Université Grenoble Alpes
Master1, mathématiques

Algèbre 1, examen
le 7 janvier 2020, de 9h à 12h

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. **Chaque réponse doit être justifiée**; *la qualité de la rédaction sera un élément important d'appréciation des copies.*

I autour du cours

1. Soit P un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$, unitaire de degré n, de racines complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Justifier le fait que si $Q \in \mathbb{Z}[X]$, $\prod_{i=1}^{n} Q(\alpha_i) \in \mathbb{Z}$.

2. Soient P, U, V des polynômes de $\mathbb{R}[X,Y,Z\,]$ tels que U et V sont premiers entre eux et $P^4 = U{\cdot}V$. Justifier *soigneusement* qu'il existe A, B dans $\mathbb{R}[X,Y,Z\,]$ et $\epsilon \in \{1,-1\}$ tels que

$$U = \epsilon A^4 \quad \text{et} \quad V = \epsilon B^4\,.$$

3. Présenter $\mathbb{F}_{25}$ comme un corps de rupture sur $\mathbb{F}_5$ d'un polynôme que l'on précisera (indication: on pourra écrire tous les carrés de $\mathbb{F}_5^*$).

4. Soit P un polynôme irréductible sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Expliquer pourquoi P est scindé sur tout K corps de rupture de P.

5. Donner les classes d'isomorphisme des groupes abéliens d'ordre 18.

II

1. On pose $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{5})$. Déterminer le degré $[K:\mathbb{Q}]$ et donner une base de K sur $\mathbb{Q}$.

2. On note $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$. Montrer que $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha)$, puis que $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

3. Trouver le polynôme minimal P de α sur $\mathbb{Q}$.

4.a) Soit L le corps de décomposition dans $\mathbb{C}$ du polynôme $(X^3-2)(X^2-5)$ de $\mathbb{Q}[X]$. Donner un ensemble minimal de générateurs de l'extension $L \supset \mathbb{Q}$.

b) Si φ est un automorphisme du corps L, quelles sont les valeurs possibles de $\varphi(\sqrt{5})$? de $\varphi(\sqrt[3]{2})$? Montrer qu'il existe exactement 6 morphismes de corps de K dans L.

c) Les images de α par ces 6 morphismes sont-elles distinctes? Donner les racines de P dans $\mathbb{C}$, avec leur multiplicité.

III

7,25

Dans cet exercice on utilise un polynôme cyclotomique pour prouver un cas particulier de la *loi de réciprocité quadratique*.

0,5 **1.** Justifier que le polynôme cyclotomique Φ_5 est $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

On note encore Φ_5 la réduction de Φ_5 modulo tout nombre premier p (cad. son image par le morphisme de réduction des coefficients modulo p); on considère ainsi Φ_5 comme un polynôme sur $\mathbb{F}_q$, pour tout corps fini $\mathbb{F}_q$.

Dans la suite on suppose que la caractéristique p de $\mathbb{F}_q$ est *différente de* 2 *et* 5.

1 **2.a)** Montrer que si $x \in \mathbb{F}_q^*$, x est racine de Φ_5 si et seulement si x est d'ordre 5 dans $\mathbb{F}_q^*$.

0,75 **b)** À quelle condition sur q le polynôme Φ_5 admet-il une racine dans $\mathbb{F}_q$?

0,75 **c)** Montrer que dans ce cas Φ_5 est scindé sur $\mathbb{F}_q$.

0,5 **3.** On note x une racine de Φ_5 dans une extension de $\mathbb{F}_p$, et on pose $y = x + \frac{1}{x}$. Calculer $(2y+1)^2$.

1,25 **4.a)** En déduire que 5 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $y \in \mathbb{F}_p$. Que dire alors du degré de x sur $\mathbb{F}_p$?

0,5 **b)** Montrer que dans ce cas Φ_5 est scindé sur $\mathbb{F}_{p^2}$ et on a $p \equiv \pm 1 \bmod 5$.

0,5 **5.a)** On suppose que $p \equiv 1 \bmod 5$. Montrer que x et y sont dans $\mathbb{F}_p$.

1 **b)** On suppose que $p \equiv -1 \bmod 5$. Que vaut x^{p+1} ? En déduire que $y \in \mathbb{F}_p$.

0,5 **6.** Au vu des carrés de $\mathbb{F}_5^*$, conclure que p est un carré modulo 5 si et seulement si 5 est un carré modulo p.

IV

5,25

On note N l'ensemble des triplets (x, y, z) de $\mathbb{Z}^3$ tels que $7x + 2y - 2z = 0$.

0,75 **1.** Justifier que N est un $\mathbb{Z}$-sous-module libre de $\mathbb{Z}^3$.

1,25 **2.** En considérant un morphisme convenable, donner la structure du quotient $\mathbb{Z}^3/N$. Peut-on en déduire le rang de N?

0,75 **3.** Expliciter une base (f_1, f_2) de N, *choisie de sorte* qu'en notant $f_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2)$, on ait $y_1 = x_2 = 0$.

1,75 **4.** Trouver une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{Z}^3$ adaptée au sous-module N.

0,75 **5.** On note $N' = 2N$. Le sous-module N' admet-il un supplémentaire dans $\mathbb{Z}^3$?

◇ ◇ ◇

Université Grenoble Alpes
Année 2019-2020

M1 Mathématiques générales
UE Fonctions holomorphes

Examen du mercredi 8 janvier 2020

Durée 3 heures. Documents, calculatrices et téléphones portables interdits. La notation tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Questions de cours

1. Énoncer le lemme de Schwarz, y compris son cas d'égalité. Démontrer le lemme de Schwarz en supposant connu le principe du maximum.

2. Soit f une fonction entière telle que, pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$|f(z)| \leqslant A|z|^c + B$$

pour des constantes A, B et c positives et finies. Montrer que f est un polynôme. Expliquer pourquoi le théorème de Liouville est un cas particulier de ce résultat.

3. Soient U un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : U \to C$ deux fonctions holomorphes. On considère la condition (C) : « l'ensemble des points z de U tels que $f(z) = g(z)$ est infini ». Si la condition (C) implique que $f = g$, le démontrer. Sinon, fournir un contrexemple et proposer un renforcement naturel de la condition (C), qui entraîne effectivement que $f = g$.

Exercice 1

Justifier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t(1+t^2)} dt$ et calculer sa valeur.

Indication : pour calculer I, on pourra considérer la fonction complexe f définie par $f(z) = \dfrac{e^{iz} - 1}{z(1+z^2)}$ et l'intégrale de f sur le chemin $[-R, R]$ et sur un demi-cercle de rayon R centré en 0, pour R suffisamment grand.

Exercice 2

Soit f une fonction entière et a, b et c des nombres réels tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. On suppose que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, $a\,\mathfrak{Re}\, f(z) + b\,\mathfrak{Im}\, f(z) \leqslant c$. Montrer que f est constante.

Indication : on pourra utiliser f pour construire une fonction holomorphe h de la forme $h(z) = e^{g(z)}$, bornée sur $\mathbb{C}$.

T.S.V.P.

Problème

On note $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$ le disque unité ouvert, $\partial D = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\}$ son bord et $\bar{D} = D \cup \partial D$. Pour tout a dans D, on note φ_a l'homographie définie par $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

1. Soit a dans D. Montrer que φ_a est définie sur $\bar{D}$, puis que $\varphi_a(\partial D) \subset \partial D$, puis que φ_a est une bijection de D dans D d'inverse φ_{-a}.

2. Soit $f : D \to D$ une fonction holomorphe, a dans D et $b = f(a)$.

(a) Calculer l'image de 0 par $g = \varphi_b \circ f \circ (\varphi_a)^{-1}$.

(b) En déduire que, pour tout z dans D,

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$$

(c) (Lemme de Schwarz-Pick) En déduire enfin que

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$

3. On dit qu'une fonction $E : \bar{D} \to \mathbb{C}$ est unitaire si E est continue sur $\bar{D}$, holomorphe sur D, et si $E(\partial D) \subset \partial D$.

(a) Montrer qu'une fonction unitaire n'admet qu'un nombre fini de zéros.

(b) Montrer qu'une fonction unitaire sans zéro est constante.

(c) Montrer que si une fonction unitaire E admet pour zéros $a_1, \ldots, a_n$, répétés avec leur ordre de multiplicité, alors il existe un point c de ∂D tel que $E = c\prod_{k=1}^{n} \varphi_{a_k}$.

4. Soit f une fonction holomorphe et bornée sur D, non identiquement nulle, et M un majorant fini de $|f|$ sur D.

(a) Si $E : \bar{D} \to \mathbb{C}$ est une fonction unitaire telle que f/E se prolonge en une fonction holomorphe sur D, montrer que, pour tout z dans D,

$$|f(z)| \leqslant M|E(z)|$$

(b) On suppose désormais que f admet une infinité de zéros dans D, notés $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et répétés avec leur ordre de multiplicité. Montrer qu'alors, pour tout $n \geqslant 1$,

$$|f(0)| \leqslant M\prod_{k=1}^{n} |a_k|$$

(c) En déduire que si $f(0) \neq 0$, la série $\sum_k (1-|a_k|)$ converge.

(d) Montrer enfin que ce dernier résultat reste vrai si $f(0) = 0$.

Fin.

Examen du 16 janvier 2019

La correction prendra en compte la justification des arguments.

Exercice 1 (Étude qualitative). On considère l'équation différentielle autonome

$$\begin{cases} x' = y - x^3 + x \\ y' = -x \end{cases}$$

la variable de temps étant notée t.

1. Soit (r, θ) les coordonnées polaires. Calculer r' et θ'.
2. En déduire que les solutions maximales sont globales.
3. Justifier que deux trajectoires (supports de solutions) sont soit confondues soit disjointes. Montrer aussi que si une solution passe deux fois par le même point alors elle est périodique. Quelles sont les trajectoires réduites à un point ?
4. Montrer que la symétrique par rapport à $(0,0)$ d'une trajectoire est une trajectoire.
5. Dessiner les ensembles suivants :

$$\begin{array}{ll} D^+ = \{(0,y); y > 0\}; & D^- = \{(0,y); y < 0\}; \\ \Gamma_+ = \{(x, x^3 - x); x > 0\}; & \Gamma_- = \{(x, x^3 - x); x < 0\}; \\ E_1 = \{(x,y); x > 0 \text{ et } y > x^3 - x\}; & E_2 = \{(x,y); x > 0 \text{ et } y < x^3 - x\}; \\ E_3 = \{(x,y); x < 0 \text{ et } y > x^3 - x\}; & E_4 = \{(x,y); x < 0 \text{ et } y < x^3 - x\}; \end{array}$$

   Montrer que si une solution (x,y) vérifie $(x(t_0), y(t_0)) \in D^+$ alors il existe $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ tels que $(x(t), y(t)) \in E_i$ pour $t \in [t_{i-1}, t_i]$ et $(x(t_1), y(t_1)) \in \Gamma^+$, $(x(t_1), y(t_1)) \in D^-$, $(x(t_1), y(t_1)) \in \Gamma^-$, $(x(t_1), y(t_1)) \in D^+$.
6. Soit $y_0 > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ et (x,y) la solution telle que $x(t_0) = 0$ et $y(t_0) = y_0$. On note $\sigma(y_0) = y(t_2)$. Montrer que σ ne dépend pas de t_0 et que σ est une fonction continue et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^-$.
7. Montrer que si $(0, y_0)$ appartient à une trajectoire périodique alors $\sigma(y_0) = -y_0$.
8. Montrer que si $y_0 > 0$ est suffisamment petit alors $|\sigma(y_0)| > y_0$.
9. Montrer que si $y_0 > 0$ est suffisamment grand alors $|\sigma(y_0)| < y_0$.
10. En déduire qu'il existe une solution périodique.

Exercice 2 (Entonnoirs). Soit f une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$x' = f(t, x).$$

On appelle **barrière inférieure** une fonction α de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t))$. Elle est dite stricte si l'inégalité est stricte. On appelle **barrière supérieure** une fonction β de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $\beta'(t) \geqslant f(t, \beta(t))$. Elle est dite stricte si l'inégalité est stricte.
Si $\alpha < \beta$ sont des barrières inférieure et supérieure pour f alors on appelle **entonnoir** l'ensemble des (t,x) tels que $\alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t)$.
Si $\alpha > \beta$ sont des barrières inférieure et supérieure pour f alors on appelle **anti-entonnoir** l'ensemble des (t,x) tels que $\beta(t) \leqslant x \leqslant \alpha(t)$.

1. On suppose que $\alpha < \beta$ sont des barrières inférieure et supérieure strictes pour f. Montrer que si une solution u vérifie que $(t_0, u(t_0))$ est dans l'entonnoir alors pour tout $t > t_0$, $(t, u(t))$ est dans l'entonnoir.
2. Soit maintenant $\alpha < \beta$ des barrières inférieure et supérieure qu'on ne suppose plus strictes. On suppose par contre que f est lipschitzienne en x. Montrer que le résultat précédent est toujours valable. On pourra considérer la dynamique $x' = f(t, x) + \varepsilon$ et considérer les résultats sur la dépendance aux paramètres.
3. On suppose maintenant qu'on a $\alpha > \beta$ et qu'on a un anti-entonnoir et que f est lipschitzienne en x. Montrer que pour tout t_0 il existe une solution qui reste dans l'anti-entonnoir pour $t > t_0$.

Exercice 3 (Sturm-Liouville et Fourier). Soit $E = C([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$, $<,>$ le produit scalaire sur E défini par $< f, g >= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)dt$ et $||.||$ la norme définie sur E par $||f|| = \sqrt{< f, f >}$. On définit deux opérateurs sur E par

$$(V(f))(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad \text{et} \quad (V^*(f))(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$$

On définit enfin la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E définie par

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos((2n+1)t).$$

1. **Parseval** Soit $f \in E$ et $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, 2π-périodique, définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $\hat{f}(t) = f(t)$ et sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ par $\hat{f}(t) = -f(\pi - t)$. Montrer que
$$||f||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} < f, \varphi_n >^2 .$$
2. **Norme de l'opérateur V**
   (a) Montrer que pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a
   $$(V^* \circ V(f))(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \max\{x, t\}\right) f(t)dt.$$
   (b) On définit g_x sur E par $g_x(t) = \frac{\pi}{2} - \max(x, t)$ et $\hat{g_x}$ comme pour f à la question 1. Déterminer la série de Fourier de $\hat{g_x}$.
   (c) En déduire que
   $$(V^* \circ Vf)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} < f, \varphi_n > \varphi_n(x),$$
   puis que
   $$||(V^* \circ Vf)||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} < f, \varphi_n >^2 .$$
   (d) En déduire que $|||V^* \circ V||| \leqslant 1$.
   (e) Montrer que pour tout f et g de E on a $< V(f), g >=< f, V^*g >$. On pourra remarquer que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f.
   En déduire que $|||V||| \leqslant 1$.

(f) En considérant φ_0, montrer que $|||V||| = 1$.

3. **Application à une problème de type Sturm-Liouville**

   Soit le problème de Cauchy donné par $y" + \lambda y + h = 0,\; y'(0) = 0,\; y(\frac{\pi}{2}) = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in E$.

   (a) Montrer que pour tout $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$
   $$< V^* \circ V(f), \varphi_n >= \frac{1}{(2n+1)^2} < f, \varphi_n > .$$

   (b) Montrer que g est solution de l'équation différentielle si ets eulement si
   $$g = \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h)$$
   et qu'alors
   $$< g, \varphi_n >= \frac{\lambda}{(2n+1)^2} < g, \varphi_n > + \frac{1}{(2n+1)^2} < h, \varphi_n > .$$
   Montrer que la série $\sum_n < g, \varphi_n > \varphi_n$ converge normalement vers g.

   (c) On suppose que, pour tout entier k, $\lambda \neq (2k+1)^2$. Montrer que le problème de Cauchy a une unique solution g et que
   $$g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} < h, \varphi_n > \varphi_n.$$

   (d) On suppose qu'il existe un entier p tel que $\lambda = (2p+1)^2$.
   Montrer que si $< h, \varphi_p >= 0$ alors il existe une infinité de solutions au problème de Cauchy et en proposer une.
   Que peut-on dire si $< h, \varphi_p >\neq 0$?

Exercice 4 (Série de Fourier). Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1. Donner sa série de Fourier dans la famille $(1, \cos(nx), \sin(nx))$?
2. Que donne l'identité de Parseval pour f ?
3. Quelle série peut on calculer en remarquant que $f(1) = 1$?

M1 – Statistique – 2019/2020

Examen final
Durée : 2h

Tout matériel qui ne ressemblerait pas à un simple stylo ou à une feuille blanche (calculatrice, portable, note de cours...) est interdit. Si vous vous demandez si vous avez le droit d'avoir un objet sur la table, c'est qu'il est certainement interdit.
Les parties sont indépendantes. Si un résultat n'est pas démontré, il pourra être admis dans la question suivante.

1 Loi exponentielle (7.5 points)

Dans cet exercice, nous étudions la variable X suivant la loi exponentielle de paramètre inconnu $\theta^\star$ dont nous rappelons la densité définie pour tout $\theta > 0$ par :

$$f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1.1. Calculer pour tout $m \in \mathbb{N}$ le moment d'ordre m de la loi. En déduire la valeur de la variance.

1.2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ et montrer qu'il est égal à :

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}.$$

1.3. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est asymptotiquement normal dont vous préciserez la variance.

1.4. Montrer que, sous certaines conditions que vous préciserez, l'intervalle

$$IC_{1-\alpha}(\theta^\star) = \left[\frac{\widehat{\theta}_n}{1+\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}; \frac{\widehat{\theta}_n}{1-\frac{q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}\right]$$

possède un niveau asymptotique $1-\alpha$.

2 Loi binomiale (7.5 points)

Dans cet exercice, nous étudions un n-échantillon de loi binomiale $\mathcal{B}in(m, \theta^\star)$ de paramètres m (supposé connu) et $\theta^\star$ que nous cherchons à estimer.

2.5. Calculer l'estimateur $\widetilde{\theta}_n$ basé sur le moment d'ordre 1. Montrer qu'il n'est pas possible de proposer un estimateur basé sur la variance sauf si nous savons que $\theta^\star$ appartient $[0; 1/2]$ ou à $[1/2; 1]$.

2.6. Montrer que $\widetilde{\theta}_n$ est sans biais. Est-il asymptotiquement sans biais ?

2.7. Donner la loi exacte de $\widetilde{\theta}_n$ et montrer qu'il est asymptotiquement normal.

2.8. Montrer que l'estimateur $\widetilde{\theta}_n$ est un *UMVU*.

3 Loi géométrique (5 points)

Dans cet exercice, nous étudions la loi géométrique de paramètre $\theta^\star \in]0;1[$ dont nous rappelons la densité définie pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ par :

$$f_{\theta^\star}(k) = (1-\theta^\star)^{k-1}\theta^\star.$$

Nous cherchons à tester les hypothèses :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta^\star = 1/4, \\ \mathcal{H}_1 : \theta^\star = 3/4. \end{cases}$$

3.9. Donner les ensembles Θ_0 et Θ_1 associés au test.

3.10. Montrer que la statistique du rapport de vraisemblance $h(\boldsymbol{X})$ est égale $g_n(\overline{X}_n)$ avec :

$$\begin{aligned} g_n : \mathbb{R}_\star^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto 9^n 3^{-nx}. \end{aligned}$$

3.11. En admettant que l'espérance d'une loi géométrique de paramètre p est $1/p$ et sa variance $(1-p)/p^2$, proposer un test uniformément plus puissant de niveau asymptotique $1-\alpha$.

3.12. (bonus) Calculer l'espérance et la variance admise à la question précédente.