L revient donc à trouver les racines d'un polynôme complexe à une indéterminée.

On peut écrire $P(X, 0, 1) = r \prod_{i=1}^k (X - a_i)^{m_i}$ avec $r \in \mathbb{C}$ et $a_1 \dots a_k$ les racines de

$P(X, 0, 1)$, on a alors $P(X, 0, Z) = r \left(\prod_{i=1}^k (X - a_i Z)^{m_i} \right) Z^t$ avec $t \geq 0$ et donc

$$I(P, L) = t + \sum_{i=1}^k m_i$$

Proposition 9. *Soient F et G deux courbes algébriques non singulières telles que les polynômes F et G sont premiers entre eux. On suppose F de degré au moins 2. Soit Ω_F un ovale de F . Alors si $I_{\Omega_F}(F, G) > 0$, alors $I_{\Omega_F}(F, G) \geq 2$.*

Démonstration. Soit a un point d'intersection de Ω_F et G . On note C_G la composante connexe de G contenant a . On sait que C_G est diffeomorphe à un cercle. Considérons :

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R} &\rightarrow P(\mathbb{R}^3) \\ t &\mapsto [\cos(t) : \sin(t) : 1]\end{aligned}$$

C'est une paramétrisation d'un cercle dans $P(\mathbb{R}^3)$ car la surface correspondante dans \mathbb{R}^3 est le cône de révolution de pente 1 autour de l'axe Oz . De plus, ϕ est 2π -périodique. On sait donc qu'il existe ψ un diffeomorphisme de $P(\mathbb{R}^3)$ qui envoie $\phi(\mathbb{R})$ sur C_G . On note Ω_F^{int} la composante connexe de $P(\mathbb{R}^3) \setminus \Omega_F$ homéomorphe à un disque, et Ω_F^{ext} l'autre composante.

Supposons maintenant que $I_a(F, G) = 1$. Par définition de la multiplicité d'intersection, G intersecte transversalement F en a . Soit $t_a \in \mathbb{R}$ tel que $\psi \circ \phi(t_a) \in \Omega_F$. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que pour tout $0 < t < \epsilon$, quitte à changer t en $-t$, on a $\psi \circ \phi(t_a + t) \in \Omega_F^{int}$ et $\psi \circ \phi(t_a - t) \in \Omega_F^{ext}$. On peut donc choisir t_e et t_i tels que $t_e < t_i$ et $\psi \circ \phi(t_e) \in \Omega_F^{ext}$ et $\psi \circ \phi(t_i) \in \Omega_F^{int}$. Comme ϕ est 2π -périodique, on a que $\psi \circ \phi(t_e + 2\pi) \in \Omega_F^{ext}$. Et comme G est une courbe non singulière, si l'on note $I = [t_i, t_e + 2\pi]$, on a que $a \notin \psi \circ \phi(I)$. Pourtant, avec $\psi \circ \phi(I)$, on passe de Ω_F^{int} à Ω_F^{ext} de manière continue. Il existe donc au moins un autre point d'intersection de Ω_F et C_G . On obtient bien que $I_{\Omega_F}(F, G) \geq 2$. \square

Cette proposition nous sera utile pour démontrer le théorème de Harnack.

3.2. Le théorème de Bézout.

Le théorème de Bézout donne le nombre d'intersections de deux courbes dans le plan projectif complexe en fonction de leur degré. Il donne donc une borne sur ce nombre d'intersection dans $P(\mathbb{R}^3)$. Nous allons suivre la démonstration de Robert Bix dans [2]. Nous allons travailler avec des polynôme homogènes de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ qui sont, par définition, non nuls.

Lemme 10. *Soit L une droite de $P(\mathbb{C}^3)$ et P une courbe de degré d qui n'admet pas L comme facteur. Alors P et L s'intersectent d fois, avec multiplicités.*

Démonstration. Dans \mathbb{C}^3 , L vérifie une équation de la forme $aX + bY + cZ = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Par changement de variable, on peut se ramener à $Y = 0$. De cette manière, on a vu que trouver les lieux d'annulation communs à P et L revient à trouver le lieu d'annulation d'un polynôme complexe à une indéterminée de degré d . On sait qu'il y en a exactement d , comptées avec multiplicité. \square

Lemme 11. *Soient F, G et H trois polynôme homogènes complexes, alors :*

- (1) FG est un polynôme homogène avec $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$
- (2) si $FG = FH$ alors $G = H$

Démonstration. Le point (1) vient du fait que le degré de chaque terme de FG est somme des degrés correspondant de F et G . Comme F et G sont non nuls, FG est bien un polynôme homogène du degré demandé.

Pour le point (2), on voit que si $FG = FH$ alors G et H ont même degré par (1). Ainsi, $G - H$ est soit un polynôme homogène, soit le polynôme nul. En écrivant $F(G - H) = 0$, d'après (1), si $(G - H)$ était non nul, $F(G - H)$ ne le serait pas non plus. Donc $G = H$. \square

Nous allons avoir besoin de différencier les degré partiels d'un polynôme dans la suite.

Définition 12. La plus haute puissance en X_i d'un polynôme $P(X_1, \dots, X_n)$ est appelée *degré en X_i de P* et est noté $\text{deg}_{X_i}(P)$.

Lemme 13. Soit H un polynôme homogène de $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ de degré d tel que $\text{deg}_Y(H) = 0$. Alors on peut écrire $H = L_1 \dots L_d$ avec $L_1 \dots L_d$ des droites pas nécessairement distinctes.

Démonstration. H est un polynôme en X, Z . En fixant $Z = 1$ pour se ramener au plan projectif, on peut écrire :

$$H(X, 1) = r(X - a_1)^{m_1} \dots (X - a_k)^{m_k}$$

Ainsi, en prenant l'homogénéisé, on obtient :

$$H(X, Z) = r(X - a_1 Z)^{m_1} \dots (X - a_k Z)^{m_k} Z^t$$

On a donc écrit H comme un produit de droites pas nécessairement distinctes. Si H est de degré d , on a donc $H = L_1 \dots L_d$ avec $L_1 \dots L_d$ des droites. \square

Cela va nous servir pour démontrer le résultat suivant.

Lemme 14. Soient F, G et H des polynôme homogènes complexes tels que H est premier avec G et $\text{deg}_Y(H) = 0$. Alors tout facteur commun à HF et G est aussi un facteur commun à F et G .

Démonstration. Soit R un facteur commun de HF et G . On peut écrire, pour un certain polynôme homogène S :

$$HF = RS.$$

- Si H est de degré 0, alors $H = c$ une constante complexe non nulle, et on peut écrire alors $F = c^{-1}RS$ donc R est un facteur commun à F et G .
- Si H est de degré 1, on peut se ramener au cas où $H = X$ par changement de variable. Comme H n'a pas de facteur commun avec G , X n'est pas un facteur de R . Si X ne divisait pas S , les termes de R et S ne faisant pas intervenir X formeraient des polynômes homogènes R_1, S_1 en Y, Z . Alors $R_1 S_1$ serait non nul par le lemme 11, ce qui contredirait l'égalité $XF = RS$. Donc on peut écrire $S = XT$ pour un certain T homogène. On obtient donc $XF = XRT$ et donc $F = RT$. Donc R est un facteur commun à F et G .
- Si H est de degré $m > 1$, d'après le lemme 13 on peut écrire $H = LH_1$ avec L une droite et H_1 homogène de degré $m - 1$ car $\text{deg}_Y(H) = 0$. Comme H n'a pas de facteur commun avec G , L et H_1 n'en ont pas non plus. On veut que tout facteur commun à HF et G soit aussi facteur commun à H_1F et G . Supposons qu'on ait un facteur commun à HF et G qui ne soit pas facteur de H_1F . C'est donc un facteur de L , et donc un facteur commun de L et G . On vient de voir que L et G n'ont pas de facteur commun, on a une contradiction. Ainsi, tout facteur commun à $HF = LH_1F$ et G est aussi un facteur commun à H_1F et G . On peut réduire ainsi le degré de H jusqu'à obtenir 1, ce qui termine la preuve. \square

On va maintenant s'intéresser aux courbes d'annulation des polynômes homogènes dans $P(\mathbb{C}^3)$ et à leurs intersections.

Définition 15. Soient F et G de degrés respectifs m et n . On dit que F et G vérifient le théorème de Bézout si $I(F, G) = mn$.

Lemme 16. Soit F de degré $m > 0$ tel que $\text{deg}_Y(F) = 0$ et G de degré n tels que F n'a pas de facteur commun avec G . Alors F et G vérifient le théorème de Bézout.

Démonstration. D'après le lemme 13, on peut écrire F comme un produit de droites :

$$F = L_1 \dots L_m$$

Ainsi, grâce à la propriété (7) de la multiplicité d'intersection, on obtient :

$$I(F, G) = I(L_1, G) + \dots + I(L_m, G)$$

Les droites $L_1 \dots L_m$ ne sont pas facteur de G . Le lemme 10 nous dit alors que $I(L_i, G) = n$ pour tout $i \in \{1 \dots m\}$. Ainsi, on obtient bien $I(F, G) = mn$. \square

Remarque 1. Si $F = c$ une constante non nulle, le théorème est aussi vérifié car alors il n'y a aucun point qui annule F et donc $I(F, G) = 0 = 0n$.

Lemme 17. Soient F, G et H homogènes de degrés respectifs m, n et p tels que $\deg_Y(H) = 0$ et H est premier avec G . Alors FH et G vérifient le théorème de Bézout si et seulement si F et G le vérifient.

Démonstration. Par le lemme 11, FH est un polynôme homogène de degré $m + p$. Par le lemme 16, on a $I(H, G) = pn$. Donc, avec la propriété (7) de la multiplicité d'intersection, on obtient :

$$I(FH, G) = I(F, G) + pn$$

On en déduit que $I(FH, G) = (m + p)n$ si et seulement si $I(F, G) = mn$. \square

Le but est maintenant de démontrer que tout couple de polynômes homogènes F et G premiers entre eux vérifient le théorème de Bézout par récurrence sur $\deg_Y(F)$. Le lemme 16 montre le résultat si $\deg_Y(F) = 0$. Le lemme suivant va mettre en place la récurrence sur $\deg_Y(F)$.

Lemme 18. Soient F, G deux polynômes homogènes tels que $\deg_Y(F) = s$, $\deg_Y(G) = t$ avec $s \geq t > 0$ et F et G premiers entre eux. Alors il existe F_1 et G_1 premiers entre eux tels que $\deg_Y(F_1) < s$, $\deg_Y(G_1) = t$ et tels que F et G vérifient le théorème de Bézout si et seulement si F_1 et G_1 le vérifient.

Démonstration. On peut écrire $G = HG_1$ tel que $\deg_Y(H) = 0$. Ainsi, on a bien $\deg_Y(G_1) = t$. Comme G n'a pas de facteur commun avec F , H et G_1 n'en ont pas non plus. On note $P(X, Z)$ le coefficient de F en Y^s et $Q(X, Z)$ le coefficient de G_1 en Y^t . Alors QF et $PY^{s-t}G_1$ sont des polynômes homogènes de degré s en Y et de coefficient PQ en Y^s . On définit F_1 comme suit :

$$F_1 = QF - PY^{s-t}G_1$$

De cette manière, F_1 est soit nul, soit un polynôme homogène tel que $\deg_Y(F_1) < s$. Comme G_1 n'a pas de facteur commun avec Q ni avec F , il n'en a pas avec QF par le lemme 14 car $\deg_Y(Q) = 0$. Or, l'égalité ci-dessus montre que tout facteur commun à F_1 et G_1 est aussi commun à QF et G_1 , donc F_1 et G_1 n'ont pas de facteur commun. Comme G_1 est de degré strictement positif, F_1 est non nul. C'est donc un polynôme de degré en Y strictement inférieur à s .

On sait que le théorème de Bézout est vérifié pour F et G si et seulement s'il est vérifié pour F et G_1 car $\deg_Y(H) = 0$. Il est vérifié pour F et G_1 si et seulement s'il est vérifié pour QF et G_1 car $\deg_Y(Q) = 0$. Par la propriété (6) de la multiplicité d'intersection, on a

$$I(QF, G_1) = I(QF - PY^{s-t}G_1, G_1) = I(F_1, G_1).$$

Donc le théorème de Bézout est vérifié pour QF et G_1 si et seulement s'il est vérifié pour F_1 et G_1 . \square

On a maintenant tous les résultats nécessaires pour prouver le théorème de Bézout.

Théorème 19 (Bézout). *Soient F et G deux courbes algébriques non singulières de degrés respectifs m et n dans $P(\mathbb{C}^3)$ tels que les polynômes F et G sont premiers entre eux. Alors ces courbes s'intersectent exactement mn fois, avec multiplicités.*

Démonstration. Si $\deg_Y(F) = 0$ ou $\deg_Y(G) = 0$, la preuve est déjà faite.

Si F et G ont tous les deux un degré strictement positif en Y , on peut utiliser le lemme 18 pour diminuer le degré en Y le plus haut et obtenir F_1 et G_1 . On peut faire cette opération jusqu'à ce que F_n ou G_n ait un degré nul en Y . Ce processus est fini car à chaque utilisation du lemme 18, on réduit strictement un des degrés en Y . Une fois F_n et G_n obtenus, la preuve est terminée. \square

Dans notre cas, on utilisera le fait que dans $P(\mathbb{R}^3)$, les deux courbes s'intersectent au plus mn fois.

4. LE THÉORÈME DE HARNACK

4.1. Énoncé du théorème.

Le théorème de Harnack [3] concerne les courbes algébriques non singulières dans le plan projectif $P(\mathbb{R}^3)$. Il se compose de deux parties. Il donne tout d'abord une majoration du nombre de composantes connexes que peut posséder une telle courbe, en fonction de son degré. Ensuite, il affirme que cette borne est atteinte pour tout degré et donne une construction explicite d'une courbe qui admet son maximum de composantes connexes.

Théorème 20 (Harnack). *Une courbe algébrique non singulière du plan projectif, de degré d , a au plus $g(d) + 1$ composantes connexes, où $g(d) = (d - 2)(d - 1)/2$. De plus, pour tout degré d , il existe une courbe de degré d admettant $g(d) + 1$ composantes connexes.*

4.2. Démonstration de la majoration.

Nous allons montrer dans cette section qu'une courbe algébrique non singulière de degré d a au plus $g(d) + 1$ composantes connexes. On admettra qu'une conique lisse possède une seule composante connexe dans le plan projectif. On regarde $d > 2$. Nous allons procéder par l'absurde en supposant qu'une courbe Γ de degré d a strictement plus de $g(d) + 1$ composantes connexes. Nous allons alors construire une autre courbe Δ de degré $d - 2$ de manière à ce que le nombre d'intersection de ces deux courbes contredise le théorème de Bézout.

Tout d'abord, on peut remarquer l'inégalité suivante si $d_1 > 1$ ou $d_2 > 1$:

$$g(d_1) + 1 + g(d_2) + 1 \leq g(d_1 + d_2) + 1$$

Par conséquent, il suffit de s'intéresser aux courbes algébriques irréductibles (i.e. lieu d'annulation d'un polynôme irréductible). En effet, si Γ n'est pas irréductible,

elle peut s'écrire comme $\bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ avec Γ_i irréductible pour tout i . Donc le nombre de composantes connexes de Γ est majoré par la somme des nombre de composantes connexes des Γ_i . Soit donc Γ une courbe algébrique non singulière irréductible de degré d , et supposons qu'elle a strictement plus de $g(d) + 1$ composantes connexes. D'après la proposition 7, elle possède au moins $g(d) + 1$ ovals, que l'on notera $\Omega_1 \dots \Omega_{g(d)+1}$. Pour construire Δ de degré $d - 2$, il nous faut choisir $\frac{d(d-1)}{2} - 1$ points par lesquels Δ doit passer.

En effet, quand on se place dans le plan \mathbb{R}^2 , Δ est la courbe d'annulation d'un

polynôme de la forme :

$$\sum_{i+j \leq d-2} a_{i,j} X^i Y^j = \sum_{k=0}^{d-2} \left(\sum_{i+j=k} a_{i,j} X^i Y^j \right) \text{ avec } a_{i,d-2-i} \neq 0 \text{ pour un certain } i$$

Quitte à multiplier par un scalaire, on peut considérer que le terme $a_{i,d-2-i}$ non nul vaut 1. Choisir un point par lequel Δ doit passer revient donc à résoudre une équation à $\frac{d(d-1)}{2} - 1$ inconnues. En choisissant $\frac{d(d-1)}{2} - 1$ points distincts, on obtient un système carré d'équations linéaires, qui admet au moins une solution.

On se replace dans $P(\mathbb{R}^3)$. Si $d > 2$ on a l'inégalité suivante :

$$\frac{d(d-1)}{2} - 1 \geq g(d) + 1$$

Ainsi, on peut placer un point de Δ sur chaque ovale Ω_i de Γ . On place les points restants sur une autre composante connexe de Γ . Comme Γ est irréductible et que $1 \leq \deg(\Delta) < \deg(\Gamma)$, les polynômes définissant Γ et Δ sont premiers entre eux. Le théorème de Bézout nous dit donc que $\Gamma \cap \Delta$ est de cardinalité finie. La proposition 9 nous dit que comme on choisit un point d'intersection de Γ et Δ sur chaque Ω_i , on a pour tout $i \in \{1 \dots g(d) + 1\}$, $I_{\Omega_i}(\Gamma, \Delta) \geq 2$. On obtient donc l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} I(\Gamma, \Delta) &\geq 2(g(d) + 1) + \left(\frac{d(d-1)}{2} - 1 - g(d) - 1 \right) \\ &= g(d) + \frac{d(d-1)}{2} \\ &= \frac{(d-1)(d-2)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} \\ &= (d-1)^2 \\ &> d(d-2) \end{aligned}$$

La dernière ligne est vraie si $d > 2$, ce qui est le cas par hypothèse. Ainsi, on a construit Δ telle que Γ et Δ contredisent le théorème de Bézout. On en conclut que Γ possède au plus $g(d) + 1$ composantes connexes.

4.3. Construction d'une courbe maximale.

La construction d'une courbe algébrique de degré $d \geq 2$ qui possède exactement $g(d) + 1$ composantes connexes se fait par récurrence sur le degré à partir de $d = 2$. On notera qu'une courbe algébrique de degré 1 est une droite, elle possède donc toujours une seule composante connexe. On exclut les points du plan projectif vérifiant $z = 0$ pour la construction, ce qui permettra de travailler directement avec des polynômes à deux variables dans le plan affine. On aura besoin, pour la récurrence, de la droite d'annulation de Y que l'on appelle L . Le but est de construire une courbe Γ_d non singulière pour chaque degré $d \geq 2$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1) Γ_d possède $g(d) + 1$ composantes connexes.
- (2) Γ_d possède une composante connexe, C_d , qui intersecte L transversalement en exactement d points distincts $\{a_1 \dots a_d\}$.
- (3) On peut choisir des orientations de L et C_d telles que pour tout $i \in \{1 \dots d-1\}$, l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ sur L ne contient aucun autre a_j , de même pour l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ sur C_d .
- (4) Pour $i = 1, \dots, d-1$, la réunion des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ sur L et sur C_d forme un ovale non lisse dans $P_2(\mathbb{R})$, appelé Ω_i .

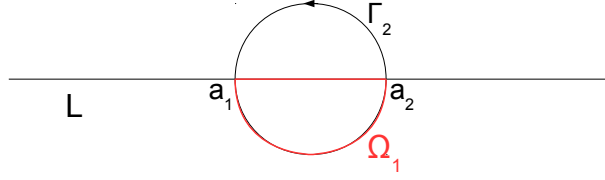


FIGURE 1. On voit que Γ_2 intersecte bien L en deux points distincts, transversalement, et on a bien un ovale Ω_1 formé par les intervalles $[a_1, a_2]$ des deux courbes.

Pour le cas $d = 2$, on choisit $\Gamma_2 = X^2 + Y^2 - 1$.

La propriété (1) est vérifiée car Γ_2 est un cercle donc possède une seule composante connexe. La propriété (2) est vérifiée. En effet, Γ_2 intersecte L en $a_1 = (-1, 0)$ et $a_2 = (1, 0)$. En a_1 et a_2 , les tangentes à Γ_2 sont respectivement $X = -1$ et $X = 1$. La tangente à L en tout point est L car c'est une droite. Donc les tangentes à Γ_2 et L sont distinctes en a_1 et a_2 , donc les intersections sont transverses. La propriété (3) est vérifiée immédiatement puisqu'il n'y a que deux points d'intersection. La propriété (4) est vérifiée car si l'on parcourt Γ_2 dans le sens direct et L dans le sens croissant par rapport à x , l'union des intervalles $[a_1, a_2]$ sur Γ_2 et L est un lacet continu sans point double et sépare donc le plan affine en deux composantes connexes par le théorème de Jordan, donc c'est un ovale. La situation est illustrée en figure 1.

Supposons que l'on ait construit Γ_d pour un certain degré $d \geq 2$ qui vérifie les quatre propriétés. $\Gamma_d L$ est alors une courbe de degré $d + 1$ qui possède $g(d) + 1$ composantes connexes. On va perturber légèrement le polynôme $\Gamma_d L$ de manière à passer de $g(d) + 1$ à $g(d + 1) + 1$ composantes connexes. Il est intéressant de remar-

quer ici que $g(d) = \sum_{k=0}^{d-2} k$. Ainsi, pour passer de $g(d)$ à $g(d + 1)$, il faut créer $d - 1$

nouvelles composantes connexes. Ces composantes vont être créées dans l'intérieur des ovales Ω_i . Pour ce faire, nous allons introduire $d + 1$ polynômes de la forme $D_j = X - b_j$ de manière à ce que chaque D_j intersecte transversalement L au point $(b_j, 0)$, appelé aussi b_j . De plus, si l'on considère $L \setminus \{b_1\}$, les points $\{a_1 \dots a_d\}$ sont dans une composante connexe et les $\{b_2 \dots b_d + 1\}$ dans l'autre. L'idée est de considérer la courbe $\Gamma_{d+1} = \Gamma_d L + \epsilon \prod_{j=1}^{d+1} D_j$ avec ϵ assez petit et de signe bien choisi pour que la courbe Γ_{d+1} vérifie les propriétés demandées.

Lemme 21. *Avec ces notations, soit $\epsilon \neq 0$, alors Γ_{d+1} intersecte transversalement L en chaque b_j .*

Démonstration. La première chose à noter est que chaque b_j est bien un zéro de Γ_{d+1} :

$$\Gamma_{d+1}(b_j) = \Gamma_d L(b_j) + \epsilon \prod_{k=1}^{d+1} (b_j - b_k) = 0$$

Il reste à montrer que les droites tangentes à L et Γ_{d+1} en les b_j sont distinctes. L étant une droite, elle est tangente à elle-même en tout point. Soit alors un point b_j .

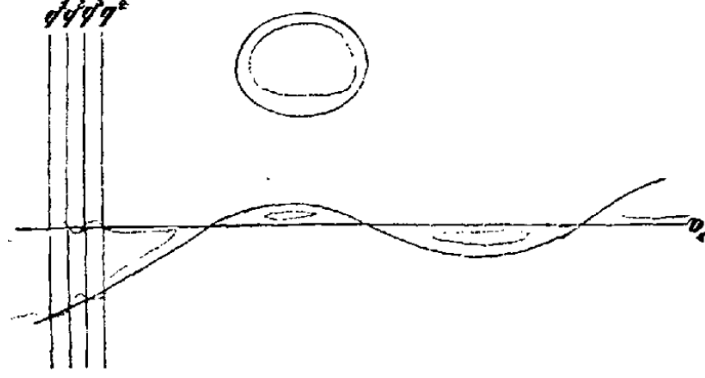


FIGURE 2. Construction de Harnack datant de 1876 [4]. Illustration du passage du degré 3 au degré 4 : il utilise les 4 droites verticales pour perturber le polynôme et créer deux nouvelles composantes connexes à l'intérieur des ovales non lisses déjà présents. La droite horizontale correspond à notre L , intersectée en trois points distincts par la courbe Γ_d . Les droites verticales correspondent à nos polynômes D_i .

On calcule la différentielle de Γ_{d+1} en ce point :

$$d\Gamma_{d+1}|_{b_j} = d(\Gamma_d L)|_{b_j} + \epsilon d\left(\prod_{k=1}^{d+1} (X - b_k)\right)|_{b_j}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} d(\Gamma_d L)|_{b_j} &= \frac{\partial(\Gamma_d L)}{\partial x}|_{b_j} dx + \frac{\partial(\Gamma_d L)}{\partial y}|_{b_j} dy \\ &= \Gamma_d(b_j) dy \\ d\left(\prod_{k=1}^{d+1} (X - b_k)\right)|_{b_j} &= dx \sum_{k=0}^{d+1} \prod_{l \neq k} (b_j - b_l) \\ &= dx \prod_{l \neq j} (b_j - b_l) \end{aligned}$$

Donc on a

$$d\Gamma_{d+1}|_{b_j} = \Gamma_d(b_j) dy + dx \epsilon \prod_{l \neq j} (b_j - b_l).$$

On sait que les b_l sont distincts de b_j donc si l'on note $T_{\Gamma_{d+1}} b_j$ la tangente à Γ_{d+1} en b_j , $T_{\Gamma_{d+1}} b_j$ vérifie l'équation : $\alpha x + \beta y = 0$ avec $\alpha \neq 0$, donc $T_{\Gamma_{d+1}} b_j \neq L$. \square

Ainsi, Γ_{d+1} vérifie la propriété (2) dès lors que $\epsilon \neq 0$. Les points a_i demandés dans la propriété sont les points d'intersection b_i .

Cependant, $\Gamma_d L$ possède des points singuliers en les a_i . Il faut donc que la perturbation élimine ces points singuliers.

Lemme 22. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a) = 0$, $df_a = 0$ et $d^2 f_a$ soit non dégénérée de signature $(1, 1)$. Soit enfin $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $h(a) \neq 0$. Alors il existe V voisinage de a et $\epsilon > 0$ tels que pour tout réel t vérifiant $0 < |t| < \epsilon$, $(f + th)^{-1}\{0\} \cap V$ est non singulière et non vide.

Pour démontrer ce résultat, on aura besoin du lemme suivant, que l'on admettra.

Lemme 23 (Morse). *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n contenant 0 et $f \in C^3(U, \mathbb{R})$ telle que $df(0) = 0$, et $d^2f(0)$ non-dégénérée de signature $(p, n - p)$. Alors il existe V et W deux voisinages de 0 dans \mathbb{R}^n et $\phi : V \rightarrow W$ un C^1 -difféomorphisme tel que $\phi(0) = 0$ et*

$$\forall x \in V, f(x) = \phi_1(x)^2 + \cdots + \phi_p(x)^2 - \phi_{p+1}(x)^2 - \cdots - \phi_n(x)^2.$$

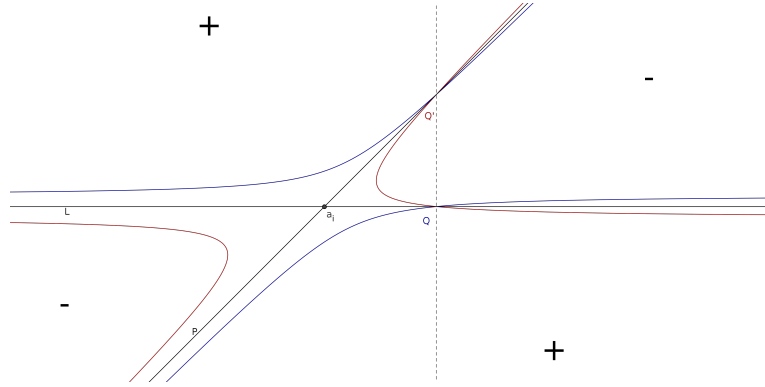


FIGURE 3. Illustration de la perturbation d'un point singulier. La courbe d'équation $PL = y(y - x) = 0$ en noir est perturbée par $(x - 1) : Q$ a pour équation $y(y - x) - \epsilon(x - 1) = 0$ et Q' vérifie $y(y - x) + \epsilon(x - 1) = 0$ avec ϵ positif.

Démonstration du lemme 22. Par translation, on peut se ramener au cas où $a = (0, 0)$. Comme $h((0, 0)) \neq 0$, par continuité, il existe un voisinage U de l'origine tel que h ne s'annule pas sur U . On peut donc écrire :

$$\forall (x, y) \in U, f(x, y) + th(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x, y)}{h(x, y)} + t = 0.$$

On veut que $\frac{f}{h}$ vérifie les hypothèses du lemme de Morse. On calcule donc :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{h}\right)_{|_0} &= \frac{hdf_{|_0} - f dh_{|_0}}{h^2} \\ &= \frac{df_{|_0}}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Et la différentielle seconde :

$$\begin{aligned} d^2\left(\frac{f}{h}\right)_{|_0} &= d\left(\frac{df_{|_0}}{h}\right)_{|_0} \\ &= \frac{hd^2f_{|_0} - dh_{|_0}df_{|_0}}{h^2} \\ &= \frac{d^2f_{|_0}}{h}. \end{aligned}$$

Comme h ne s'annule pas sur U , $d^2\left(\frac{f}{h}\right)_{|_0}$ et $d^2f_{|_0}$ ont même signature $(1, 1)$. Grâce au lemme de Morse, il existe deux ouverts V, W voisinages de l'origine et $\phi : V \rightarrow W$ un C^1 difféomorphisme tel que

$$\forall (x, y) \in V, \frac{f}{h}(x, y) = \phi_1(x, y)^2 - \phi_2(x, y)^2.$$

Et en posant $u = \phi_1(x, y) + \phi_2(x, y)$, $v = \phi_1(x, y) - \phi_2(x, y)$ on obtient :

$$\forall (x, y) \in V, f(x, y) + th(x, y) = 0 \Leftrightarrow uv + t = 0.$$

Le membre de droite est l'équation d'une hyperbole dans les coordonnées (u, v) , lisse si $t \neq 0$. Le seul point singulier possible dans l'équation de droite est $(0, 0)$. Donc si $t \neq 0$, comme $(0, 0)$ n'est pas dans l'ensemble $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid uv + t = 0\}$, la courbe obtenue est non singulière. Il suffit maintenant que $(f + th)^{-1}\{0\} \cap V$ soit non vide. Pour tout point $p \in V$, l'application $t \mapsto f(p) + th(p)$ est continue, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que si $0 < |t| < \epsilon$, on a $(f + th)^{-1}\{0\} \cap V$ non vide. La perturbation est illustrée dans la figure 3. \square

Dans notre cas, $f = \Gamma_d L$, donc f est de classe C^∞ , et $h = \prod_{i=1}^{d+1} D_i$. Les points singuliers qui nous intéressent sont les points a_i (points d'intersection de Γ_d et L). En se ramenant au cas $a_i = (0, 0)$, la différentielle de $\Gamma_d L$ en a_i est :

$$\begin{aligned} d(\Gamma_d L)|_0(x, y) &= \frac{\partial(\Gamma_d L)}{\partial x}(0)x + \frac{\partial(\Gamma_d L)}{\partial y}(0)y \\ &= y\Gamma_d(0) = 0. \end{aligned}$$

Et la matrice Hessienne de $\Gamma_d L$ en (x, y) vaut :

$$Hess(\Gamma_d L)(x, y) = \begin{pmatrix} y \frac{\partial^2 \Gamma_d}{\partial x^2} & y \frac{\partial^2 \Gamma_d}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Gamma_d}{\partial x} \\ y \frac{\partial^2 \Gamma_d}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Gamma_d}{\partial x} & 2 \frac{\partial \Gamma_d}{\partial y} + y \frac{\partial^2 \Gamma_d}{\partial y^2} \end{pmatrix} \text{ donc } Hess(\Gamma_d L)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \Gamma_d}{\partial x} \\ \frac{\partial \Gamma_d}{\partial x} & 2 \frac{\partial \Gamma_d}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Or $\frac{\partial \Gamma_d}{\partial x}$ est forcément non nul en a_i comme Γ_d intersecte L transversalement. Donc

$d^2(\Gamma_d L)|_{a_i}$ est non dégénérée. De plus, une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ est de déterminant strictement négatif si $a \neq 0$, donc $d^2(\Gamma_d L)|_0$ est de signature $(1, 1)$.

Dans notre contexte, la perturbation h du lemme 22 est le produit $\prod_{j=1}^{d+1} D_j$ qui est bien non nul en a_i et de classe C^∞ . Les hypothèses de la proposition sont donc bien vérifiées. On a dans ce cas une courbe Γ_{d+1} non singulière qui vérifie la propriété (2).

Pour que Γ_{d+1} vérifie la propriété (1) il suffit que, après perturbation, les $g(d)$ composantes de Γ_d qui n'intersectent pas L soient toujours $g(d)$ composantes de Γ_{d+1} qui n'intersectent pas L . Il faut aussi créer $d - 1$ nouvelles composantes : elles seront créées dans l'intérieur des ovals Ω_i de $\Gamma_d L$. Ainsi, il n'y aura qu'une composante de Γ_{d+1} qui intersecte L en $d + 1$ points car

$$g(d) + (d - 1) + 1 = g(d + 1) + 1.$$

D'abord, on va montrer qu'au voisinage d'un point non singulier de $\Gamma_d L$, notre perturbation donne de nouveau un graphe localement.

Lemme 24 (Théorème des fonctions implicites avec paramètre). *Soit C le lieu d'annulation d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et soit (x_0, y_0) un point non singulier de C . Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ . Alors il existe $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant $(0, x_0)$, $V \subset \mathbb{R}$ contenant y_0 et $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que :*

$$((t, x), y) \in U \times V, (f + th)(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \psi(x, t).$$

Démonstration. On utilise ici le théorème des fonctions implicites avec l'application

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((t, x), y) &\mapsto f(x, y) + th(x, y)\end{aligned}$$

ϕ étant une fonction C^∞ , le théorème des fonctions implicites nous dit que si l'on se place en $p_0 = (t_0, x_0, y_0)$ tel que $\frac{\partial \phi}{\partial y}|_{p_0}(t, x, y) \neq 0$, alors il existe un ouvert U de \mathbb{R}^2 contenant (t_0, x_0) , un ouvert V de \mathbb{R} contenant y_0 et une application $\psi : U \rightarrow V$ de classe C^∞ telle que :

$$(t, x, y) \in U \times V, \phi(t, x, y) = \phi(p_0) \Leftrightarrow (t, x) \in U, y = \psi(t, x).$$

□

Dans notre cas, h est le produit des D_j et $f = \Gamma_d L$. On va montrer que, dans un compact, une courbe non singulière perturbée faiblement par une fonction qui ne s'annule pas admet le même nombre de composantes connexes que la courbe initiale.

Lemme 25. *Soit K un compact, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $C = f^{-1}(\{0\})$ une courbe connexe, non singulière, incluse dans $\overset{\circ}{K}$. Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que h ne s'annule pas sur K . Alors il existe ϵ tel que pour tout t réel tel que $|t| < \epsilon$, la courbe $(f + th)^{-1}(\{0\})$ est connexe.*

Démonstration. En tout point p de C , par le lemme 24, on a un ouvert U_p de \mathbb{R}^2 inclu dans $\overset{\circ}{K}$, contenant p , et un $\epsilon_p > 0$ tels que si $|t| < \epsilon_p$, $(f + th)^{-1}\{0\}$ définit un graphe dans U_p . On obtient de cette manière un recouvrement d'ouverts de C . C est fermée car c'est un graphe localement en tout point, et $C \subset K$ donc C est compact. Ainsi, on peut extraire un sous recouvrement fini de C par des ouverts U_p :

$$C \subset \bigcup_{i=1}^n U_{p_i} = U.$$

Comme C est connexe, quitte à réordonner les p_i , on a $U_{p_i} \cap U_{p_{i+1}} \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{1 \dots n-1\}$. On veut maintenant que $(f + th)^{-1}(\{0\})$ reste dans U . Comme K est compact, h est bornée sur K . On note $m = \inf_{K \setminus U} |f(x, y)| > 0$ et $N = \sup_K |h(x, y)|$.

Ainsi, en posant $\epsilon = \frac{m}{N}$, on a bien que si $|t| < \epsilon$, alors $(f + th)^{-1}\{0\} \subset U$. En effet :

$$(f + th)(x, y) = 0 \Rightarrow |f(x, y)| = |t||h(x, y)| < m.$$

Il reste à montrer que $(f + th)^{-1}(\{0\})$ est bien connexe. Soient x et y deux points de $(f + th)^{-1}(\{0\})$. Il existe donc i_x et i_y tel que $x \in U_{p_{i_x}}$ et $y \in U_{p_{i_y}}$.

- Si $i_x = i_y$, on peut relier x et y par un arc inclu dans $(f + th)^{-1}(\{0\})$ car c'est un graphe dans $U_{p_{i_y}}$.
- Si $i_y = i_x \pm 1$, alors soit $z \in U_{p_{i_x}} \cap U_{p_{i_y}}$ (z existe car l'intersection est non vide). Alors on peut relier x à z par un arc par le même argument que précédemment, de même pour relier z à y . Donc x et y sont dans la même composante connexe de $(f + th)^{-1}(\{0\})$. Par itération, pour tout i_x, i_y , x et y sont dans la même composante connexe.

Donc $(f + th)^{-1}(\{0\})$ est connexe. □

Ce résultat va nous permettre de démontrer le lemme suivant.

Lemme 26. *Soit K un compact de \mathbb{R}^2 et Γ une courbe non singulière définie par $f(x, y) = 0$ avec f de classe C^∞ . Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ ne s'annulant pas sur K . Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour t réel et $|t| < \epsilon$, les courbes $\Gamma \cap K$ et $((f + th)^{-1}\{0\}) \cap K$ ont le même nombre de composantes connexes.*

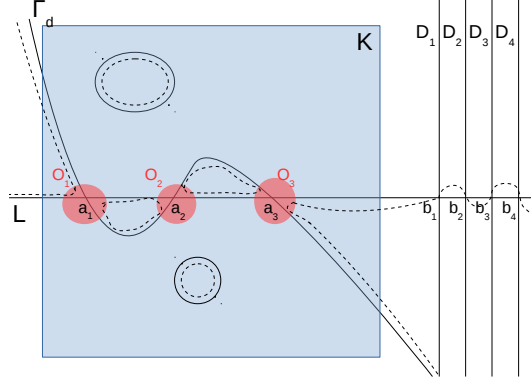


FIGURE 4. Contrôle de la perturbation sur un compact pour le degré 3. Le compact K utilisé contient les points a_i ainsi que les ovales de $\Gamma_d L$. Les ouverts O_i sont les boules sur lesquelles la perturbation élimine les points singuliers. En pointillés, la nouvelle courbe perturbée avec des ovales lisses qui apparaissent dans les Ω_i .

Démonstration. Γ étant localement un graphe en tout point, $K \cap \Gamma$ est compact et possède un nombre fini de composantes connexes qui sont à distance strictement positives deux à deux. Notons C_1, \dots, C_n ces composantes connexes. On a alors $d = \min_{i \neq j} (d(C_i, C_j)) > 0$. On peut donc considérer n ouverts $U_1 \dots U_n$ tels que

$$\forall i \in \{1 \dots n\}, C_i \subset U_i \text{ et } \forall i, j | i \neq j, U_i \cap U_j = \emptyset.$$

Par le lemme 25, en considérant pour tout i le compact $K_i = K \setminus \bigcup_{j \neq i} U_j$, on a l'existence, pour chaque i , d'un $\epsilon_i > 0$ tel que si $|t| < \epsilon_i$, la courbe $(f + th)^{-1}(\{0\}) \cap K_i$ est connexe et reste dans U_i . On pose alors $\epsilon = \min_{i \in \{1 \dots n\}} (\epsilon_i)$. A l'extérieur de U , les signes de f et $f + th$ sont les mêmes, il n'y a donc pas d'autre lieu d'annulation qui apparaît. Ainsi, $\Gamma \cap K$ et $(f + th)^{-1}\{0\} \cap K$ ont bien le même nombre de composantes connexes. \square

Dans notre contexte, on se place sur un compact K contenant les points a_i dans son intérieur, ainsi que tous les ovales de $\Gamma_d L$. En chaque a_i , on applique le lemme 22 et on obtient un voisinage de a_i que l'on appelle O_i . On considère alors la courbe $\Gamma_d L \setminus \bigcup_{i=1}^d O_i$ dans K . La situation est illustrée en figure 4. Elle vérifie bien les hypothèses du lemme 26, donc les ovales lisses de $\Gamma_d L$ restent des ovales lisses après perturbation.

On rappelle que les ovales Ω_i sont ceux formés par $\Gamma_d L$ entre les points a_i et a_{i+1} et qu'ils sont non lisses. On appelle Ω_i^{int} la composante connexe de $P(\mathbb{R}^3) \setminus \Omega_i$ homéomorphe à un disque. Il reste maintenant à montrer que l'on peut choisir ϵ du bon signe pour avoir au moins une composante connexe de Γ_{d+1} dans chaque Ω_i^{int} . Si c'est le cas, grâce à la majoration montrée dans la partie précédente, on aura bien Γ_{d+1} avec $g(d+1) + 1$ composantes connexes. Pour obtenir ce résultat, il faut que le signe de $\Gamma_d L$ soit le même dans tous les Ω_i .

Lemme 27. *Avec ces notations, le signe de $\Gamma_d L$ est constant sur chaque Ω_i^{int} et est le même dans tous les Ω_i^{int} .*

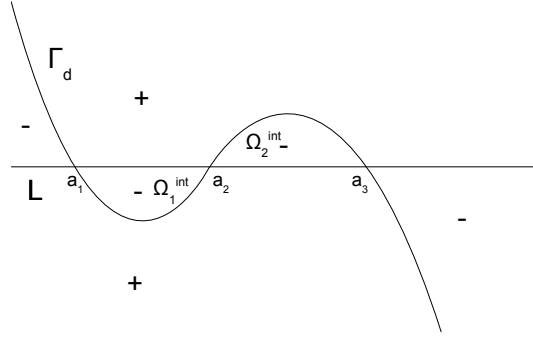


FIGURE 5. Signe de $\Gamma_d L$. On voit que quand on traverse L ou Γ_d , le signe de $\Gamma_d L$ change, donc sur les Ω_i^{int} , c'est le même.

Démonstration. Par construction, Ω_i^{int} est connexe et ne possède pas de point d'annulation de $\Gamma_d L$. Donc $\Gamma_d L$ est de signe constant sur chaque Ω_i^{int} . Soit a un point régulier de $\Gamma_d L$. Comme $\Gamma_d L(a) = 0$ et $d(\Gamma_d L)|_a$ est non nulle, $\Gamma_d L$ change de signe au voisinage de a . Soient alors p dans un certain Ω_i^{int} avec $i < d-1$ et q dans Ω_{i+1}^{int} . On peut relier p et q par un arc qui intersecte Γ_d une seule fois et L une seule fois. Cela est dû au fait que Γ_d vérifie la propriété (3). Ainsi, $\Gamma_d L$ change deux fois de signe en suivant cet arc, donc les signes sont égaux en p et q . Par itération, le signe de $\Gamma_d L$ est le même dans chaque Ω_i^{int} . \square

Proposition 28. Avec ces notations, on peut trouver ϵ tel que $\epsilon \prod_{k=1}^{d+1} D_k$ soit de signe opposé à $\Gamma_d L$ dans les Ω_i^{int} et ϵ assez petit pour que si $|t| < \epsilon$ et t du même signe que ϵ , alors la courbe $\Gamma_d L + t \prod_{k=1}^{d+1} D_k$ possède exactement un ovale lisse dans chaque Ω_i^{int} .

Démonstration. Le lemme 27 dit que le signe de $\Gamma_d L$ est le même dans tous les Ω_i^{int} . Ainsi, on peut choisir le signe de ϵ comme demandé. On note $h = \prod_{k=1}^{d+1} D_k$ pour simplifier les notations. Si on a $\Gamma_d L$ négatif dans un Ω_i^{int} et qu'on le perturbe par ϵh positif sur cet ovale, la courbe $\Gamma_d L + \epsilon h = 0$ correspond à $\Gamma_d L = -\epsilon h$. De cette manière, si ϵ est suffisamment proche de zéro, la courbe $\Gamma_d L + \epsilon h = 0$ possèdera au moins une composante connexe dans chaque Ω_i^{int} . Ainsi, Γ_{d+1} possèdera au moins $g(d)$ ovales provenant de Γ_d , $d-1$ ovales dans les Ω_i^{int} et une composante qui intersecte L car on sait déjà que Γ_{d+1} vérifie la propriété (2). Comme $g(d) + (d-1) + 1 = g(d+1) + 1$, grâce à la majoration, Γ_{d+1} ne peut pas contenir plus d'une composante connexe dans chaque Ω_i^{int} . \square

Ainsi, Γ_{d+1} vérifie la propriété (1).

Il reste à montrer que Γ_{d+1} vérifie les propriétés (3) et (4). On rappelle que Γ_{d+1} intersecte transversalement L en $d+1$ points distincts appelés b_j . On rappelle également que les b_j sont les points d'intersection de L et de $d+1$ polynômes $D_j = X - b_j$.

Pour montrer que Γ_{d+1} vérifie la propriété (3), on peut remarquer que Γ_{d+1} ne peut pas intersecter L en d'autres points que les b_j . En effet, si un point p vérifie

$$\Gamma_{d+1}(p) = \Gamma_d L(p) + \epsilon \prod_{j=1}^{d+1} D_j(p) = 0 \text{ et } L(p) = 0 \text{ alors forcément il existe un } j$$

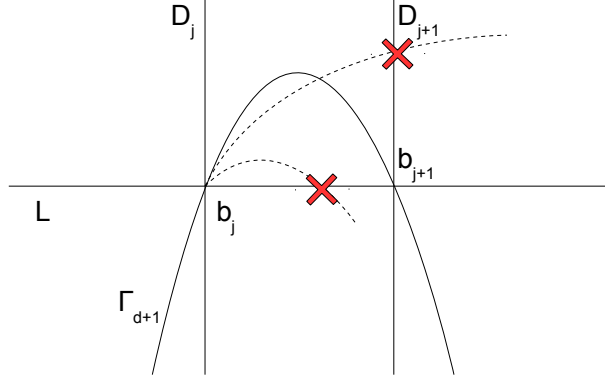


FIGURE 6. La seule possibilité pour que Γ_{d+1} intersecte L ou D_{j+1} est de passer par b_{j+1} .

tel que $D_j(p) = 0$ donc $p = b_j$. De plus, on sait que, quitte à réordonner les b_j , l'intervalle $[b_1, b_{d+1}]$ de L ne contient aucun point a_i . Ainsi, sur cet intervalle, Γ_d n'intersecte pas L . On peut donc choisir ϵ assez petit pour que Γ_{d+1} n'intersecte pas Γ_d sur le segment $[b_1, b_{d+1}]$ de Γ_{d+1} . Dans ce cas, si Γ_{d+1} intersecte un D_j , il l'intersecte forcément en b_j . La situation est illustrée en figure 6. Ainsi, Γ_{d+1} vérifie la propriété (3). Comme il n'y a qu'une composante connexe de Γ_{d+1} qui intersecte L , la réunion des intervalles $[b_j, b_{j+1}]$ de L et Γ_{d+1} forme un ovale pour chaque $j \leq d$. Ainsi, Γ_{d+1} vérifie la propriété (4), ce qui est le résultat attendu.

5. AU DELÀ DU THÉORÈME

5.1. Disposition des ovals.

Le théorème de Harnack ne donne aucune information sur la disposition possible des ovals d'une courbe algébrique. Ce problème de géométrie est bien connu sous le nom de 16^{ème} problème de Hilbert. Pour l'étudier, on peut définir les notions suivantes :

Définition 29. Soit Γ une courbe algébrique, Ω_1 et Ω_2 deux ovals de Γ . On dit que Ω_2 est *imbriqué* dans Ω_1 s'il est contenu dans l'intérieur de ce dernier.

Définition 30. Soit Γ une courbe algébrique et Ω un ovale de Γ . La *profondeur* de Ω est le nombre d'ovals de Γ imbriqués dans Ω .

Le théorème de Bézout donne certaines restrictions sur les imbrications possibles des ovals.

Proposition 31. Soit Γ une courbe de degré 4 possédant au moins 3 ovals. Alors Γ ne peut pas contenir d'imbrication.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux ovals Ω_1 et Ω_2 tels que Ω_1 imbriqué dans Ω_2 . Considérons une droite L passant par l'intérieur de Ω_1 et par l'intérieur d'un autre ovale Ω_3 de Γ . Alors on a $I(\Gamma, L) \geq 6$, ce qui contredit le théorème de Bézout. Donc Γ ne peut pas contenir d'imbrication. \square

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 32. Soit Γ de degré d , et $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ des ovals de Γ tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \Omega_i \text{ est imbriqué dans } \Omega_{i+1}.$$

Alors $n \leq \frac{d}{2}$.

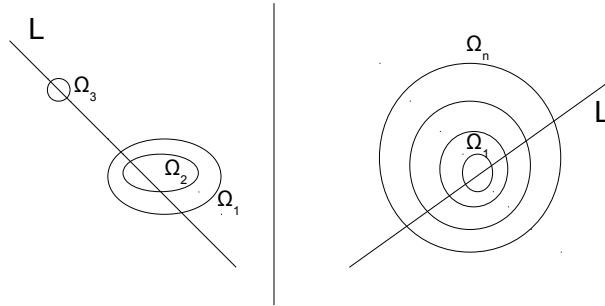


FIGURE 7. Exemples de restriction dues au théorème de Bézout. À gauche, les ovals appartiennent à une courbe de degré 4, L intersecte alors cette courbe au moins 6 fois. À droite, les ovals appartiennent à une courbe de degré d . On voit alors que dans cette disposition, la droite L intersecte deux fois chaque ovale, donc intersecte la courbe au moins $2n$ fois.

Démonstration. Supposons $n > \frac{d}{2}$. Considérons alors L une droite passant dans l'intérieur de Ω_1 . Alors on a $I(\Gamma, L) > d$, ce qui contredit le théorème de Bézout. \square

Les propositions 31 et 32 sont illustrées en figure 7.

RÉFÉRENCES

- [1] Benedetti and Risler. *Real algebraic and semi algebraic sets*. Hermann, 1990.
- [2] Robert Bix. *Conics and cubics : a concrete introduction to algebraic curves*. Springer, 1998.
- [3] Bochnak, Coste, and Roy. *Real algebraic geometry*. Springer, 1998.
- [4] Axel Harnack. Ueber die vieltheiligkeit der ebenen algebraischen curven. jan 1876.