

UNIVERSITÉ GRENOBLE-ALPES

INSTITUT FOURIER

RAPPORT DE TRAVAIL D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Petit et grand théorèmes de Picard, le point de vue géométrique

Auteur :
Anthony FORESE

Enseignante encadrante :
Agnès COQUIO



FIGURE 1 – Charles Émile Picard, 24 Juillet 1856 - 11 Décembre 1941

Mai 2019

Table des matières

Introduction	2
1 Introduction aux notions de géométrie complexe	3
1.1 Outils de base	3
1.2 Notions sur les homographies et les inversions	4
2 Le disque de Poincaré, point de vue géométrique	12
3 Petit et grand théorème de Picard par le point de vue géométrique	20
3.1 Courbure complexe et application au petit théorème de Picard	20
3.2 Familles normales, métrique sphérique et grand théorème de Picard	27

Introduction

Petit théorème de Picard

Soit f une fonction entière à valeurs dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. On suppose que $\mathbb{C} \setminus U$ contient au moins deux points. Alors f est constante.

Le petit théorème de Picard est seulement un cas particulier du grand. On parle généralement du « Théorème de Picard » lorsque l'on a besoin de ce résultat en analyse complexe mais on cite le grand théorème de Picard ci-dessous qui est le théorème original énoncé et démontré par Émile Picard.

Grand théorème de Picard

Soit $U = D'(0, \alpha) = D(0, \alpha) \setminus \{0\}$ et soit f une fonction holomorphe sur U qui admet une singularité essentielle en 0. Alors si V est un voisinage ouvert de 0 inclus dans U ,

$$f(V) \supseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$$

pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$.

Le grand théorème de Picard a été démontré pour la première fois par Émile Picard lui même en 1880. C'est un théorème important de l'analyse complexe, il montre bien que les fonctions à variables complexes et plus particulièrement les fonctions holomorphes ont un comportement très différent des fonctions à variables réelles. Il est possible de le démontrer seulement avec les résultats classiques de l'analyse complexe. La démonstration originale n'utilisait d'ailleurs que les méthodologies classiques de l'analyse complexe. Mais cette démonstration est assez difficile puisqu'elle nécessite la construction d'une fonction du demi plan complexe surpérieur à valeurs dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Cette fonction est appelée *fonction elliptique modulaire* et est utilisée dans plusieurs domaines de l'analyse.

L'approche géométrique de cette démonstration dont nous allons parler est à la fois plus simple et plus naturelle une fois les nouveaux concepts introduits. De plus il n'est pas nécessaire d'avoir de grandes connaissances en géométrie complexe, ni même en géométrie euclidienne. Nous devons cette approche à Lars Valerian Ahlfors (1907 - 1996) qui a été le premier à voir le lemme de Schwarz comme une inégalité sur les courbures. Ce nouveau point de vue s'est rapidement développé et permet maintenant d'offrir de nouvelles démonstrations à des théorèmes classiques d'analyse complexe.

Dans ce rapport, nous commencerons par définir les outils principaux dont nous aurons besoin. Puis nous allons énoncer quelques résultats de la géométrie complexe dont nous allons avoir besoin pour certaines démonstrations plus tard. Ces résultats concernent notamment les homographies, les transformations de Möbius, les inversions et la sphère de Riemann.

Pour nous familiariser un peu plus avec ces nouvelles notions nous nous concentrerons sur l'étude des propriétés géométriques et topologiques du disque de Poincaré D muni de la métrique de Poincaré ρ .

Dans la dernière section nous définirons la notion de courbure. Cette définition et les propriétés qui en découlent nous conduiront au lemme de Schwarz vu par Ahlfors. En précisant les notations dans ce lemme on peut démontrer le théorème de Liouville du point de vue géométrique qui nous dit qu'une fonction holomorphe, à valeurs dans un ouvert muni d'une métrique de courbure majorée par une constante négative, est constante. Il ne restera donc plus qu'à trouver une telle métrique pour prouver le petit théorème de Picard. Pour la démonstration du grand théorème de Picard, nous allons introduire la notion de famille normale qui va naturellement nous amener à parler du théorème d'Ascoli et du théorème de Montel. Puis en définissant les familles normales sur la sphère de Riemann et en utilisant les quelques propriétés démontrées dans la section 1 nous arriverons à démontrer le grand théorème de Picard.

Les démonstrations proposées s'appuient sur [1] pour la section qui concerne les homographies et sur [2] pour les sections 2 et 3.

Notation.

Le disque unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sera noté D .

Prérequis.

Il sera admis que le cours de fonctions holomorphes du premier semestre de M1 mathématiques générales de l'année scolaire 2018 - 2019 donné à l'Institut Fourier de Grenoble est connu. On pourra donc utiliser tous les théorèmes, lemmes, propriétés et résultats qui y ont été énoncés et démontrés sans avoir à nouveau à les démontrer.

1 Introduction aux notions de géométrie complexe

1.1 Outils de base

Nous allons définir dans cette partie les outils mathématiques de base qui vont nous permettre d'étudier la géométrie complexe.

Tout d'abord nous allons définir la notion de métrique que nous allons utiliser.

Définition 1.1 Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Une *métrique* sur Ω est une fonction ρ qui est positive sur Ω et \mathcal{C}^2 sur $\{z \in \Omega : \rho > 0\}$.

Si $z \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{C}$ un vecteur on définit la longueur de ξ en z par

$$\|\xi\|_{\rho,z} = \rho(z) \cdot |\xi|.$$

Exemple. Soit $\Omega = D$, le disque unité. Pour tout $z \in D$, on pose

$$\rho(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

qui définit une métrique appelée *métrique de Poincaré*. Cette métrique sera un outil important dans la démonstration du théorème de Picard.

Avec la géométrie dans le plan complexe vient naturellement l'utilisation de chemins et de lacets. Ainsi nous définissons

Définition 1.2 Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et ρ une métrique sur Ω . Si

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$$

est un lacet continuellement différentiable, on définit sa *longueur pour la métrique ρ* par

$$l_\rho(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\rho,\gamma(t)} dt.$$

On peut ainsi définir la distance entre deux points.

Définition 1.3 Soient P et Q deux points de Ω . La distance de P à Q pour la métrique ρ est définie par

$$d_\rho(P, Q) = \inf\{l_\rho(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}_\Omega(P, Q)\}$$

où $\mathcal{C}_\Omega(P, Q)$ est l'ensemble des chemins continus et différentiables de P vers Q .

Puis pour finir deux définitions qui nous seront utiles pour quelques propriétés qui vont nous faciliter le travail.

Définition 1.4 Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts connexes et

$$f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

une fonction \mathcal{C}^3 avec des zéros isolés.

Soit ρ une métrique sur Ω_2 . On définit la métrique image de ρ par f par

$$f * \rho(z) = \rho(f(z)) \cdot \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z) \right|.$$

Remarque. Comme on prend f suffisamment régulière, c'est une métrique sur Ω_1 .

Définition 1.5 Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts connexes et

$$f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$$

une fonction \mathcal{C}^1 surjective.

f est une *isométrie* de la paire (Ω_1, ρ_1) avec la paire (Ω_2, ρ_2) si $\forall z \in \Omega_1$

$$f * \rho_2(z) = \rho_1(z).$$

1.2 Notions sur les homographies et les inversions

On se placera ici sur $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Le but de cette partie est d'étudier les homographies : leurs propriétés géométriques et comment elles agissent, notamment sur les droites et les cercles. Nous ferons aussi un bref détour sur la sphère de Riemann et quelques propriétés géométriques à son sujet.

Définition 1.6 Une *homographie* sur $\hat{\mathbb{C}}$ est une fonction f de $\hat{\mathbb{C}}$ dans $\hat{\mathbb{C}}$

$$f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifiant $ad - bc \neq 0$.

Remarque. Si $ad - bc = k \in \mathbb{C}$, quitte à diviser a, b, c et d par \sqrt{k} , on peut supposer $ad - bc = 1$ sans changer la fonction f . (On écrit $k = |k|e^{i\theta}$, une racine carrée est donc $\sqrt{|k|}e^{i\theta/2}$).

Remarque. f est définie comme une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} avec en plus $f(\infty) = \frac{a}{c}$ et $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.

On va maintenant décrire la forme canonique d'une homographie qui vérifie $c \neq 0$. Cette forme peut être utile pour certains calculs.

Propriété 1.1 Si f est une homographie telle que $c \neq 0$ alors il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tels que $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \gamma + \frac{\alpha}{z + \beta}.$$

Démonstration. On prend $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $c \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{c \, az+b}{c \, cz+d} \\ &= \frac{acz+bc+ad-ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{a(cz+d)+bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \end{aligned}$$

On a donc ici $\alpha = \frac{bc-ad}{c^2}$; $\beta = \frac{d}{c}$; $\gamma = \frac{a}{c}$. □

Remarque. Si on a $ad - bc = 0$ alors la fonction est constante. En effet, deux cas se présentent.

- Si $c = 0$ alors $ad = 0$. Soit $d = 0$ et $f \equiv \infty$, soit $a = 0$ et $f \equiv \frac{b}{d}$.
- Si $c \neq 0$ on peut écrire $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \frac{1}{z+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}.$$

On déduit immédiatement de la propriété précédente

Propriété 1.2 Les homographies sont engendrées par les similitudes et $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Démonstration. La propriété précédente nous dit qu'une homographie est la composée de $z \mapsto z + \beta$ avec $z \mapsto \frac{1}{z}$ et $z \mapsto \gamma + \alpha z$. □

Essayons maintenant de caractériser les homographies. On a le théorème suivant qui nous sera utile pour la démonstration d'un théorème un peu plus loin.

Théorème 1.1 Les homographies non constantes sont entièrement déterminées par les images de 3 points.

Démonstration. Constatons dans un premier temps que les homographies forment un groupe pour la loi de composition. En effet

- La bijection réciproque d'une homographie est une homographie. Soit $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ on voit par le calcul que $f^{-1} : z \mapsto \frac{-dz+b}{cz-a}$ est bien la bijection réciproque de f et c'est une homographie.
- Soient f et g deux homographies définies par

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

et

$$g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}.$$

On a $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned}
f \circ g(z) &= \frac{a \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} \\
&= \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + c'd)z + (cb' + dd')}
\end{aligned}$$

La composition de deux homographies est bien une homographie.

Il reste à voir que pour n'importe quel triplet de points distincts $u, v, w \in \hat{\mathbb{C}}$ il existe une unique homographie qui envoie respectivement u, v, w sur $0, 1, \infty$.

On suppose donc $f(u) = 0, \quad f(v) = 1, \quad f(w) = \infty$.

On a les résultats suivants dans le cas où ni u , ni v , ni w ne vaut ∞ .

$$\frac{au + b}{cu + d} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -au$$

$$\frac{av + b}{cv + d} = 1 \quad \Rightarrow \quad av + b = cv + d$$

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \infty \quad \Rightarrow \quad d = -cw$$

On a donc $a = c \frac{v-w}{v-u}, \quad b = c \frac{w-v}{v-u} u, \quad d = -cw$. Puis par l'identité $ad - bc = 1$ on trouve

$$c^2 = -\frac{v-u}{(v-w)(w-u)}.$$

On choisit l'une des racines carrées de c , peu importe le signe, cela ne changera pas la fonction f et on trouve les coefficients a, b et d .

Si $u = \infty$, on peut prendre $f(z) = \frac{v-w}{z-w}$

Si $v = \infty$, on peut prendre $f(z) = \frac{z-u}{z-w}$

Si $w = \infty$, on peut prendre $f(z) = \frac{z-u}{v-u}$

Ces trois derniers cas nous donnent l'existence et il suffit de diviser par la bonne constante pour avoir $ad - bc = 1$ et avoir l'unicité.

On a donc existence et unicité d'une telle homographie. □

Remarque. L'unicité ne nous sera pas utile pour la suite.

Il nous reste encore une propriété géométrique intéressante à démontrer. Comme on va plus tard étudier des disques et des cercles, on aimerait savoir comment agissent les homographies sur l'ensemble $\{\text{droites}, \text{cercles}\}$. Voici ce que nous dit la propriété suivante.

Propriété 1.3 Les homographies envoient l'ensemble $\{\text{droites}, \text{cercles}\}$ sur l'ensemble $\{\text{droites}, \text{cercles}\}$.

Démonstration. On a dans la propriété 1.2 que les homographies sont engendrées par les similitudes et les inversions. Il est évident que les similitudes stabilisent l'ensemble $\{\text{droites}, \text{cercles}\}$. Mais qu'en est-il des inversions ?

Considérons la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$. Elle a le même effet sur l'ensemble $\{\text{droites}, \text{cercles}\}$ que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ car la fonction $z \mapsto \bar{z}$ est une symétrie d'axe Ox donc elle laisse les droites et les cercles invariants. On voit dans un premier temps que l'image par f d'une droite passant par l'origine est cette même droite. Considérons une droite ne passant pas par l'origine.

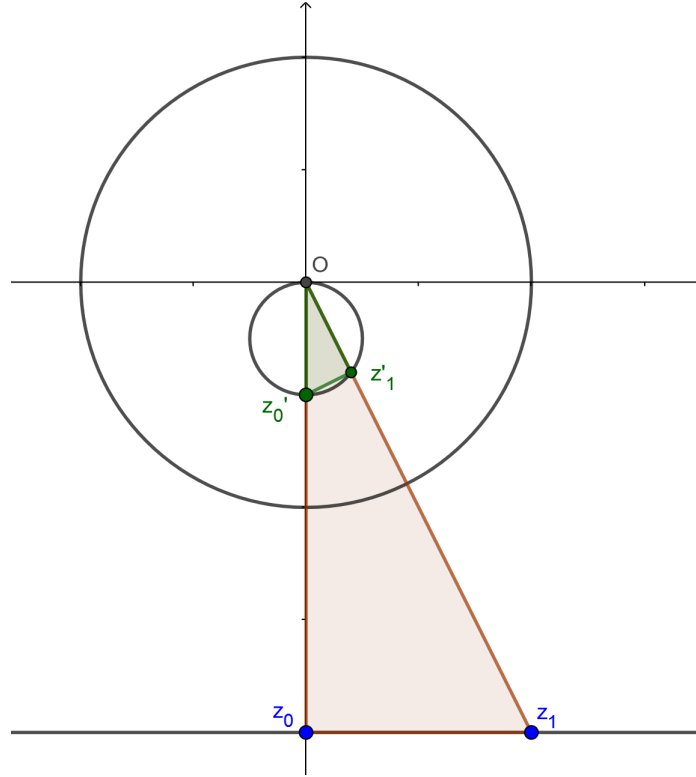


FIGURE 2 – Image par f d'une droite

Appuyons nous sur ce dessin pour faire montrer que $f(\text{droite}) = \text{cercle}$. On note (L) la droite à étudier et on suppose qu'elle ne passe pas par l'origine. Soit z_0 le projeté orthogonal de O sur la droite (L) et soit $z_1 \in (L)$ distinct de z_0 . On note $z'_0 = f(z_0)$ et $z'_1 = f(z_1)$. On a par le calcul

$$\left| \frac{z'_1}{z_0} \right| = \left| \frac{1}{z_0 z_1} \right| = \left| \frac{z'_0}{z_1} \right|.$$

Mais aussi

$$\left| \frac{z'_0 - z'_1}{z_0 - z_1} \right| = \left| \frac{\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_1}}{z_0 - z_1} \right| = \left| \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{\bar{z}_0 \bar{z}_1 (z_0 - z_1)} \right| = \left| \frac{1}{z_0 z_1} \right|.$$

Ceci montre que les triangles $z'_0 O z'_1$ et $z_1 O z_0$ sont semblables et donc on a l'égalité sur les angles suivante

$$\widehat{O z'_1 z'_0} = \widehat{O z_0 z_1}.$$

Ainsi, pour tout $z_1 \in (L)$, le triangle $z'_0 O z'_1$ est rectangle en z'_1 . Ceci montre que l'image par f d'une droite est un cercle de centre $\frac{z_0}{2|z_0|^2}$ et de rayon $R = \frac{1}{2|z_0|}$.

Il reste à chercher l'image par f d'un cercle ne passant pas par l'origine.

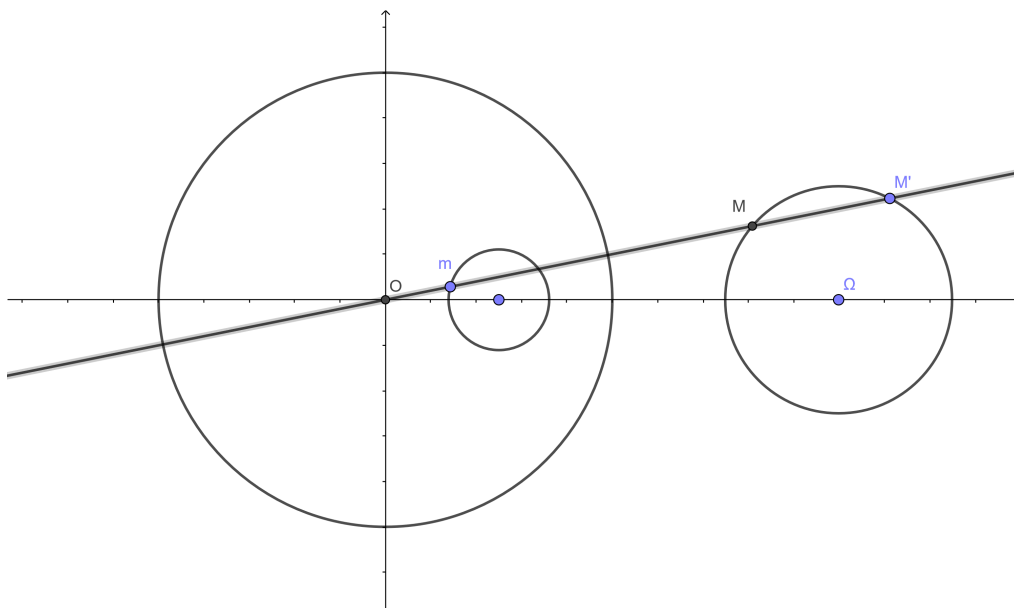


FIGURE 3 – Image par f d'un cercle ne passant pas par l'origine

Soit \mathcal{C} un tel cercle. On note Ω son centre et R son rayon. On introduit la *puissance du cercle \mathcal{C} par rapport au point O* notée p et définie par

$$p = O\Omega^2 - R^2.$$

On a de plus pour toute droite passant par O et coupant le cercle \mathcal{C} en deux points notés M et M' l'égalité suivante.

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = p.$$

En effet, on a en utilisant le théorème de Pythagore et en notant I le milieu de $[M, M']$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}) \cdot (\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{IM}) \\ &= OI^2 - IM^2 \\ &= O\Omega^2 - \Omega I^2 - R^2 + I\Omega^2 \\ &= O\Omega^2 - R^2. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $m = f(M')$ est l'image de M par l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{1}{p}$. On a

$$\overrightarrow{Oh(M)} \cdot \frac{\overrightarrow{OM'}}{|OM'|} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}} \cdot \frac{\overrightarrow{OM'}}{|OM'|} = \frac{1}{|OM'|}.$$

Ainsi, comme les vecteurs sont collinéaires

$$\overrightarrow{Oh(M)} = \frac{\overrightarrow{OM'}}{|OM'|^2} = \overrightarrow{Of(M')}.$$

On en déduit, $h(M) = f(M') = m$.

Ainsi $f(\mathcal{C}) = h(\mathcal{C})$ qui est le cercle de centre $h(\Omega)$ et de rayon $\frac{R}{p}$.

□

Remarque. Pour la dernière partie de la démonstration le même raisonnement fonctionne encore si $M = M'$.

Parlons maintenant plus précisément de la sphère de Riemann. On considère la sphère \mathbb{S}^2 de \mathbb{R}^3 , de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 1.

Definition 1.7 On appelle *projection stéréographique* l'application

$$p : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(a, b, c) \mapsto \frac{1}{1-c} \cdot (a + ib).$$

L'application inverse est donnée par

$$p^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$$

$$a + ib \mapsto \left(\frac{2a}{1+a^2+b^2}, \frac{2b}{1+a^2+b^2}, 1 - \frac{2}{1+a^2+b^2} \right).$$

Remarques. Si $c = 1$ on a $a = b = 0$ et donc le point $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ s'envoie sur le point ∞ par la projection stéréographique. De plus si $a + ib = \infty$, la projection inverse de $a + ib$ est $(0, 0, 1)$. La sphère de Riemann est l'image par la projection stéréographique de \mathbb{S}^2 .

On aimerait, pour une démonstration un peu plus tard, définir une métrique sur $\hat{\mathbb{C}}$. Pour cela on va partir de \mathbb{S}^2 que l'on connaît déjà bien et essayer de construire une distance sur $\hat{\mathbb{C}}$ qui corresponde à l'image par la projection stéréographique de la distance sur \mathbb{S}^2 . Pour bien différencier, on notera par un d les distances sur la sphère de Riemann et par un δ les distances sur la sphère \mathbb{S}^2 .

On a deux notions de distance sur \mathbb{S}^2 : la distance euclidienne et la distance sphérique. On considère deux points distincts $A = (a_1, b_1, c_1)$ et $B = (a_2, b_2, c_2)$ de \mathbb{S}^2 , on note $z_A = p(A)$ et $z_B = p(B)$.

On va d'abord s'intéresser à la distance sphérique de \mathbb{S}^2 . Cette distance est la longueur d'une géodésique reliant les deux points. Ces géodésiques sont les arcs de grands cercles passant par les deux points. Si les points sont antipodaux, il existe une infinité de grands cercles possibles et les deux arcs reliant les points sont de même longueur. Sinon on prend le plus court des deux arcs du grand cercle passant par les deux points. Si on note θ l'angle entre \vec{OA} et \vec{OB} , on a

$$\delta(A, B) = \theta.$$

Essayons donc de calculer θ . On remarque que $c_i = \frac{|z_i|^2 - 1}{1 + |z_i|^2}$ et $1 - c_i = \frac{2}{1 + |z_i|^2}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \cos(\theta) \\ &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \\ &= (1 - c_1)(1 - c_2) \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + c_1 c_2 \end{aligned}$$

Puis on utilise l'identité $\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\theta)}{1 + \cos(\theta)}$ en remplaçant $\cos(\theta)$ par sa valeur et on trouve

$$\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{|z_1 - z_2|^2}{|1 + z_1 \bar{z}_2|^2}$$

d'où

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{|z_1 - z_2|}{|1 + z_1 \bar{z}_2|} \right).$$

On choisit de définir la métrique sur la sphère de Riemann ainsi. Pour tout $z \in \hat{\mathbb{C}}$

$$\tau(z) = \frac{2}{1 + |z|^2}.$$

Vérifions que cette métrique correspond bien à la notion de distance que nous venons de trouver.

Commençons par le cas où $P = 0$ et $Q = R + 0i \in \mathbb{R}$.

Si on a un chemin reliant P à Q , $\gamma : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned} l_\tau(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\tau, \gamma(t)} dt \\ &= \int_0^1 \tau(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1 + |\gamma(t)|^2} dt \\ &\geq 2 \int_0^1 \frac{\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle}{|\gamma(t)|(1 + |\gamma(t)|^2)} dt \\ &= [\arctan |\gamma(t)|]_0^1 \\ &= 2 \arctan(R). \end{aligned}$$

Passons au cas général. En admettant que les automorphismes de $\hat{\mathbb{C}}$ sont les homographies $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$, on a $\forall z \in \hat{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} \tau * h(z) &= \frac{2}{1 + \left| \frac{az+b}{cz+d} \right|^2} \cdot \frac{|ad - bc|}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{2|ad - bc|}{|cz + d|^2 + |az + b|^2} \\ &= \frac{2|ad - bc|}{(1 + |z|^2)|ad - bc|} \quad (*) \\ &= \frac{2}{1 + |z|^2} \\ &= \tau(z). \end{aligned}$$

Pour trouver (*) on a besoin de remplir les conditions

$$\begin{cases} |c|^2 + |a|^2 &= |ad - bc| \\ |b|^2 + |d|^2 &= |ad - bc| \\ \operatorname{Re}(c\bar{d} + a\bar{b}) &= 0 \end{cases}$$

ce qui est vérifié si $c = -\bar{b}$ et $d = \bar{a}$.

On choisit $h : z \mapsto \frac{z-P}{1+\bar{P}z}$ qui envoie P sur 0 et on obtient

$$\begin{aligned} d_\tau(P, Q) &= d_\tau(h(P), h(Q)) \\ &= d_\tau\left(0, \frac{Q-P}{1+\overline{PQ}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi on peut calculer directement

$$d_\tau(P, Q) = d_\tau(0, |h(Q)|) = d_\tau\left(0, \left|\frac{Q-P}{1+\overline{PQ}}\right|\right) = 2 \arctan\left(\left|\frac{Q-P}{1+\overline{PQ}}\right|\right).$$

Ceci explique le choix de la métrique τ .

Parlons maintenant de la distance euclidienne entre deux points A et B de la sphère. Cette distance vaut sur la sphère $\delta(A, B) = 2 \sin(\frac{\theta}{2})$. Elle est associée à la distance sur la sphère de Riemann définie par $d(A, B) = \frac{2|z_A - z_B|}{\sqrt{1+|z_A|^2}\sqrt{1+|z_B|^2}}$. On en déduit par concavité du sinus et par comparaison entre la distance euclidienne et la distance sphérique, l'inégalité suivante

$$\frac{2}{\pi}\theta \leq d(A, B) \leq \theta.$$

Puis en projetant sur la sphère de Riemann on obtient

$$\theta \leq \frac{\pi}{2}d(A, B) \leq \pi|z_A - z_B|.$$

Pour résumer, on a

- Distance sphérique :

$$d_\tau(z_1, z_2) = 2 \arctan\left(\frac{|z_1 - z_2|}{|1 + z_1\overline{z_2}|}\right) \quad d_\tau(z_1, \infty) = 2 \arctan\left(\frac{1}{|z_1|}\right).$$

- Distance euclidienne :

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}} \quad d(z_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}.$$

- L'inégalité sur les distances :

$$\frac{2}{\pi}d_\tau(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_2) \leq d_\tau(z_1, z_2).$$

2 Le disque de Poincaré, point de vue géométrique

Dans cette partie, nous allons étudier les propriétés du disque de Poincaré $D \subset \mathbb{C}$. Plus précisément, nous allons manipuler la métrique de Poincaré vue précédemment dont nous rappelons la définition.

Définition 2.1 Soit D le disque unité. On définit une métrique sur cet ensemble appelée *métrique de Poincaré* par

$$\rho(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Nous allons avoir besoin dans cette partie d'une propriété qui caractérise les bijections de D pour pouvoir étudier plus facilement sa structure.

On rappelle qu'une *transformation de Möbius* sur le disque D , généralement notée ϕ_a pour un certain nombre complexe a de module strictement inférieur à 1, est définie par

$$\phi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

Une *rotation d'angle* τ est généralement notée ρ_τ pour un certain nombre réel τ et est définie par

$$\rho_\tau(z) = z \cdot e^{i\tau}.$$

On a donc la propriété suivante dans le disque de Poincaré.

Propriété 2.1 Soit $f : D \rightarrow D$ une bijection. Alors f est la composée d'une transformation de Möbius notée ϕ_a et d'une rotation d'angle τ notée ρ_τ .

Démonstration. On voit qu'une rotation d'angle τ est une bijection de D dans D et que son inverse est la rotation d'angle $-\tau$. Vérifions maintenant qu'une transformation de Möbius est une bijection de D dans D . Soit $a \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1 et soit ϕ_a la transformation de Möbius associée. Soit $z \in D$, on a

$$\begin{aligned} |\phi_a(z)|^2 - 1 &= \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 - 1 \\ &= \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \cdot \frac{\bar{z} - \bar{a}}{1 - a\bar{z}} - 1 \\ &= \frac{|z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{a})}{1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{a})} - 1 \\ &= \frac{|z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \\ &= \frac{(1 - |a|^2)(|z|^2 - 1)}{|1 - \bar{a}z|^2} \\ &< 0. \end{aligned}$$

L'inégalité finale vient du fait que $|a| < 1$ et $|z| < 1$. De plus, on constate par le calcul que ϕ_a est bijective d'inverse ϕ_{-a} .

Avec ceci vérifié, on peut commencer à démontrer notre théorème. Soit f une fonction bijective de D dans D , on note $f^{-1}(0) = c$. On a

$$\begin{aligned}
f \circ \phi_{-c}(0) &= f(c) = 0 \\
|f \circ \phi_{-c}(z)| &\leq 1 \quad \forall z \in D \\
\phi_c \circ f^{-1}(0) &= \phi_c(c) = 0 \\
|\phi_c \circ f^{-1}(z)| &\leq 1 \quad \forall z \in D
\end{aligned}$$

Donc par le lemme de Schwarz, on a $\forall z \in D$

$$|f \circ \phi_{-c}(z)| \leq |z| \quad (1)$$

$$|\phi_c \circ f^{-1}(z)| \leq |z| \quad (2)$$

On applique (1) à $\tilde{z} = \phi_c \circ f^{-1}(z) \in D$ et on combine cela avec (2) appliqué en \tilde{z} et on obtient $\forall \tilde{z} \in D$

$$|\tilde{z}| \leq |\phi_c \circ f^{-1}(\tilde{z})| \leq |\tilde{z}|.$$

Et ainsi il existe λ un complexe de module 1 tel que $\forall z \in D$

$$\phi_c \circ f^{-1}(z) = \lambda z$$

donc

$$f = \frac{1}{\lambda} \cdot \phi_c.$$

□

Cela va être d'une grande aide pour l'étude de la structure de D puisqu'on aura seulement à se soucier des rotations et des transformations de Möbius dès qu'on aura à faire à des bijections. Cela sera au moins le cas lorsque l'on va étudier les isométries.

Propriété 2.2 Soit h une application conforme bijective de D dans D . Alors h est une isométrie de (D, ρ) avec (D, ρ) .

Démonstration. On sait par la propriété précédente que h est la composée d'une rotation et d'une transformation de Möbius. Il suffit donc de vérifier que cette propriété est vraie pour les rotations et les transformations de Möbius.

• Si h est une rotation, on écrit $h(z) = z \cdot \mu$ pour tout z dans D et pour un certain μ de module 1. On a donc $\forall z \in D$

$$h * \rho(z) = \frac{|h'(z)|}{1 - |h(z)|^2} = \frac{|\mu|}{1 - |z\mu|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2} = \rho(z).$$

• Si h est une transformation de Möbius, on note $h(0) = -a$ et donc $h(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ pour tout z dans D . On a donc $\forall z \in D$

$$|h'(z)| = \left| \frac{1 - \bar{a}z + \bar{a}(z-a)}{(1 - \bar{a}z)^2} \right| = \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2}$$

et donc

$$\begin{aligned}
h * \rho(z) &= \frac{1}{1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2} \cdot \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} \\
&= \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2} \\
&= \frac{1 - |a|^2}{1 - |z|^2 - |a|^2 + |a|^2|z|^2} \\
&= \frac{1}{1 - |z|^2} \\
&= \rho(z).
\end{aligned}$$

□

Avec cela nous pouvons calculer plus précisément la distance entre deux points de D pour la métrique de Poincaré ρ .

Propriété 2.3 Soient P et Q deux points de D . Alors la distance de P à Q pour la métrique de Poincaré est

$$d_\rho(P, Q) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{P-Q}{1-\bar{P}Q} \right|}{1 - \left| \frac{P-Q}{1-\bar{P}Q} \right|} \right).$$

Démonstration. • Première étape :

Commençons par le cas simple où $P = 0$ et $Q = R + 0i \in D \cap \mathbb{R}$.

D'une part, on a pour le chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ défini par $\gamma(t) = tR$,

$$\begin{aligned}
l_\rho(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\rho, \gamma(t)} dt \\
&= \int_0^1 \rho(tR) |R| dt \\
&= R \int_0^1 \frac{1}{1 - (tR)^2} dt \\
&= \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + tR}{1 - tR} \right) \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + R}{1 - R} \right).
\end{aligned}$$

D'autre part si on prend un chemin quelconque γ de 0 à R , on peut écrire $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, on a

$$\begin{aligned}
l_\rho(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_{\rho, \gamma(t)} dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1 - |\gamma(t)|^2} |\gamma'(t)| dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{|\gamma_1'(t)|}{1 - \gamma_1(t)^2} dt \\
&\geq \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{1 - \gamma_1(t)^2} dt \\
&\geq \int_0^R \frac{1}{1 - (s)^2} ds = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+R}{1-R} \right).
\end{aligned}$$

La dernière inégalité étant obtenue par changement de variable $s = \gamma_1(t)$.
Ceci montre que

$$d_\rho(0, R) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+R}{1-R} \right).$$

• Deuxième étape :

Si h est une application conforme bijective de D dans D , on a pour tout $\gamma \in \mathcal{C}_D(P, Q)$

$$\begin{aligned}
l_\rho(h \circ \gamma) &= \int_a^b \rho(h \circ \gamma(t)) \cdot |\gamma'(t) \cdot h'(\gamma(t))| dt \\
&= \int_a^b \rho * h(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt \\
&= \int_a^b \rho(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt \\
&= l_\rho(\gamma).
\end{aligned}$$

Donc on sait que si l'on applique une rotation ou une transformation de Möbius à P et Q simultanément, alors la distance est invariante.

• Troisième étape :

On a par la deuxième étape en appliquant la transformation de Möbius ϕ_P puis la rotation qui envoie $\phi_P(Q)$ sur $|\phi_P(Q)|$

$$d_\rho(P, Q) = d_\rho(0, \phi_P(Q)) = d_\rho(0, |\phi_P(Q)|).$$

Puis par la première étape on a directement le résultat

$$d_\rho(P, Q) = d_\rho(0, |\phi_P(Q)|) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |\phi_P(Q)|}{1 - |\phi_P(Q)|} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{P-Q}{1-\overline{P}Q} \right|}{1 - \left| \frac{P-Q}{1-\overline{P}Q} \right|} \right).$$

□

Parlons maintenant de la structure topologique du disque de Poincaré muni de sa métrique ρ . Voici quelques propriétés qui vont nous aider à comprendre la topologie de la paire (D, ρ) .

Propriété 2.4 La topologie induite par la métrique de Poincaré ρ sur le disque D est la topologie usuelle.

Démonstration. On va d'abord montrer que les boules pour la métrique de Poincaré centrées à l'origine sont des boules centrées à l'origine dans la topologie usuelle. On a pour $r > 0$

$$\begin{aligned}
& d_\rho(0, z) \leq r \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right) \leq r \\
\Leftrightarrow & \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \leq e^{2r} \\
\Leftrightarrow & 1 + |z| - e^{2r} + |z|e^{2r} \leq 0 \\
\Leftrightarrow & |z| \leq \frac{e^{2r} - 1}{e^{2r} + 1}.
\end{aligned}$$

En considérant ce calcul et la propriété 1.3, l'image par la transformation de Möbius ϕ_{z_0} de ces boules sont des boules. Plus précisément si on note B_ρ les boules du disque de Poincaré pour la distance d_ρ et $B_{|\cdot|}$ les boules euclidiennes de \mathbb{R}^2 , on a $B_\rho(z_0, r) = B_{|\cdot|}(\frac{1-R^2}{1-|z_0|^2 R^2} z_0, \frac{R(1-|z_0|^2)}{1-|z_0|^2 R^2})$ \square

Propriété 2.5 Le disque de Poincaré D muni de la métrique ρ est un espace métrique complet.

Démonstration. On se donne $(u_n)_n$ une suite de Cauchy pour la métrique de Poincaré ρ . Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N$ on a

$$d_\rho(u_n, u_m) \leq \varepsilon.$$

Ce qui donne par la propriété 2.3

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{u_n - u_m}{1 - \overline{u_n} u_m} \right|}{1 - \left| \frac{u_n - u_m}{1 - \overline{u_n} u_m} \right|} \right) \leq \varepsilon$$

i.e.

$$\frac{|u_n - u_m|}{2} \leq \left| \frac{u_n - u_m}{1 - \overline{u_n} u_m} \right| \leq \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{e^{2\varepsilon} + 1} \leq \frac{e^{2\varepsilon} - 1}{2}$$

et on en conclut donc en faisant un développement limité de $e^{2\varepsilon} - 1$ que

$$|u_n - u_m| \leq C \cdot \varepsilon$$

pour une certaine constante C positive.

Ceci montre que $(u_n)_n$ est de Cauchy dans \mathbb{C} qui est complet donc converge pour la distance euclidienne vers une limite notée u . On fait tendre m vers ∞ dans la première inégalité ce qui montre que $d_\rho(u_N, u) \leq \varepsilon$ donc $u \in D$. \square

Parlons maintenant de la géométrie dans le disque de Poincaré.

Propriété 2.6 Soient P et Q deux éléments de D . La courbe de longueur la plus courte ou géodésique reliant P à Q est $\forall t \in [0, 1]$,

$$\gamma_{P,Q}(t) = \frac{t \frac{Q-P}{1-\overline{P}Q} + P}{1 + t \overline{P} \cdot \frac{Q-P}{1-\overline{P}Q}}.$$

Démonstration. On se donne $\phi : z \rightarrow \frac{z-P}{1-\bar{P}z}$ une transformation de Möbius. On sait déjà que le plus court chemin reliant $\phi(Q)$ et $\phi(P) = 0$ est le chemin τ défini par $\tau(t) = t \cdot \phi(Q)$. On peut appliquer la transformation

$$\phi^{-1}(z) = \frac{z+P}{1+\bar{P}z}$$

à τ sans changer les distances puisque c'est la transformation de Möbius ϕ_{-P} . On a donc que $\phi^{-1} \circ \tau$ est le chemin le plus court reliant P à Q . Or $\phi^{-1} \circ \tau$ est exactement $\gamma_{P,Q}$. \square

Remarque. Les courbes $\gamma_{P,Q}$ sont en fait des arcs de cercles. En effet, si l'on prolonge le segment $[0, \phi(Q)]$ du disque D , sur le plan complexe on obtient une droite. Or on a vu dans la section précédente que l'image d'une droite par une transformation de Möbius est un cercle. Ici nous avons seulement un segment inclus dans la droite, donc par un argument de connexité on en déduit que $\gamma_{P,Q}$ est un arc de cercle.

Propriété 2.7 Soit σ une métrique sur D telle que toute application conforme de D soit en fait une isométrie de la paire (D, σ) avec la paire (D, σ) . Alors σ est un multiple de la métrique de Poincaré ρ .

Démonstration. Si on se donne $z_0 \in D$ alors l'application h définie par

$$h(z) = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}$$

est une isométrie. Donc on a en particulier

$$h * \sigma(0) = \sigma(0).$$

Ce qui donne

$$|h'(0)|\sigma(h(0)) = \sigma(0)$$

et donc en remplaçant $h(0) = z_0$ et en isolant $\sigma(z_0)$ on se retrouve avec

$$\sigma(z_0) = \frac{1}{|h'(0)|} \cdot \sigma(0) = \frac{1}{|1-|z_0|^2|} \cdot \sigma(0) = \rho(z_0) \cdot \sigma(0)$$

qui est bien le résultat attendu. \square

On sait donc que la métrique de Poincaré ρ est la bonne métrique pour étudier le disque de Poincaré. On peut donc se demander quelles sont toutes les isométries pour la métrique ρ .

Propriété 2.8 Soit $f : D \rightarrow D$ une fonction \mathcal{C}^1 telle que $\forall z \in D$

$$f * \rho(z) = \rho(z).$$

Alors f est holomorphe et injective. Donc f est la composée d'une rotation et d'une transformation de Möbius.

Démonstration. On suppose dans un premier temps que $f(0) = 0$. On note C_R , pour $R > 0$, le cercle de centre 0 et de rayon R pour la distance d_ρ . Comme f préserve la métrique donc les distances, on a que $f(C_R) \subset C_R$. De plus f est injective, en effet soient $x, y \in D$ tels que $f(x) = f(y)$, alors on a

$$0 = d_\rho(f(x), f(y)) = d_\rho(x, y).$$

Ce qui montre que $x = y$.

Maintenant, prenons $P \in C_R$. On a

$$\frac{f(P) - f(0)}{P - 0} = \frac{|f(P)|}{|P|} = 1$$

i.e.

$$|f(P)| = |P|.$$

En faisant $R \rightarrow 0^+$ on obtient que f est conforme à l'origine. Précisons un peu ce point, il s'agit en fait de vérifier que f est holomorphe ou anti-holomorphe à l'origine.

Notons $z = x + iy$; $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$; $a = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$; $b = \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0)$;
 $c = \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0)$; $d = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0)$.

On fait le développement de Taylor en $(0, 0)$ de u et v à l'ordre 1 et on obtient

$$u(x, y) = ax + by + o(|z|) \quad \text{et} \quad v(x, y) = cx + dy + o(|z|).$$

Si $P = x + iy$ en remplaçant on a

$$(ax + by + o(|z|))^2 + (cx + dy + o(|z|))^2 = x^2 + y^2$$

$$(a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy + o(|z|^2) = x^2 + y^2.$$

D'où par identification

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}$$

• Si $a = 0$.

On obtient $cd = 0$ donc $d = 0$ et ainsi $c^2 = b^2 = 1$. Par les equations de Cauchy-Riemann cela montre bien que f est holomorphe ou anti-holomorphe en 0.

• Si $a \neq 0$

On trouve $b = -\frac{cd}{a}$ d'où en remplaçant on trouve $c^2d^2 + d^2a^2 = a^2$ puis $d^2 = a^2$ ce qui nous donne $d = \varepsilon a$ et $b = -\varepsilon c$ pour $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$. Ce qui montre que f est holomorphe en 0 si $\varepsilon = 1$ et anti-holomorphe en 0 si $\varepsilon = -1$.

Mais on sait que f préserve la métrique ρ ce qui veut dire

$$f * \rho = \rho(f) \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|$$

donc nécessairement

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \neq 0$$

donc f est bien holomorphe.

Passons maintenant au cas où on a pas forcément $f(0) = 0$. Si l'on pose pour un $z_0 \in D$ fixé

$$\phi(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}; \quad \psi(z) = \frac{z - f(z_0)}{1 + \overline{f(z_0)} z}$$

et

$$g = \psi \circ f \circ \phi.$$

Alors $g(0) = 0$ et on peut appliquer le raisonnement précédent à g qui est une isométrie car f, ϕ et ψ le sont. Il en résulte que $\frac{\partial g}{\partial z}(0) \neq 0$ donc g est holomorphe en 0. Ceci montre que f est holomorphe en z_0 car g est holomorphe en 0 et ψ et ϕ sont holomorphes en tout point de D . □

Cette propriété nous donne beaucoup d'informations sur les isométries de la paire (D, ρ) avec la paire (D, ρ) . Nous pouvons cependant trouver une propriété un peu plus précise si l'on rajoute quelques hypothèses.

Propriété 2.9 Soit f une isométrie de la paire (D, ρ) avec la paire (D, ρ) . Si $f(0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0) = 1$, alors $\forall z \in D$

$$f(z) = z.$$

Démonstration. Par la propriété 2.7 on sait que f s'écrit $\forall z \in D$

$$f(z) = \lambda \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

pour un certain $a \in D$ et λ de module 1.

Puis $f(0) = 0$ nous donne $a = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0) = 1$ nous donne $\lambda = 1$. Il en résulte que $\forall z \in D, f(z) = z$. □

On en déduit le corollaire naturel suivant.

Corollaire. Soient f et g des isométries de la paire (D, ρ) avec la paire (D, ρ) . On suppose que $f(z_0) = g(z_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial z}(z_0)$ pour un certain $z_0 \in D$. Alors $\forall z \in D$, on a

$$f(z) = g(z).$$

Démonstration. On sait que g^{-1} est aussi une isométrie de la paire (D, ρ) avec la paire (D, ρ) . On considère $\psi = \phi_{-z_0}$ la transformation de Möbius qui vaut z_0 en 0. Alors $\psi^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ \psi$ satisfait les hypothèses de la propriété 2.9 donc $\forall z \in D$

$$\psi^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ \psi(z) = z$$

et donc $\forall z \in D$

$$f(z) = g(z).$$

□

3 Petit et grand théorème de Picard par le point de vue géométrique

3.1 Courbure complexe et application au petit théorème de Picard

Avant de démontrer le petit théorème de Picard, nous avons besoin de la notion de courbure et de ses propriétés. Ceci nous mènera directement à la démonstration du petit théorème de Picard.

Definition 3.1 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et ρ une métrique sur U . La *courbure* de ρ est définie en tout point z où $\rho(z) \neq 0$ par

$$\kappa_{U,\rho}(z) = \kappa(z) = \frac{-\Delta \log(\rho(z))}{\rho(z)^2}.$$

On voit par la définition de la courbure que cet outil va mener à des propriétés calculatoires mais aussi géométriques étant donné qu'elle fait entrer en jeu la métrique de l'ensemble.

Tout d'abord voyons quelques propriétés de la courbure que nous pouvons obtenir grâce à de petits calculs.

Propriété 3.1 Soient U_1 et U_2 deux ouverts connexes et $h : U_1 \rightarrow U_2$ une application conforme. Soit ρ une métrique sur U_2 , alors $\forall z \in U_1$

$$\kappa_{U_1, h^*\rho}(z) = \kappa_{U_2, \rho}(h(z)).$$

Démonstration. Tout d'abord deux observations qui vont nous permettre de mener un calcul direct pour démontrer le résultat.

Si f est une fonction holomorphe ne s'annulant pas,

$$\begin{aligned} \Delta(\log(|f|)) &= \frac{1}{2} \Delta(\log(|f|^2)) \\ &= \frac{1}{2} \Delta(\log(f)) + \frac{1}{2} \Delta(\log(\bar{f})) \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log(f) + 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \log(\bar{f}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Deuxième observation, si g est une fonction holomorphe, on écrit $g(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ et on note que

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (f \circ g) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (f \circ g) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - i \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \beta}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Puis en remarquant que $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$, on a en remplaçant dans l'expression précédente et en réduisant

$$\frac{\partial}{\partial z} (f \circ g) = \frac{\partial f}{\partial z} (g) \frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (g) \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} (g) \frac{\partial g}{\partial z}$$

car g est holomorphe.

Puis par les mêmes astuces de calcul on obtient aussi

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g) = \frac{\partial f}{\partial z}(g) \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}.$$

Ce qui nous mène à

$$\begin{aligned} \Delta(f \circ g) &= 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \circ g) \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g) \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}(g) \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} + 4 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(g) \frac{\partial^2 \bar{g}}{\partial z \partial \bar{z}} \\ &= (\Delta f \circ g) \cdot |g'|^2. \end{aligned}$$

Maintenant que nous avons ces résultats il ne nous reste plus qu'à faire le calcul direct pour finir la démonstration

$$\begin{aligned} \kappa_{U_1, h^* \rho}(z) &= \frac{-\Delta \log(\rho(h(z)) \cdot |h'(z)|)}{(\rho(h(z)) \cdot |h'(z)|)^2} \\ &= \frac{-\Delta \log(\rho(h(z))) - \Delta \log(|h'(z)|)}{(\rho(h(z)) \cdot |h'(z)|)^2} \\ &= \frac{-((\Delta \log \rho)(h(z))) |h'(z)|^2}{(\rho(h(z)) \cdot |h'(z)|)^2} \\ &= \frac{-((\Delta \log \rho)(h(z)))}{(\rho(h(z)))^2} \\ &= \kappa_{U_2, \rho}(h(z)). \end{aligned}$$

□

Remarque. Dans la première observation, le log de f est bien défini. En effet, on pose $F : z \rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)}$ si f ne s'annule pas, U_1 étant connexe, on sait qu'il existe G une primitive de F . G est le log de f à une constante près. Le log de \bar{f} est aussi bien défini car $\bar{f} = e^{\log(\bar{f})} = e^{\overline{\log(f)}}$ donc $\log(\bar{f}) = \overline{\log(f)}$. Nous allons maintenant calculer la courbure de la métrique qui nous intéresse le plus, c'est à dire la métrique de Poincaré.

Propriété 3.2 On se place sur D le disque unité muni de la métrique de Poincaré ρ , alors $\forall z \in D$

$$\kappa(z) = -4.$$

Démonstration. Par le calcul direct on a

$$\begin{aligned}
\kappa(z) &= -\frac{\Delta \log \rho(z)}{\rho(z)^2} \\
&= \frac{\Delta \log(1 - |z|^2)}{\rho(z)^2} \\
&= 4(1 - |z|^2)^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log(1 - z\bar{z}) \\
&= 4(1 - |z|^2)^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{-z}{1 - z\bar{z}} \\
&= 4(1 - |z|^2)^2 \frac{|z|^2 - 1 - z\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2} \\
&= -4.
\end{aligned}$$

□

Avant de passer à la suite, nous allons démontrer un petit résultat qui va nous permettre de démontrer facilement le théorème suivant.

Propriété 3.3 Soit U un ouvert de \mathbb{C} . Soit f une fonction de U dans \mathbb{R} deux fois différentiable. On suppose que f atteint un maximum en un point $z_0 \in U$. Alors

$$\Delta f(z_0) \leq 0.$$

Démonstration. On va faire un développement limité au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
0 &\geq f(z_0 + h) - f(z_0) \\
&= \nabla f(x_0, y_0) \cdot h + \frac{1}{2} \text{Hess}_f(x_0, y_0) \cdot h + o(\|(x_0, y_0)\|^2)
\end{aligned}$$

où $\text{Hess}_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ est la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0) . D'après l'inégalité, elle est définie négative, donc ses valeurs propres sont négatives. On en déduit que $\text{tr}(\text{Hess}_f) \leq 0$ ce qui équivaut à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f \leq 0.$$

□

Pour comprendre un peu mieux la courbure et voir en quoi elle peut nous aider à démontrer le théorème de Picard, nous allons énoncer et démontrer la version d'Ahlfors du lemme de Schwarz qui, en le regardant d'un point de vue géométrique peut finalement se résumer en une inégalité sur les courbures.

Théorème 3.1 On se place sur D le disque unité, muni de la métrique de Poincaré ρ . On se donne U un ouvert connexe de \mathbb{C} muni d'une métrique σ et une fonction holomorphe $f : D \rightarrow U$. On suppose de plus que $\forall z \in U, \kappa_\sigma(z) \leq -4$. Alors $\forall z \in D$

$$f * \sigma(z) \leq \rho(z).$$

Démonstration. On se place sur $D(0, r)$ pour $0 < r < 1$ et on définit la métrique suivante sur ce disque

$$\rho_r(z) = \frac{r}{r^2 - |z|^2}.$$

Cette métrique est la métrique image de ρ la métrique de Poincaré par l'application

$$\begin{aligned} \phi_r : D(0, r) &\rightarrow D \\ z &\mapsto \frac{z}{r}. \end{aligned}$$

En effet $(\phi_r * \rho)(z) = \frac{r}{r^2 - |z|^2}$. Donc par la propriété 3.1 sa courbure vaut -4 . On définit

$$v = \frac{f * \sigma}{\rho_r}.$$

On remarque que v est continue et positive sur $D(0, r)$. De plus $\lim_{|z| \rightarrow r} v(z) = 0$ puisque $\rho_r(z) \xrightarrow{|z| \rightarrow r} \infty$ et f est holomorphe sur D elle est bornée sur $D(0, r)$ et sa dérivée aussi donc $f * \sigma$ est majorée. On en déduit que v atteint un maximum en un point $\tau \in D(0, r)$. On note M le max de v .

- Si $f * \sigma(\tau) = 0$ le résultat est trivialement vrai.
- Si $f * \sigma(\tau) > 0$, on a $\Delta \log v(\tau) \leq 0$ par la propriété précédent. Or

$$\begin{aligned} \Delta \log v(\tau) &= \Delta \log f * \sigma(\tau) - \Delta \log \rho_r(\tau) \\ &= -\kappa_{f * \sigma}(\tau) \cdot (f * \sigma(\tau))^2 + \kappa_{\rho_r}(\tau) \cdot (\rho_r(\tau))^2 \\ &\geq 4(f * \sigma(\tau))^2 - 4(\rho_r(\tau))^2 \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue par hypothèse sur la courbure de σ . On a donc

$$\frac{f * \sigma(\tau)}{\rho_r(\tau)} \leq 1$$

donc $M \leq 1$ et donc on fait tendre r vers 1^- et on obtient le résultat. □

Ce théorème nous donne une inégalité intéressante mais pas suffisante. Avec d'autres notations et un peu plus de travail on peut obtenir une version plus précise et plus puissante de ce théorème.

On se place sur $D(0, \alpha)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon α . Pour $A > 0$ on définit ρ_α^A sur $D(0, \alpha)$ par

$$\rho_\alpha^A(z) = \frac{2\alpha}{\sqrt{A}(\alpha^2 - |z|^2)}.$$

On remarque que la métrique image de ρ la métrique de Poincaré par l'application $\phi_\alpha : z \rightarrow \frac{z}{\alpha}$ donne $\phi_\alpha * \rho = \frac{\alpha}{\alpha^2 - |z|^2}$. Donc par la propriété 3.1 ρ_α a une courbure de -4 et ρ_α^A a une courbure de $-A$.

Théorème 3.2 Soit U un ouvert connexe muni d'une métrique σ dont la courbure est supposée majorée par une constante négative $-B$. Alors si $f : D(0, \alpha) \rightarrow U$ est une fonction holomorphe, on a $\forall z \in D(0, \alpha)$ l'inégalité suivante

$$f * \sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rho_\alpha^A(z).$$

Démonstration. Soit $z \in D(0, \alpha)$ et soit $f : D(0, \alpha) \rightarrow U$. On remarque que $\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{B}{4}}\sigma$ est de courbure majorée par -4 . On note $\tilde{z} = \frac{z}{\alpha} \in D$ et on définit \tilde{f} de D dans U par $\tilde{f}(\tilde{z}) = f(\alpha\tilde{z})$. On peut donc appliquer le théorème précédent à $\tilde{\sigma}, \tilde{f}$ en \tilde{z} ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \tilde{f} * \tilde{\sigma}(\tilde{z}) &\leq \rho(\tilde{z}) \\ \text{i.e.} \quad \tilde{\sigma}(f(z)) |\alpha \cdot f'(z)| &\leq \rho\left(\frac{z}{\alpha}\right) \\ \text{i.e.} \quad \tilde{\sigma}(f(z)) |f'(z)| &\leq \frac{1}{\alpha} \rho\left(\frac{z}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

ce qui nous donne bien le résultat voulu car en remplaçant, on obtient

$$f * \sigma(z) \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{B}(\alpha^2 - |z|^2)} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rho_\alpha^A(z).$$

□

Maintenant que nous en savons un peu plus sur la courbure grâce à ces inégalités nous allons pouvoir démontrer le théorème de Liouville du point de vue géométrique.

Théorème 3.3 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert muni d'une métrique σ ne s'annulant pas et vérifiant $\forall z \in U$

$$\kappa_\sigma(z) \leq -B < 0$$

pour une certaine constante positive B .

Alors si $f : \mathbb{C} \rightarrow U$ est une fonction holomorphe, elle est constante.

Démonstration. Le but va être de montrer grâce au théorème précédent que $f' \equiv 0$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé et $A > 0$ une constante. On choisit $\alpha > |z|$ et on considère le disque $D(0, \alpha)$ muni de la métrique ρ_α^A . On a donc l'inégalité

$$f * \sigma(z) \leq \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rho_\alpha^A(z)$$

dans laquelle on va faire $\alpha \rightarrow +\infty$, ce qui donne

$$f * \sigma(z) \leq 0$$

donc

$$f * \sigma(z) = 0.$$

Ce qui est vrai si et seulement si $f'(z) = 0$.

On en conclut que $f' \equiv 0$ et donc f est constante.

□

On en déduit directement le théorème un peu moins général suivant, qui est celui vu en cours de M1. Nous allons quand même en faire la démonstration car celle-ci utilise le point de vue géométrique.

Théorème 3.4 Soit f une fonction holomorphe entière et bornée. Alors f est constante.

Démonstration. Soit f une fonction holomorphe entière bornée. Notons M sa borne supérieure, ainsi $\frac{f}{M+1}$ est une fonction de \mathbb{C} dans D où D est muni de la métrique de Poincaré ρ de courbure -4 . Ainsi par le théorème précédent, $\frac{f}{M+1}$ est constante. □

On se rend compte avec ce théorème que l'on est de plus en plus proche de la démonstration du petit théorème de Picard. On voit en effet par le Théorème 3.1 que si l'on a une fonction f holomorphe qui est à valeurs dans un ouvert muni d'une métrique dont la courbure est majorée par une constante strictement négative, alors f est constante. Il serait donc intéressant de trouver une telle métrique pour répondre aux critères du petit théorème de Picard. Nous allons dans le théorème suivant construire une telle métrique.

Théorème 3.5 Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert tel que $\mathbb{C} \setminus U$ contienne au minimum deux points. Alors il existe une métrique μ sur U vérifiant

$$\kappa_\mu(z) \leq -B < 0$$

pour une certaine constante positive B .

Nous allons d'abord démontrer ce théorème puis nous discuterons de la démonstration qui n'est pas intuitive puisqu'il s'agit de prendre la métrique en question et de constater qu'elle vérifie bien ce que l'on veut. Il sera donc intéressant par la suite de comprendre d'où vient cette métrique.

Démonstration. Quitte à composer par une translation et une homothétie on peut supposer que les deux points qui ne sont pas dans U sont 0 et 1. Ainsi on note $\mathbb{C}_{0,1} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. On définit μ par

$$\mu(z) = \left[\frac{(1 + |z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \right] \cdot \left[\frac{(1 + |z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}} \right].$$

La première observation faite dans la démonstration de la propriété 3.1 nous donne

$$\begin{aligned} \Delta \log \left[\frac{(1 + |z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \right] &= \frac{1}{2} \Delta \log(1 + |z|^{1/3}) - \frac{5}{12} \Delta \log(|z|^2) \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(1 + (z\bar{z})^{1/6}) \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z^{1/6} \bar{z}^{-5/6}}{1 + (z\bar{z})^{1/6}} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{6} z^{-5/6} \bar{z}^{-5/6} (1 + (z\bar{z})^{1/6}) - z^{1/6} \bar{z}^{-5/6} (\frac{1}{6} z^{-5/6} \bar{z}^{1/6})}{(1 + (z\bar{z})^{1/6})^2} \\ &= \frac{1}{18|z|^{5/3}(1 + |z|^{1/3})^2}. \end{aligned}$$

D'autre part on calcule exactement de la même manière

$$\begin{aligned}
\Delta \log \left[\frac{(1 + |z - 1|^{1/3})^{1/2}}{|z - 1|^{5/6}} \right] &= \frac{1}{2} \Delta \log(1 + |z - 1|^{1/3}) - \frac{5}{12} \Delta \log(|z - 1|^2) \\
&= 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(1 + ((z - 1)(z - \bar{1}))^{1/6}) \\
&= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \frac{(z - 1)^{1/6} (z - \bar{1})^{-5/6}}{1 + ((z - 1)(z - \bar{1}))^{1/6}} \\
&= \frac{1}{18 |z - 1|^{5/3} (1 + |z - 1|^{1/3})^2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\kappa_\mu(z) = -\frac{1}{18} \left[\frac{|z - 1|^{5/3}}{(1 + |z|^{1/3})^3 (1 + |z - 1|^{1/3})} + \frac{|z|^{5/3}}{(1 + |z|^{1/3})(1 + |z - 1|^{1/3})^3} \right].$$

On observe que

$$\forall z \in \mathbb{C}_{0,1}, \kappa_\mu(z) < 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \kappa_\mu(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \kappa_\mu(z) = -\frac{1}{36}$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \kappa_\mu(z) = -\infty$$

Ce qui montre que κ_μ est majorée pas une constante négative. □

Comment a t'on trouvé μ ? Regardons uniquement le terme $\left[\frac{(1 + |z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \right]$ qui possède une singularité en 0. L'argumentation sera exactement la même pour le terme $\left[\frac{(1 + |z - 1|^{1/3})^{1/2}}{|z - 1|^{5/6}} \right]$ qui possède une singularité en 1.

On se place sur l'ouvert $U = \mathbb{C}_{0,1}$ muni d'une métrique σ que l'on définira pour nos calculs. On cherche une métrique invariante par rotation donc on peut penser que la métrique que l'on cherche sera fonction de $|z|$. On constate dans un premier temps que pour tout $z \in U$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si $\sigma(z) = |z|^\alpha$, alors on a $\Delta \log \sigma(z) = 0$. On peut ensuite essayer de calculer la courbure pour une métrique qui ressemble à celle du disque de Poincaré. Calculons la courbure pour σ définie par $\sigma(z) = (1 + |z|^\alpha)^\beta$.

$$\begin{aligned}
\kappa_\sigma(z) &= -\frac{\Delta \log((1 + |z|^\alpha)^\beta)}{(1 + |z|^\alpha)^{2\beta}} \\
&= -\frac{4\beta}{(1 + |z|^\alpha)^{2\beta}} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(1 + (z\bar{z})^{\alpha/2}) \\
&= -\frac{4\beta}{(1 + |z|^\alpha)^{2\beta}} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\alpha z^{\alpha/2} \bar{z}^{\frac{\alpha-2}{2}}}{2(1 + z\bar{z})^2} \\
&= -\frac{4\beta}{(1 + |z|^\alpha)^{2\beta}} \frac{\alpha}{2} \left[\frac{\alpha}{2} (z\bar{z})^{\frac{\alpha-2}{2}} (1 + |z|^\alpha) - \frac{\alpha}{2} (z\bar{z})^{\frac{\alpha-2}{2}} (z\bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} \right] \frac{1}{(1 + |z|^\alpha)^2} \\
&= -\frac{\alpha^2 \beta |z|^{\alpha-2}}{(1 + |z|^\alpha)^{2+2\beta}}.
\end{aligned}$$

Or on veut que cette courbure ait une limite strictement négative au voisinage de l'infini et au voisinage de 0. Mais les valeurs de α et β qui donnent cela au voisinage de 0 ne donnent pas cela en l'infini et vice versa.

C'est pour cela que l'on a besoin du terme en $|z - 1|$, en l'incluant dans la métrique on peut influencer sur la limite en l'infini sans influencer sur la limite en 0. Le terme en $|z|$ va faire de même et modifier la limite en l'infini de la courbure en $|z - 1|$ sans influencer sur la limite en 1. Pour avoir un peu plus de liberté on peut multiplier la métrique σ par $|z|^\gamma$ qui comme on l'a vu par la première observation, va seulement multiplier la courbure par $|z|^{-2\gamma}$.

Le problème étant symétrique en 0 et en 1, les puissances α, β et γ seront les mêmes sur les termes en $|z|$ et en $|z - 1|$.

Avec toutes ces observations et tous les calculs précédents on obtient donc pour la métrique σ définie par

$$\sigma(z) = [(1 + |z|^\alpha)^\beta |z|^\gamma] \cdot [(1 + |z - 1|^\alpha)^\beta |z - 1|^\gamma]$$

une courbure en tout point de U de

$$\kappa_\sigma(z) = - \left[\frac{\alpha^2 \beta |z|^{\alpha-2-2\gamma}}{(1 + |z|^\alpha)^{2+2\beta}} \right] \cdot \left[\frac{1}{((1 + |z - 1|^\alpha)^\beta |z - 1|^\gamma)^2} \right] - \left[\frac{\alpha^2 \beta |z - 1|^{\alpha-2-2\gamma}}{(1 + |z - 1|^\alpha)^{2+2\beta}} \right] \cdot \left[\frac{1}{((1 + |z|^\alpha)^\beta |z|^\gamma)^2} \right].$$

Puis on calcule les limites en 0,1 et ∞ et on trouve α, β et γ pour obtenir une courbure strictement négative sur U .

On peut maintenant démontrer sans effort le petit théorème de Picard en utilisant les résultats démontrés précédemment.

Théorème 3.6 Petit théorème de Picard.

Soit f une fonction entière à valeurs dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. On suppose que $\mathbb{C} \setminus U$ contient au moins deux points. Alors f est constante.

Démonstration. Soit f et U tels que dans l'énoncé du théorème. Par le Théorème 3.5, comme $\mathbb{C} \setminus U$ contient au moins deux points, on peut construire une métrique sur U de courbure strictement inférieure à une constante négative pour tout $z \in U$. De plus comme la fonction f est entière, par le Théorème 3.3, f est constante. \square

Ceci conclut la partie sur le petit théorème de Picard.

3.2 Familles normales, métrique sphérique et grand théorème de Picard

Nous allons dans cette section adopter un point de vue différent. Nous allons définir de nouvelles notions, notamment la notion de famille normale ainsi que leurs propriétés qui nous mèneront au théorème de Marty. Ceci nous permettra d'arriver à la démonstration du grand théorème de Picard.

Tout d'abord définissons notre outil principal pour cette section. Voici plusieurs définitions concernant les familles normales.

Definition 3.2 Soit Ω un ouvert connexe, soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions de Ω à valeurs dans \mathbb{C} . La suite $(g_n)_n$ est dite *normalement convergente* vers une fonction limite, notée g , si, $\forall \varepsilon > 0$ et pour tout compact $K \subseteq \Omega$, il existe un entier positif N tel que si $n > N$ et $z \in K$, alors

$$|g_n(z) - g(z)| < \varepsilon.$$

Cette notion est équivalente à la notion de suite de fonctions qui converge uniformément sur les compacts de Ω vue en cours de M1.

Definition 3.3 Soit Ω un ouvert connexe, soit $(g_n)_n$ une suite de fonctions de Ω à valeurs dans \mathbb{C} . La suite $(g_n)_n$ est dite *normalement divergente* si pour tout compact $K \subseteq \Omega$, pour tout compact $L \subseteq \mathbb{C}$ il existe un entier positif N tel que si $n > N$ et $z \in K$, alors $g_n(z) \notin L$.

Cette notion revient à converger uniformément vers l'infini sur les compacts de Ω .

Definition 3.4 Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et soit \mathcal{F} une famille de fonctions de Ω à valeurs dans \mathbb{C} . \mathcal{F} est appelée *famille normale* si toute suite d'éléments de \mathcal{F} possède soit une sous-suite normalement convergente, soit une sous-suite normalement divergente.

Avec cette notion de famille normale il vient naturellement le théorème de Montel.

Théorème 3.7 Soit Ω un ouvert connexe et \mathcal{F} une famille de fonctions holomorphes sur Ω . Si pour tout compact $K \subseteq \Omega$ il existe une constante M_K telle que $\forall z \in K, \forall f \in \mathcal{F}$

$$|f(z)| \leq M_K$$

alors \mathcal{F} est une famille normale.

Ce théorème ayant été démontré dans le cours de M1 on ne détaillera pas la démonstration ici. De plus cette démonstration ne fait pas appel à des notions de géométrie mais à des notions de topologie.

On peut énoncer un autre théorème classique sur les familles normales, le théorème d'Ascoli-Arzelà.

Théorème 3.8 Soit (E, d) un espace métrique. On considère $\mathcal{C}(K, E)$ muni de la métrique uniforme. Alors on a l'équivalence suivante.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K, E)$ est relativement compact \Leftrightarrow

- 1) $\forall x \in K, \forall \varepsilon > 0$, il existe V un voisinage de x tel que $\forall f \in \mathcal{F}; \forall y \in V, d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.
- 2) $\forall x \in K, \mathcal{F}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact.

Remarque. Comme K est compact, 1) est équivalent à uniformément équicontinue.

Ce théorème ayant aussi été démontré dans les cours de M1, il ne sera pas démontré ici. Nous allons maintenant introduire la notion de métrique sphérique. On considère la sphère de Riemann que l'on associe à $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via la projection stéréographique. On définit une métrique sur la sphère de Riemann par

$$\tau(z) = \frac{2}{1 + |z|^2}.$$

Nous pouvons maintenant parler de familles normales de $\hat{\mathbb{C}}$.

Definition 3.4 bis Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soit \mathcal{F} une famille de fonctions de U à valeurs dans $\hat{\mathbb{C}}$. \mathcal{F} est appelée *famille normale* si toute suite d'éléments de \mathcal{F} admet une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction $f : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ au sens de la distance d_τ . C'est à dire $\forall \varepsilon > 0, \forall K \subset U$ compact, il existe $N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$ on a

$$\sup_{x \in K} (d_\tau(f_n(x), f(x))) \leq \varepsilon.$$

On remarque que pour cette définition on parle seulement de sous-suite normalement convergent et pas de sous-suite normalement divergente. En effet, comme nous considérons $\hat{\mathbb{C}}$, l'équivalent d'une suite qui diverge sur les compacts de U est en fait une suite qui converge vers ∞ sur les compacts de U .

Avant de passer à la suite nous avons besoin d'un lemme et d'un théorème qui seront utiles pour la démonstration suivante. De plus les isoler permettra de mieux comprendre le comportement des familles

normales, notamment sur $\hat{\mathbb{C}}$.

Lemme. Soit \mathcal{F} une famille de fonctions de Ω dans $\hat{\mathbb{C}}$ telle que $\forall K$ compact de Ω on a $\mathcal{F}_K = \{f|_K : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact. Pour toute suite $(f_n)_n$ d'éléments de \mathcal{F} , il existe une fonction g et une sous-suite de $(f_n)_n$ qui converge uniformément vers g sur les compacts de Ω .

Démonstration. Il existe $(K_n)_n$ une suite de compacts de Ω vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, K_n \subset \Omega, K_n \subset K_{n+1}$ et $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$.

Soit $(f_k)_k$ une suite de \mathcal{F} . Il faut montrer qu'il existe une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts. On va utiliser le procédé diagonal.

Soit $\phi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\phi_1(k)})_k$ converge uniformément sur K_1 vers une fonction g_1 définie sur K_1 . Une telle sous-suite existe car \mathcal{F}_{K_1} est relativement compact.

On suppose maintenant que $\{\phi_i : i \in \llbracket 1; l \rrbracket\}$ sont toutes construites de telle façon que $(f_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_l(k)})_k$ converge uniformément sur K_l vers une fonction g_l définie sur K_l . On a donc par unicité de la limite, $g_l|_{K_{l-1}} = g_{l-1}$.

Il existe alors $\phi_{l+1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_l \circ \phi_{l+1}(k)})_k$ converge uniformément sur K_{l+1} (c'est vrai car $\mathcal{F}_{K_{l+1}}$ est relativement compact) vers une fonction $g_{l+1} : K_{l+1} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ telle que $g_{l+1}|_{K_l} = g_l$. Soit alors $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\phi(k) = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_k(k)$, ϕ est strictement croissante.

Montrons que $(f_{\phi(k)})_k$ converge uniformément sur les compacts vers une fonction g définie par $g(x) = g_n(x)$ si $x \in K_n$.

Cette fonction est bien définie car si $x \in K_n \cap K_m$ pour $n < m$, alors $g_n(x) = g_m(x)$.

Soit K un compact de Ω . Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset K_N$ et donc $\sup_{x \in K} (d(f_{\phi(k)}(x), g(x))) \leq \sup_{x \in K_N} (d(f_{\phi(k)}(x), g_N(x)))$.

Or par construction, $\sup_{x \in K_N} (d(f_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_N(k)}(x), g_N(x))) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$

i.e. $\forall \varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que $\forall k \geq k_0, \forall x \in K_N$,

$$d(f_{\phi_1 \circ \dots \circ \phi_N(k)}(x), g_N(x)) \leq \varepsilon$$

donc si $k \geq k_0$ et $k \geq N$, comme $\phi(k) = (\phi_1 \circ \dots \circ \phi_N)(\phi_{N+1} \circ \dots \circ \phi_k)(k)$ et $(\phi_{N+1} \circ \dots \circ \phi_k)(k) \leq k \leq k_0$, on aura

$$\sup_{x \in K} (d(f_{\phi(k)}(x), g(x))) \leq \varepsilon.$$

□

Théorème 3.9 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{M}(\Omega)$ (L'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω) qui converge uniformément sur les compacts vers $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Alors $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $(f_n^\#)_n$ converge uniformément sur les compacts vers $f^\#$.

Démonstration. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe. En définissant $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ telle que f vaut ∞ en ses pôles on peut dire que $\forall z \in \Omega$, si $f(z) \neq \infty$ alors f est dérivable en z et si $f(z) = \infty$ alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en z .

f est continue comme limite uniforme sur les compacts de fonctions continues. Soit $z_0 \in \Omega$.

• Premier cas : $f(z_0) \neq \infty$.

Par continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $\overline{D(z_0, \delta)} \subset \Omega$ et pour tout $z \in \overline{D(z_0, \delta)}$

$$d_\tau(f(z), \infty) > \frac{1}{2} d_\tau(f(z_0), \infty) > 0 \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq C = \tan\left(\frac{d(f(z_0), \infty)}{4}\right).$$

Or $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\overline{D(z_0, \delta)}$, donc il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, \forall z \in D(z_0, \delta)$

$$d_\tau(f_n(z), \infty) > \frac{1}{4} d_\tau(f(z_0), \infty) > 0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(z)| \leq C' = \tan\left(\frac{d_\tau(f(z_0), \infty)}{8}\right)$$

donc $(f_n)_n$ est holomorphe sur $D(z_0, \delta)$ et

$$d_\tau(f(z), f_n(z)) \geq \frac{2|f(z) - f_n(z)|}{\sqrt{1 + |f(z)|^2} \sqrt{1 + |f_n(z)|^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{1 + C^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + C'^2}} \cdot |f(z) - f_n(z)|$$

donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $D(z_0, \delta)$ (pour la distance usuelle), donc f est holomorphe sur $D(z_0, \delta)$ par le théorème de Weierstrass. De plus $(f'_n)_n$ converge uniformément vers f' sur $D(z_0, \frac{\delta}{2})$ et donc $(f_n^\#)_n$ converge uniformément vers $f^\#$ sur $\overline{D(z_0, \delta)}$.

• Deuxième cas : $f(z_0) = \infty$.

On pose alors $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, $g(z_0) = 0$ et on fait le même raisonnement avec $g_n = \frac{1}{f_n}$ car $d_\tau(f_n(z), f(z)) = d_\tau(g_n(z), g(z))$ et $g_n^\#(z) = f_n^\#(z)$.

□

Remarque. Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes de Ω à valeurs dans \mathbb{C} telle qu'il existe $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ et $(f_n)_n$ converge uniformément sur les compacts vers f pour la distance sphérique. Alors, soit f est holomorphe, soit $f \equiv \infty$ et $(f_n)_n$ converge uniformément sur les compacts vers f pour la distance usuelle. En effet par le théorème précédent on sait que f est méromorphe.

Supposons qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = \infty$.

$$2 \arctan \left(\frac{1}{|f_n(z_0)|} \right) = d_\tau(f_n(z_0), \infty) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d_\tau(f(z_0), \infty) = 0$$

donc $|f_n(z_0)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ i.e. $f_n(z_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

donc il existe $\delta > 0$, il existe $C > 0$ tels que $\overline{D(z_0, \delta)} \subset \Omega$ et $\forall z \in \overline{D(z_0, \delta)}$

$$|f(z)| > C \quad \text{et} \quad |f_n(z)| > C.$$

Considérons $g_n(z) = \frac{1}{f_n(z)}$ et $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Les f_n étant toutes holomorphes, les g_n ne s'annulent pas et

$$d_\tau(f_n(z), f(z)) = d_\tau(g_n(z), g(z)) \leq \frac{2|g(z) - g_n(z)|}{\sqrt{1 + |g(z)|^2} \sqrt{1 + |g_n(z)|^2}} \leq \frac{2}{1 + \frac{1}{C^2}} \cdot |g(z) - g_n(z)|$$

donc par le théorème d'Hurwitz, $g \equiv 0$ sur $D(z_0, \delta)$ (i.e. $f \equiv \infty$ sur $D(z_0, \delta)$)

Or Ω est connexe donc $f \equiv \infty$ sur Ω .

Donnons maintenant une caractérisation de cette nouvelle notion de famille normale grâce au théorème de Marty

Théorème 3.10 Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(\Omega)$ on a l'équivalence suivante

$$\mathcal{F} \text{ est normale} \Leftrightarrow \forall K \text{ compact de } \Omega, \sup_{\substack{z \in K \\ f \in \mathcal{F}}} \left(\frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \right) < \infty.$$

Démonstration. Commençons par démontrer le sens \Leftarrow .

Soit K un compact de Ω , soit $\mathcal{F}_K = \{f|_K : f \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{C}(K, \hat{\mathbb{C}})$ où $\hat{\mathbb{C}}$ est muni de la distance sphérique d_τ .

Soit $x \in K$.

• $\mathcal{F}(x)$ est relativement compact dans $\hat{\mathbb{C}}$ car $(\hat{\mathbb{C}}, d_\tau)$ est compact car \mathbb{S}^2 muni de la distance sphérique est compact.

• Soit $\delta > 0$ tel que $\overline{D(x, \delta)} \subset \Omega$. Alors si $y \in D(x, \delta)$ et $f \in \mathcal{F}$, on a pour le chemin γ défini par $\gamma(t) = (1-t)x + ty$

$$\begin{aligned}
d_\tau(f(x), f(y)) &\leq \int_0^1 \|(f \circ \gamma)'(t)\|_{\tau, (f \circ \gamma)(t)} dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{2|f'(\gamma(t))|}{1 + |f(\gamma(t))|^2} |\gamma'(t)| dt \\
&\leq \sup_{\substack{z \in D(x, \delta) \\ f \in \mathcal{F}}} \left(\frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \right) \cdot |x - y|.
\end{aligned}$$

Donc 1) est vérifié donc \mathcal{F}_K est relativement compact.

Le lemme précédent nous dit exactement que \mathcal{F} est normale.

Démontrons maintenant le sens \Rightarrow . On définit

$$f^\#(z) = \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$$

appelé *dérivation sphérique*. Supposons qu'il existe K tel que

$$\sup_{\substack{z \in K \\ f \in \mathcal{F}}} (f^\#(z)) = \infty$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $f_n \in \mathcal{F}$ tel que $\sup_{z \in K} (f_n^\#(z)) \geq n$ (*)

Or \mathcal{F} est normal donc il existe $g : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f_{\phi(n)})_n$ converge uniformément sur les compacts vers g .

Or par le théorème 3.9, ceci entraîne que $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $(f_{\phi(n)}^\#)_n$ converge uniformément sur les compacts vers $g^\#$ ce qui contredit (*). □

Remarque. $f^\#(z) = \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}$ est appelé dérivée sphérique car

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d_\tau(f(z+h), f(z))}{|h|} = \frac{2}{|h|} \arctan \left(\frac{|f(z+h) - f(z)|}{|1 + f(z+h)\overline{f(z)}|} \right) = \frac{2|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

Avec tout ce que nous avons démontré il ne reste plus que peu de travail avant de pouvoir démontrer le grand théorème de Picard, qui sans l'utilisation du point de vue géométrique nécessite l'utilisation de la fonction elliptique modulaire. Nous avons besoin pour cela d'une version plus générale du théorème de Montel.

Théorème 3.11 Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe. Soient P, Q et R trois points distincts de $\hat{\mathbb{C}}$. Si \mathcal{F} est une famille de fonctions holomorphes à valeurs dans $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{P, Q, R\}$, alors \mathcal{F} est une famille normale au sens de la définition 3.4 bis.

Démonstration. Quitte à appliquer une homographie, on peut supposer $P = 0, R = \infty$ et $Q = 1$. On se donne \mathcal{F} une famille de fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbb{C}_{0,1}$ et on veut montrer qu'elle est normale. Comme tout compact est inclus dans un disque de la forme $D(0, \alpha) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \alpha\}$, on peut se restreindre à l'étude sur ces disques. On considère $\mu(z) = \left[\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \right] \cdot \left[\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}} \right]$ la métrique construite dans la sous section précédente et on la multiplie par la bonne constante de telle sorte que sa courbure soit majorée par -4 puis on applique le Théorème 3.4 avec $A = 4$ et $B = 4$ ce qui nous donne pour tout $f \in \mathcal{F}$ et $\forall z \in D(0, \alpha)$

$$f * \mu(z) \leq \rho_\alpha^A(z).$$

On remarque de plus que si l'on restreint σ la métrique sphérique à $\hat{\mathbb{C}}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(z)}{\mu(z)} &= \frac{2}{[1 + |z|^2] \cdot \left[\frac{(1+|z|^{1/3})^{1/2}}{|z|^{5/6}} \right] \cdot \left[\frac{(1+|z-1|^{1/3})^{1/2}}{|z-1|^{5/6}} \right]} \\ &= \frac{2 \cdot (|z|^{5/6} |z-1|^{5/6})}{[1 + |z|^2] \cdot (1 + |z|^{1/3})^{1/2} \cdot (1 + |z-1|^{1/3})^{1/2}}\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sigma(z)}{\mu(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sigma(z)}{\mu(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\sigma(z)}{\mu(z)} = 0.$$

On en déduit qu'il existe une constante M telle que $\forall z \in \mathbb{C}_{0,1}$

$$\sigma(z) \leq M \cdot \mu(z)$$

et en combinant les deux inégalités précédentes, on obtient sur $D(0, \alpha)$

$$f^\# = f * \sigma \leq M \cdot f * \mu \leq M \cdot \rho_\alpha^A.$$

On a donc que $f^\#$ est bornée sur chaque compact $K \subseteq D(0, \alpha)$. On conclut par le théorème de Marty qui nous affirme que la famille \mathcal{F} est normale. \square

On peut maintenant démontrer le grand théorème de Picard

Théorème 3.12 Grand théorème de Picard.

Soit $U = D'(0, \alpha) = D(0, \alpha) \setminus \{0\}$ et soit f une fonction holomorphe sur U qui admet une singularité essentielle en 0. Alors si V est un voisinage ouvert de 0 inclus dans U ,

$$f(V) \supseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$$

pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Quitte à appliquer une translation et une homothétie, on peut supposer que $U = D'(0, 1) = D'$. On va démontrer le théorème par contraposée. On suppose donc que f ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1 (encore une fois si les valeurs que f ne prend pas ne sont pas 0 et 1, on peut appliquer une translation et une homothétie pour que ces valeurs là soient 0 et 1, sans perdre de généralités).

On pose $f_n(z) = f\left(\frac{z}{n}\right)$ et $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Par le théorème précédent, comme les f_n sont tous à valeurs dans $\mathbb{C}_{0,1}$, alors la famille \mathcal{F} est normale. C'est une famille de fonctions holomorphes donc il existe une suite $(f_{n_k})_k$ d'éléments de \mathcal{F} qui converge normalement ou diverge sur tout compact.

Si la suite $(f_{n_k})_k$ converge normalement, alors elle est bornée sur les compacts de D' . En particulier la suite est bornée sur $\{z : |z| = \frac{1}{2}\}$ par une constante M donc f est bornée sur tous les compacts $\{z : |z| = \frac{1}{2n_k}\}$ par cette même constante M . Le principe du maximum appliqué à chaque $D_k = \{z \in D' : \frac{1}{2n_{k+1}} < |z| < \frac{1}{2n_k}\}$ nous dit donc que f est bornée par M sur chaque $\overline{D_k}$ donc f est majorée par M sur $\{z : 0 < |z| < \frac{1}{2n_1}\}$. Donc 0 est une singularité apparente de f .

Si la suite $(f_{n_k})_k$ diverge sur tout compact, on applique le raisonnement précédent à $\frac{1}{f}$ pour montrer que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$. Donc 0 est un pôle pour f .

Ceci montre que si f omet deux points (ou plus) sur un voisinage de 0 alors f admet soit une singularité apparente en 0, soit un pôle en 0 et on a donc bien par contraposée le resultat de notre théorème. \square

Références

- [1] L. Blanc-Centi. Homographies. 2008.
- [2] Steven G. Krantz. *Complex Analysis : the geometric viewpoint*, volume 23 of *The Carus Mathematical Monographs*. The Mathematical Association Of America, 2 edition, 2014.