

## Sujets de TER

### Mode d'emploi

Envoyer au responsable du M1 un message indiquant, soit une absence de préférence parmi tous les sujets proposés, soit les numéros de quatre sujets sur lesquels on souhaiterait travailler, ordonnés par préférence décroissante.

Le titre du message devra inclure la chaîne de caractères **M1 MG TER**.

Date limite d'envoi du message : **mardi 15 décembre 23h59**.

### Titres des sujets

1. Algorithme LLL de réduction de réseaux
2. Algorithme Zipper
3. Allumeurs de réverbères
4. Applications lipschitziennes et formules de changement de variables
5. Autour du théorème de la représentation conforme de Riemann
6. Axiomes de Gårding-Wightman et théorie quantique des champs
7. Cadran solaire digital
8. Comment optimiser son stationnement ?
9. Courbes elliptiques, entre algèbre, géométrie et analyse
10. Courbure des graphes et inégalités géométriques
11. Course aux armements
12. Espaces de Hardy de fonctions holomorphes
13. Extensions de corps et groupes de Galois
14. Factorisation de polynômes sur les corps finis
15. Formes modulaires
16. Graphes aléatoires, émergence de la composante géante
17. Graphes expandeurs et groupes finis
18. Groupes de réflexion finis
19. Groupes d'homotopie des sphères
20. Inégalités de concentration : application au problème de la détection d'anomalies
21. Le h-principe
22. Loi de réciprocité (bi)quadratique

23. Loi de réciprocité quadratique
24. Marches quantiques ouvertes
25. Méthode de Stein et inégalité de Berry-Esseen
26. Nombres de Hurwitz
27. Opérateurs d'intégrales singulières
28. Paradoxe de Banach-Tarski
29. Percolation critique et invariance conforme
30. Produits normalement ordonnés de champs
31. Propriétés de symétrie des solutions de certaines équations aux dérivées partielles
32. Que le meilleur gagne (ou pas...)
33. Quelques propriétés de l'opérateur divergence
34. Représentabilité abélienne
35. Résultant de deux polynômes et applications
36. Semi-groupes dynamiques quantiques
37. Surfaces minimales et représentation de Weierstrass-Enneper
38. Tests groupés et SARS-CoV-2
39. Métrique de Schwarzschild (ex-Thème numéro 1)
40. Équations de Maxwell (ex-Thème numéro 2)
41. Équation de Schrödinger (ex-Thème numéro 3)
42. Théorème "edge of the wedge"

## 1 Algorithme LLL de réduction de réseaux

Un réseau d'un espace euclidien est un sous-groupe discret de cet espace. Il est en général facile d'en donner une base en tant que  $\mathbb{Z}$ -module, ce qui permet d'en déduire des informations comme le déterminant, qui mesure le volume d'une « maille » (domaine fondamental) du réseau. Par contre, certains problèmes d'apparence simple, comme trouver le plus court vecteur non nul d'un réseau, sont étonnamment difficiles quand la dimension est grande. Ils sont d'ailleurs à la base de protocoles cryptographiques, comme le schéma de chiffrement NTRU.

Le but de ce TER est d'étudier et d'implémenter l'algorithme de *réduction de réseau* de Lenstra-Lenstra-Lovász. Assez proche de la méthode de Gram-Schmidt, il permet de calculer efficacement une base d'un réseau formée de « petits » vecteurs. Cet algorithme LLL ne fournit pas en général le vecteur le plus court d'un réseau, mais il est suffisamment performant pour attaquer des problèmes combinatoires comme le problème du *sac-à-dos*.

### Bibliographie

Steven D. Galbraith, *Mathematics of Public Key Cryptography*, Cambridge, 2012. Partie IV, principalement le chapitre 17.

[[www.math.auckland.ac.nz/~sgal018/crypto-book/crypto-book.html](http://www.math.auckland.ac.nz/~sgal018/crypto-book/crypto-book.html)]

## 2 Algorithme Zipper

Le théorème de l'application conforme assure que toutes les parties ouvertes simplement connexes du plan complexe qui ne sont ni vides ni égales au plan tout entier sont conformes entre elles. Autrement dit, étant donné un domaine  $\Omega$  homéomorphe au disque unité il existe une bijection holomorphe entre  $\Omega$  et le disque unité.

Le théorème fut énoncé, sous l'hypothèse plus forte d'une frontière  $\partial\Omega$  formée d'arcs différentiables, par Bernhard Riemann dans sa thèse en 1851. La démonstration de Riemann dépendait de l'existence d'une solution du problème de Dirichlet sur  $\Omega$ , existence admise à l'époque. Pourtant la méthode de Riemann ne s'applique pas quand la frontière  $\partial\Omega$  n'est pas suffisamment lisse. Ce cas fut résolu en 1900 par William Fogg Osgood.

Au début des années 1980, un algorithme élémentaire pour trouver une bijection holomorphe a été découvert indépendamment par Reiner Kühnau et par Donald E. Marshall. L'algorithme est rapide et précis et relativement facile à programmer.

On se donne  $n + 1$  points distincts du plan complexe et une région  $\Omega$  délimitée par une courbe de Jordan  $\gamma$  passant par ces points. L'algorithme fournit une suite de bijections holomorphes explicites qui converge vers une bijection holomorphe entre le disque unité et  $\Omega$ . La complexité de l'algorithme dépend de  $n$  mais pas de la courbe  $\gamma$  et l'algorithme converge rapidement, même pour des courbes  $\gamma$  peu régulières comme le flocon de Koch. On étudiera la méthode utilisée par Marshall et Steffen Rohde pour établir la conver-

gence. En particulier on verra comment la vitesse de convergence varie selon la régularité de  $\gamma$ .

Si le temps le permet on développera des applications en informatique et on fera une comparaison avec d'autres méthodes numériques : transformations de Schwarz-Christoffel et empilements de cercles.

### Prérequis

Fonctions holomorphes au premier semestre.

### Bibliographie

Donald E. Marshall, Steffen Rohde, Convergence of the Zipper algorithm for conformal mapping. *SIAM J. Numer. Anal.*, 45(6), 2577-2609, 2007.

[arXiv:math/0605532]

Eitan Sharon, David Bryant Mumford, 2D-shape analysis using conformal mapping. *International Journal of Computer Vision*, 70(1) : 55-75, 2006.

[dash.harvard.edu/handle/1/3720034]

## 3 Allumeurs de réverbères

Il s'agit de considérer un curieux objet mathématique : le groupe de l'allumeur de réverbères. On se munit de copies de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , notées  $L_i$  pour  $i \in \mathbb{Z}$ , et on considère

$$\left( \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L_i \right) \rtimes \mathbb{Z},$$

où le produit semi-direct est donné par le décalage des indices.

Imaginons une rue infinie, avec des réverbères indexés par  $\mathbb{Z}$ . Chaque réverbère porte une lampe, allumée ou éteinte, et dans la rue se promène un allumeur de réverbère. L'ensemble des configurations possibles (lampes allumées et position de l'allumeur) peut être naturellement identifié à ce groupe, le groupe de l'allumeur de réverbères.

De nombreuses curiosités sont accessibles dans la géométrie du groupe (ou de cet espace de configurations) ou de ses variantes, comme l'existence de culs-de-sac, le lien avec certains graphes dits de Diestel-Leader, la croissance du volume des boules, voire des considérations spectrales d'opérateurs de moyennisation.

### Bibliographie

Jennifer Taback, Lamplighter Groups, chapitre 15 de *Office Hours with a Geometric Group Theorist*, Princeton, ed. Matt Clay, Dan Margalit, 2017.

## 4 Applications lipschitziennes et formules de changement de variables

Il existe des formules de changement de variables pour les fonctions lipschitziennes de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  : ce sont les formules d'aire si  $n \leq m$  et de co-aire si  $n \geq m$ .

Le but du stage est de démontrer ces formules et d'en étudier des applications géométriques, comme le calcul de la longueur d'une courbe ou de l'aire d'une surface.

### Prérequis

Cours de théorie de la mesure et de calcul différentiel de L3.

### Bibliographie

Lawrence Craig Evans, Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 2015.

## 5 Autour du théorème de la représentation conforme de Riemann

Le théorème de la représentation conforme de Riemann affirme que tout domaine simplement connexe du plan complexe différent du plan est biholomorphe au disque unité. Un domaine est simplement connexe si et seulement si les composantes connexes de son complémentaire sont toutes non bornées ce qui équivaut à dire que son complémentaire dans la sphère de Riemann est connexe.

Une preuve de ce théorème a été donnée dans le cours de Fonctions holomorphes, utilisant la notion de famille normale. Ce n'est pas l'idée de la « preuve » originale de Bernhard Riemann (1851). La première preuve rigoureuse, donnée par William Fogg Osgood en 1900, utilise le principe de Dirichlet et consiste à construire une fonction harmonique sur un ouvert, de valeur donnée sur le bord de l'ouvert, comme minimisant une intégrale.

Le but du stage est de comprendre et de donner une preuve rigoureuse du théorème de la représentation conforme de Riemann en utilisant la méthode de Riemann.

### Prérequis

Le cours d'Analyse complexe du premier semestre.

### Bibliographie

Robert E. Greene, Kang-Tae Kim, The Riemann mapping theorem from Riemann's viewpoint, *Complex Analysis and its Synergies*, 3 (1), 2017. [[arXiv:1604.04071](https://arxiv.org/abs/1604.04071)]

Joseph L. Walsh, History of the Riemann Mapping Theorem, *The American Mathematical Monthly*, 80 (3), 1973, 270-276.

## 6 Axiomes de Gårding-Wightman et théorie quantique des champs

Les axiomes de Gårding-Wightman ont été proposés par Lars Gårding et Arthur Wightman en 1964. Ils donnent un cadre théorique pour étudier la théorie quantique des champs (QFT). On se propose d'étudier la formalisation de la QFT au moyen de ces axiomes, en accordant une attention spéciale aux théories libres.

### Bibliographie

Pierre Deligne, Pavel Etingof, Daniel S. Freed, Lisa C. Jeffrey, David Kazhdan, John W. Morgan, David R. Morrison, Edward Witten (eds.), *Quantum fields and strings : a course for mathematicians*, Volumes 1 and 2, American Mathematical Society, Providence, 1999.

Walter Rudin, *Functional analysis*, 2nd ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

Raymond F. Streater, Arthur S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, Princeton Landmarks in Physics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000. Corrected third printing of the 1978 edition.

## 7 Cadran solaire digital

En 1987, Kenneth Falconer a montré qu'il existe une façon de construire un objet physique dont l'ombre à chaque heure est cette heure écrite en chiffres.

Plus mathématiquement, étant donnée une famille  $(\theta_i)_{i \in I}$  de directions dans l'espace de dimension 3 et une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'ensembles mesurables dans le plan, il montre l'existence d'un ensemble mesurable  $A$  dans l'espace tel que, pour tout  $i \in I$ , la projection orthogonale de  $A$  sur un plan dans la direction  $\theta_i$  est exactement  $A_i$  (à des « presque partout » près).

Il existe plusieurs constructions d'un tel objet en plus de celle de Falconer, et le but du TER est d'en explorer quelques unes. Par exemple, on peut passer par la géométrie fractale, ou sous des hypothèses additionnelles sur les projections, réaliser  $A$  de manière explicite « par couches ». (C'est d'ailleurs ainsi que sont fabriqués les cadrans solaires que l'on trouve dans le commerce.)

Si tout se passe bien, il sera possible de fabriquer pour de vrai un tel objet, et d'en faire la démonstration le jour de la soutenance.

## Prérequis

Selon la méthode, un peu de théorie de la mesure, de la géométrie euclidienne en dimension 3, et (si tout se passe bien, donc) un peu de programmation et de travaux manuels.

## Bibliographie

Kenneth Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 2003.

Ian Stewart, *What in heaven is a digital sundial ?*. Scientific American, vol. 265, issue 2, 104-106, 1991.

Un exemple : <http://www.fransmaes.nl/genk/en/gk-zw08-e.htm>

## 8 Comment optimiser son stationnement ?

Imaginez que vous vous rendez en voiture dans un endroit très intéressant (l'Institut Fourier par exemple) et que vous arrivez au bout du parking qui est une (très) longue allée au bout de laquelle se trouve votre destination. Vous vous demandez quelle est la stratégie optimale pour perdre le moins de temps : devez-vous vous arrêter à la première place libre qui se présente à vous puis marcher (longtemps du coup), ou bien espérer trouver une place au plus près, quitte à recommencer depuis le début du parking si besoin ?

Pour aborder cette question, on étudiera l'article en référence, qui propose une simulation basée sur des processus de Poisson afin de comparer différentes stratégies possibles.

Un des buts du stage sera de s'approprier la théorie des processus de Poisson afin de redémontrer les résultats de l'article, et de proposer des simulations pour les vérifier empiriquement.

## Mots-clefs

Processus de Poisson, optimisation, simulations.

## Bibliographie

Pavel L. Krapivsky, Sydney Redner (2019). Simple parking strategies. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2019(9), 093404. [arXiv:1904.06612]

Dominique Foata, Aimé Fuchs (2002). *Processus stochastiques : Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales*, Dunod, Paris.

## 9 Courbes elliptiques, entre algèbre, géométrie et analyse

La courbe elliptique complexe est un objet multiforme puisque c'est à la fois (une compactification du) lieu lisse des zéros d'un polynôme cubique en deux variables, une surface de Riemann topologiquement équivalente à un tore, et un groupe abélien algébrique.

Le but du stage est de démontrer que ces trois descriptions sont en fait équivalentes et d'examiner le problème des modules, c'est-à-dire la construction d'un espace géométrique dont les points sont en bijection naturelle avec toutes les courbes elliptiques possibles.

Le périmètre du travail sera adapté aux connaissances de l'étudiant. Notamment, si l'étudiant suit le cours de magistère au second semestre, on ira plus loin que dans le cas contraire.

### Prérequis

Le cours de Fonctions holomorphes du premier semestre.

### Bibliographie

Frances Kirwan, *Complex algebraic curves*, London Mathematical Society Student Texts 23, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

C. Herbert Clemens, *A scrapbook of complex curve theory*, University Series in Mathematics, Springer, 1980.

## 10 Courbure des graphes et inégalités géométriques

Un graphe (discret) est la donnée d'une famille de points (les sommets) et d'une famille d'arêtes, joignant certains sommets. Par exemple, le graphe associé à un groupe finiment engendré s'appelle le graphe de Cayley du groupe. Par ailleurs, un graphe peut être muni d'une structure naturelle d'espace métrique mesuré. Sous des conditions géométriques de type courbure, il est alors possible de faire de l'analyse sur ces espaces.

Un des buts du stage sera de démontrer des inégalités géométriques sur les graphes à courbure positive.

### Prérequis

Théorie de la mesure et topologie de L3. Pas de connaissance requise en géométrie riemannienne.

### Bibliographie

Thierry Coulhon, Laurent Saloff-Coste, Isopérimétrie pour les variétés et les groupes, *Revista Matemática Iberoamericana* 9 (1993), 293-314.  
[[pi.math.cornell.edu/~lsc/papers/iso-rev.pdf](http://pi.math.cornell.edu/~lsc/papers/iso-rev.pdf)]



## 11 Course aux armements

Une population de parasites ou de virus soumise à un traitement, ou une population de virus qui infecte un nouvel hôte auquel elle n'est pas adaptée, peut rapidement décroître, voire s'éteindre. Un moyen cependant pour cette population d'éviter l'extinction est d'acquérir de nouvelles mutations lui permettant de résister au traitement ou de s'adapter à son nouvel hôte. La valeur du taux de mutation est alors cruciale, car si cette valeur est trop faible, la population n'aura pas le temps de s'adapter et elle s'éteindra.

Pour mieux comprendre les dynamiques possibles dans un tel contexte, on partira d'un modèle simple. On supposera que les parasites meurent et se divisent de manière indépendante et qu'ils évoluent suivant un processus de branchement, initialement sous-critique. On fera également l'hypothèse que les individus peuvent muter pour s'adapter à leur environnement.

On commencera par considérer un cas simple avec seulement deux types possibles dans la population : un type « non adapté », et un type « adapté », le premier type pouvant muter vers le second type. On pourra ensuite s'intéresser à des modèles plus riches, dans lesquels plusieurs mutations successives peuvent être nécessaires pour qu'un individu devienne adapté.

### Bibliographie

Maria Conceição Serra. On the waiting time to escape, *Journal of Applied Probability*, 43.1 (2006) : 296-302. [[doi.org/10.1239/jap/1143936262](https://doi.org/10.1239/jap/1143936262)]

Serik Sagitov, Maria Conceição Serra, Multitype Bienaymé-Galton-Watson processes escaping extinction, *Advances in Applied Probability*, 41.1 (2009) : 225-246. [[www.math.chalmers.se/~serik/Papers/SagitovSerra.pdf](http://www.math.chalmers.se/~serik/Papers/SagitovSerra.pdf)]

Jasmine Foo, Kevin Leder, Dynamics of cancer recurrence, *The Annals of Applied Probability*, 23.4 (2013) : 1437-1468. [[projecteuclid.org/euclid.aoap/1371834034](http://projecteuclid.org/euclid.aoap/1371834034)]

## 12 Espaces de Hardy de fonctions holomorphes

On note  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$  et  $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$ . Si  $1 \leq p < \infty$  et si  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe, on dit que  $f \in H^p(\mathbb{D})$  si et seulement si

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt < +\infty.$$

Les espaces  $H^p(\mathbb{D})$  s'appellent les espaces de Hardy. Ce stage sera consacré à l'étude des propriétés des fonctions de ces espaces.

On verra en particulier que les fonctions de  $H^p(\mathbb{D})$  admettent une limite radiale en presque tout point de  $\mathbb{T}$ , et que cette limite appartient à  $L^p(\mathbb{T})$ . On considèrera aussi des applications de ces espaces à des théorèmes de Paley-Wiener, qui relie le support d'une fonction au comportement de sa transformée de Fourier.

### Prérequis

Le contenu des cours de Fonctions holomorphes au premier semestre du M1 et de Calcul intégral en L3.

### Bibliographie

Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1986.

## 13 Extensions de corps et groupes de Galois

Nous étudierons les extensions algébriques et leur groupe de Galois, ce qui nous mènera à la correspondance de Galois. Nous nous pencherons sur des exemples et nous appliquerons la théorie à la résolubilité par radicaux des équations polynomiales.

### Prérequis

Le cours d'Algèbre 1 du M1.

### Bibliographie

Jean-Pierre Escofier, *Théorie de Galois*, Dunod, 1997.

## 14 Factorisation de polynômes sur les corps finis

Un résultat classique d'algèbre commutative est que tout polynôme à coefficients dans un corps se décompose de façon unique en un produit de polynômes irréductibles. Mais calculer une telle décomposition en pratique n'est pas toujours évident.

Le but de ce TER est d'étudier deux méthodes dans le cas des corps finis : l'algorithme de Berlekamp et l'algorithme de Cantor-Zassenhaus. Dans les deux cas, une première étape, non spécifique aux corps finis, consiste à éliminer les facteurs carrés. La compréhension théorique de ces algorithmes et de leur complexité sera complétée par une implémentation, par exemple en SageMath.

Pour aller plus loin, il sera possible de regarder comment le cas des corps finis peut servir pour factoriser dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

### Bibliographie

Joachim von zur Gathen, Daniel Panario, *Factoring Polynomials Over Finite Fields : A Survey*, Journal of Symbolic Computation, Volume 31, Issues 1-2, 3-17, 2001.  
[doi.org/10.1006/jscs.1999.1002]

Page Wikipedia *Factorization of polynomials over finite fields* (très détaillée et avec de nombreuses références).

[[en.wikipedia.org/wiki/Factorization\\_of\\_polynomials\\_over\\_finite\\_fields](https://en.wikipedia.org/wiki/Factorization_of_polynomials_over_finite_fields)]

## 15 Formes modulaires

Les formes modulaires sont des fonctions holomorphes définies sur le demi-plan supérieur et invariantes sous l'action du groupe modulaire. On compte parmi elles les célèbres fonctions thêta associées à des réseaux dans  $\mathbb{R}^n$ . Les formes modulaires ont de jolies propriétés qu'on explorera, et sont devenues incontournables en physique théorique.

L'objectif de ce stage sera donc d'étudier ces fonctions et de comprendre comment elles interviennent en mathématiques et en physique. On pourra même tenter de s'approcher de l'équation d'anomalie holomorphe en théorie des cordes.

### Prérequis

Ne pas avoir peur du cours sur les fonctions holomorphes.

## 16 Graphes aléatoires, émergence de la composante géante

Les modèles de graphes aléatoires sont utilisés pour étudier le comportement des réseaux dans de nombreux domaines tels que l'informatique (réseaux informatiques), l'épidémiologie (réseaux de contacts sociaux) et la chimie (réseaux d'atomes). Dans le modèle le plus simple, on considère un graphe  $G(n, p(n))$  sur un nombre  $n$  de sommets tel que chaque arête entre deux sommets distincts se forme avec une probabilité  $p(n)$ , les formations d'arêtes étant indépendantes les unes des autres.

Il est fréquent dans ce modèle d'observer des ruptures dans le comportement macroscopique du graphe aléatoire  $G(n, p(n))$  quand  $n$  devient grand, en fonction des probabilités  $p(n)$ . Plus précisément, pour beaucoup de propriétés  $P$  du graphe aléatoire  $G(n, p(n))$  (comme le fait d'être connexe, de posséder une composante de grande taille, etc.), il existe une *fonction seuil*  $f_P$  telle que :

- si  $p(n)/f_P(n) \rightarrow c$  avec  $c < 1$ , alors la probabilité que  $G(n, p(n))$  possède la propriété  $P$  converge vers 0 ;
- si  $p(n)/f_P(n) \rightarrow c$  avec  $c > 1$ , alors la probabilité que  $G(n, p(n))$  possède la propriété  $P$  converge vers 1.

Dans ce stage, on examinera les fonctions seuils  $f_P$  de la propriété  $P$  : « posséder une composante géante ». Plus précisément, pour chaque  $\lambda > 0$ , on étudiera le comportement asymptotique de la probabilité que  $G(n, p(n))$  possède une composante de taille au moins  $\lambda n$ , dont on identifiera les fonctions seuils.

Si le temps le permet, on pourra étudier le cas critique  $p(n)/f_P(n) \rightarrow 1$  plus en détail, ou s'essayer à des simulations informatiques.

## Prérequis

Une bonne maîtrise de la combinatoire élémentaire et des probabilités élémentaires.

## Bibliographie

Béla Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge University Press, 1985.

## 17 Graphes expandeurs et groupes finis

Un graphe fini (donné par un ensemble fini de sommets  $S$ , et un ensemble d'arêtes, reliant certains de ces sommets) est un  $\epsilon$ -expandeur lorsque, pour toute partie  $A$  de  $S$ , soit  $A$  contient plus que la moitié des sommets, soit l'ensemble des sommets connectés à  $A$  mais hors de  $A$  est de cardinal au moins  $\epsilon|S|$ .

On s'intéresse, à  $\epsilon$  fixé, à des graphes  $\epsilon$ -expandeurs. Nous les souhaitons très grands, mais sans faire exploser le nombre de voisins de chaque sommet. Dans ce TER, nous verrons sur des exemples qu'il n'est pas si facile d'en construire. Nous verrons aussi quelques propriétés remarquables de ces graphes, en termes d'opérateur du Laplacien ou de comportement de marches aléatoires.

Une construction célèbre de graphes expandeurs arbitrairement grands, due à Gregory Margulis, provient de la théorie des représentations unitaires du groupe  $SL_3(\mathbb{Z})$ , et de ses quotients finis. Selon le temps et les préférences, on sélectionnera des aspects abordables de cette approche.

## Bibliographie

Alexander Lubotzky, Expander Graphs in Pure and Applied Mathematics, *Bulletin of the AMS (New Series)*, 49 (1), 113-162, 2012. [arXiv:1105.2389]

Alain Valette, Graphes de Ramanujan et applications, *Astérisque* no. 245 (1997), Exposé no. 829, 247-276. [www.numdam.org/article/SB\_1996-1997\_\_39\_\_247\_0.pdf]

## 18 Groupes de réflexion finis

Les groupes diédraux en dimension 2, comme le groupe des permutations des coordonnées dans  $\mathbb{R}^n$  euclidien, sont des exemples de groupes finis engendrés par des réflexions. Soit  $E$  un espace euclidien, l'étude générale des sous-groupes finis  $W$  de  $O(E)$  engendrés par des réflexions est intimement liée à celle de leur action sur les *systèmes de racines* de  $E$ , définies comme des configurations finies de vecteurs satisfaisant certaines propriétés géométriques, comme l'invariance par les réflexions de  $W$ .

L'étude géométrique correspondante nous amènera à décrire le groupe  $W$  comme engendré par ses *réflexions simples*  $s_\alpha$ , les seules relations entre ces réflexions étant les *relations de Coxeter*  $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1$ .

Cette présentation du groupe  $W$  est codée par le *graphe de Coxeter* de  $W$ . On associera à ce graphe une forme bilinéaire qui permet de classifier les groupes de réflexion à isomorphisme près. On décrira ainsi les systèmes de racines associés et l'ordre de  $W$ .

### Prérequis

Algèbre bilinéaire de L2, cours d'Algèbre de L3 sur les groupes.

### Bibliographie

James Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, CSAM 29, 1990, chapitres 1 et 2.

## 19 Groupes d'homotopie des sphères

Les groupes d'homotopie  $\pi_k X$  d'un espace topologique  $X$  sont des invariants qui généralisent le groupe fondamental, obtenu pour  $k = 1$ . Pour  $k \geq 2$ , ces groupes sont abéliens mais leur calcul reste difficile. Déjà pour la sphère  $S^n$  de dimension  $n$  le calcul n'est pas envisageable pour  $k$  et  $n$  quelconques.

On tentera de comprendre quelques calculs des groupes  $\pi_k S^n$ , la propriété de stabilité (quand  $n$  est grand par rapport à  $k - n$ ) et aussi le lien avec certains groupes de cobordisme de variétés grâce à l'isomorphisme de Thom-Pontryagin.

Le travail proposé est donc l'occasion de rencontrer des notions clés en topologie algébrique et en topologie différentielle. Il serait préférable d'avoir suivi le cours de magistère sur le groupe fondamental.

### Bibliographie

Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge, 2002.

[[pi.math.cornell.edu/~hatcher](http://pi.math.cornell.edu/~hatcher)]

John W. Milnor, *Topology from the differential viewpoint*, 1965.

## 20 Inégalités de concentration : application au problème de la détection d'anomalies

Les inégalités de concentration fournissent des majorants de la probabilité qu'une variable aléatoire  $X$  s'éloigne d'une certaine valeur prescrite (généralement sa moyenne ou sa médiane). Un exemple simple est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev bien connue, qui stipule que, pour toute variable aléatoire  $X$  de carré intégrable et de variance  $\sigma^2$  et pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \sigma^2/a^2.$$

Le premier but du stage sera d'étudier plusieurs inégalités de concentration : inégalité de Hoeffding, inégalité de Bernstein, inégalité de concentration gaussienne, etc. Puis on étudiera l'article d'Addario-Berry et al. donné en référence, qui s'intéresse au problème de la détection d'un sous-échantillon « contaminé » au sein d'un échantillon gaussien.

### Prérequis

Le contenu d'un cours de L3 en probabilités et le cours de M1 de statistique.

### Bibliographie

Stéphane Boucheron, Gábor Lugosi, Pascal Massart (2013). *Concentration inequalities : A nonasymptotic theory of independence*, Oxford University Press. Chapitres 1 et 2.

Louigi Addario-Berry, Nicolas Broutin, Luc Devroye, Gábor Lugosi (2010). On combinatorial testing problems, *Annals of Statistics*, 38 (5), 3063-3092.

[[projecteuclid.org/euclid.aos/1283175989](http://projecteuclid.org/euclid.aos/1283175989)]

## 21 Le h-principe

Comment retourner une sphère sans la déchirer mais en permettant qu'elle s'auto-intersecte ? Stephen Smale a démontré en 1957 que c'était théoriquement possible et on trouve facilement de nos jours des vidéos expliquant comment le faire effectivement. Il s'agit en fait ici de classifier les immersions  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la sphère dans l'espace euclidien. Le problème se généralise aux immersions  $M \rightarrow N$  entre deux variétés quelconques, il est « résolu » (au sens de, ramené à un autre problème) dans le cas où  $M$  est de codimension au moins 1 dans  $N$ .

Cette question et bien d'autres qui lui sont reliées ont été abordées par Mikhail Gromov à la fin des années 60 sous l'angle de ce que Gromov a baptisé « h-principe ». Quand ce principe s'applique, un problème géométrique (difficile, ou en tout cas perturbant) est ramené à un problème plus simple (de nature plutôt algébrique).

L'objectif sera de comprendre la formulation du h-principe ainsi que le théorème de Gromov selon lequel le h-principe est valide pour toute relation différentielle invariante et ouverte. On suivra la démonstration de Yakov Eliashberg et Nikola Mishachev, basée sur la méthode dite d'approximation holonome. Enfin, on étudiera des applications de ce théorème, en particulier concernant les immersions.

### Prérequis

Un attrait pour la géométrie et la topologie (et la marche en montagne) serait bienvenu.

### Bibliographie

Yakov Eliashberg, Nikola Mishachev, *Introduction to the h-principle*, Graduate studies

in Mathematics, AMS, 2002.

Vincent Borrelli, *Introduction au h-principe*, notes de cours.  
[math.univ-lyon1.fr/homes-www/borrelli]

## 22 Loi de réciprocité (bi)quadratique

Il est connu que pour  $p$  nombre premier impair qui ne divise pas l'entier  $a$ , la congruence  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  admet une solution si et seulement si  $a^{\frac{(p-1)}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ . Vue dans  $\mathbb{F}_p$ , cette puissance de  $a$  est la valeur d'un caractère (c'est-à-dire, un morphisme dans  $\mathbb{C}^\times$ ) d'ordre 2 du groupe  $\mathbb{F}_p^\times$  : le symbole de Legendre. Inversant le point de vue, la *loi de réciprocité quadratique* permet de savoir,  $a$  étant fixé, pour quels premiers  $p$  la congruence  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  admet une solution. D'abord formulée par Euler et Legendre, ce fut Gauss qui en donna la première preuve en 1801, la baptisant le *théorème d'or*.

Cette loi a par la suite été très largement généralisée, par étapes successives. Dans ce TER il s'agira ainsi d'étudier également la *loi de réciprocité biquadratique* énoncée par Gauss : la considération des carrés modulo un nombre premier  $y$  est remplacée par celle des *puissances quatrièmes* modulo un irréductible de l'anneau  $\mathbb{Z}[i]$ . On considèrera pour cela un caractère biquadratique, généralisation adéquate du symbole de Legendre. On montrera également une version rationnelle de cette loi, qui relie les deux propriétés, pour  $p$  et  $q$  nombres premiers distincts congrus à 1 modulo 4, que l'un soit ou non une puissance quatrième modulo l'autre.

Pour mener à bien cette étude, on développera les propriétés des *sommes de Gauss* puis des *sommes de Jacobi* associées à différents caractères sur  $\mathbb{F}_p$ . Suivant André Weil, on étudiera leurs applications arithmétiques au dénombrement de solutions d'équations polynomiales sur  $\mathbb{F}_p$ , découvrant au passage une seconde preuve de la loi de réciprocité quadratique.

### Prérequis

Anneaux et corps au premier semestre du M1.

### Bibliographie

Kenneth Ireland, Michael Rosen, *A classical introduction to modern number theory*, Springer, 1990, 2d ed., chapitres 6, 8 et 9, partiellement.

## 23 Loi de réciprocité quadratique

En théorie des nombres, la loi de réciprocité quadratique établit des liens entre les nombres premiers ; plus précisément, elle décrit la possibilité d'exprimer un nombre premier comme un carré modulo un autre nombre premier. Conjecturée par Leonhard Euler

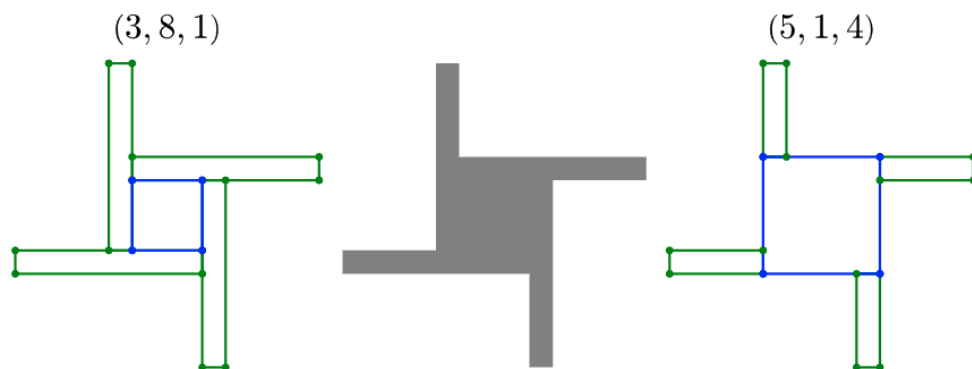
et reformulée par Adrien-Marie Legendre, elle a été correctement démontrée pour la première fois par Carl Friedrich Gauss en 1801. Elle permet de résoudre les deux problèmes de base de la théorie des résidus quadratiques, est considérée comme un des théorèmes les plus importants de la théorie des nombres, et donne lieu à de nombreuses généralisations. Rappelons-la.

**Théorème fondamental.** Étant donnés deux nombres premiers impairs distincts  $p$  et  $q$  :

- si  $p$  ou  $q$  est congru à 1 modulo 4, alors  $p$  est un carré modulo  $q$  si et seulement si  $q$  est un carré modulo  $p$ .
- si  $p$  et  $q$  sont congrus à 3 modulo 4, alors  $p$  est un carré modulo  $q$  si et seulement si  $q$  n'est pas un carré modulo  $p$ .

Les premières démonstrations aujourd'hui considérées comme complètes sont publiées par Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticae* en 1801. Aujourd'hui on compte plus de 200 démonstrations de ce résultat, dont une preuve de Don Zagier remarquable car tenant en une ligne.

On va étudier trois preuves de ce résultat, basées respectivement sur les propriétés de la division euclidienne dans les entiers de Gauss, sur les modules libres de rang 2 suivant Lucas, et sur l'involution de Zagier et son interprétation en termes de la combinatoire des moulins à vents découverte par Alexander Spivak en 2006. On mettra en avant la géométrie sous-jacente à ces preuves.



### Prérequis

L'UE Algèbre 1 au premier semestre du M1.

### Bibliographie

Christian Elsholtz, A combinatorial approach to sums of two squares and related problems, *Additive Number Theory : Festschrift in Honor of the sixtieth birthday of Melvyn*



B. Nathanson, Springer Verlag, 2010, pages 115-140.

[[www.math.tugraz.at/~elsholtz/WWW/papers/papers.html](http://www.math.tugraz.at/~elsholtz/WWW/papers/papers.html)]

Stan Wagon, The Euclidean algorithm strikes again. *Amer. Math. Monthly* 97(2) (1990), 125–129.

Don Zagier, A one-sentence proof that every prime  $p = 1 \pmod{4}$  is a sum of two squares, *Amer. Math. Monthly* 97(2) (1990), 144.

[[people.mpim-bonn.mpg.de/zagier](http://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier)]

Zagier’s one-sentence proof of a theorem of Fermat, page du site MathOverflow.

[[mathoverflow.net/questions/31113](http://mathoverflow.net/questions/31113)]

## 24 Marches quantiques ouvertes

La notion de marche aléatoire en probabilité possède des généralisations non commutatives inspirées de la physique, appelées marches quantiques. Parmi celles-ci, figurent les marches quantiques ouvertes, définies par analogie avec les chaînes de Markov classiques. Plus prosaïquement, une marche quantique, ouverte ou non, est un système dynamique linéaire discret sur des suites de matrices possédant certaines propriétés algébriques.

Dans ce stage, on se concentrera sur le comportement asymptotique des systèmes dynamiques définis par certaines marches quantiques ouvertes. Plus précisément, après familiarisation avec certains aspects du formalisme général, on considèrera des marches quantiques ouvertes dites invariantes par les translations, dont on étudiera les propriétés spectrales au moyen de la théorie des séries de Fourier. On s’inspirera des exemples numériques de la littérature.

### Bibliographie

Robert Alicki, Mark Fannes, *Quantum Dynamical Systems*, Oxford University Press, 2001.

Michael M. Wolf, *Mathematical Introduction to Quantum Information Processing*. Notes de cours disponibles sur le web, 2019.

Stéphane Attal, Francesco Petruccione, Christophe Sabot, Ilya Sinayskiy, Open Quantum Random Walks, *Journal of Statistical Physics*, **147**, 832-852 (2012).

[[hal.archives-ouvertes.fr/hal-00581553v2](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00581553v2)]

## 25 Méthode de Stein et inégalité de Berry-Esseen

Pour  $Z$  une variable aléatoire et  $f$  une fonction réelle, notons

$$\mathcal{A}_f(Z) := \mathbb{E} [f'(Z) - Zf(Z)].$$

Le lemme de Stein stipule que  $\mathcal{A}_f(Z) = 0$  pour toute fonction  $f$  continue  $C^1$  par morceaux, si et seulement si  $Z$  suit la loi gaussienne centrée réduite.

À partir de ce constat, l'idée de la méthode de Stein consiste à considérer

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(W) := \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{A}_f(W)$$

et à remarquer que si, pour  $\mathcal{F}$  un ensemble convenable de fonctions,  $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(W)$  est proche de 0, alors la loi de  $W$  doit être proche de la loi gaussienne. Plus précisément, un contrôle de  $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}(W)$  permet d'obtenir un contrôle de la "distance" entre la loi de  $W$  et la loi gaussienne centrée réduite.

Le but du stage sera d'étudier cette méthode (pour la loi gaussienne et pour d'autres) et comment elle permet d'obtenir une inégalité de Berry-Esseen (cette dernière donnant la vitesse de convergence du théorème de la limite centrale).

### Prérequis

Le contenu d'un cours de L3 en probabilités.

### Bibliographie

Vydas Čekanavičius (2016). *Approximation methods in probability theory*, Springer, Universitext. Chapitre 11.

Erik Thomas (2020), *L'inégalité de Berry-Esseen par la méthode de Stein et une version quantitative du théorème central limite*. [[erikthomasmaths.com](http://erikthomasmaths.com)]

## 26 Nombres de Hurwitz

Les nombres de Hurwitz énumèrent les revêtements ramifiés holomorphes de la sphère. Ces nombres peuvent se calculer par des méthodes combinatoires. Les séries génératrices correspondantes possèdent des propriétés étonnantes provenant tout droit de la théorie des cordes en physique, notamment du phénomène appelé symétrie miroir.

L'objectif de ce stage sera de découvrir ces nombres, leurs propriétés et leurs relations avec le monde des surfaces de Riemann. On pourra même introduire le formalisme d'Eynard-Orantin pour les généraliser et ainsi aller plus loin dans l'étude du sujet.

### Prérequis

Un peu de groupe symétrique, de fonctions holomorphes, de géométrie et de combinatoire.

### Bibliographie

Renzo Cavalieri, Eric Miles, *Riemann surfaces and algebraic curves : A First Course in Hurwitz Theory*, Cambridge, 2016.

## 27 Opérateurs d'intégrales singulières

Voici un théorème : Soit  $p > 1$  fini. Si la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$  et si  $\Delta f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n)$  pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ .

Un aspect remarquable de ce résultat est qu'une information sur le laplacien suffit à en obtenir sur *toutes* les dérivées partielles d'ordre 2.

Dans ce stage, on verra comment démontrer ce résultat. Pour cela, on étudiera des opérateurs  $T : f \mapsto Tf$  de la forme

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy,$$

où  $K$  est une fonction mesurable sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , appelée le noyau de  $K$ , vérifiant certaines hypothèses de taille et de régularité. On montrera que, sous certaines hypothèses, les opérateurs  $T$  sont continus sur  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , pour  $p > 1$  fini. On donnera aussi des applications à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles.

### Prérequis

Le contenu d'un cours de L3 en théorie de la mesure.

### Bibliographie

Yves Meyer, *Ondelettes et opérateurs II*, Hermann, 1990.

## 28 Paradoxe de Banach-Tarski

Le paradoxe de Banach-Tarski est célèbre sous la forme suivante : une boule dans  $\mathbb{R}^3$  peut être divisée en un nombre fini de morceaux (non mesurables) avec lesquels on peut reconstruire deux boules de la même taille. L'énoncé initial du paradoxe est bien plus fort : dans  $\mathbb{R}^n$ , tous les ensembles  $A$  et  $B$  d'intérieurs bornés et non vides sont équi-décomposables, en d'autres termes, on peut décomposer  $A$  en un nombre fini de morceaux à partir desquels on peut reconstruire  $B$ .

Le but principal du TER sera de comprendre la démonstration du paradoxe de Banach-Tarski à partir des articles originaux de Stefan Banach et Alfred Tarski, que ces deux mathématiciens polonais ont écrits en français. Le cas échéant, on pourrait s'aventurer à examiner l'échec du paradoxe en dimension 2, ou bien le nombre minimal de morceaux nécessaires à un dédoublement de la boule, ou encore le rôle de l'axiome du choix dans la validité du théorème.

### Prérequis

De l'algèbre et de la topologie de L3, et une absence d'aversion pour la logique mathé-

matique.

### Bibliographie

Stefan Banach, Alfred Tarski (1924), Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, *Fundamenta Mathematicae*.

Felix Hausdorff (1914), Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen, *Mathematische Annalen* (optionnel).

Casimir Kuratowski (1924), Une propriété des correspondences biunivoques, *Fundamenta Mathematicae*.

Stan Wagon (1985), *The Banach Tarski Paradox*, Cambridge University Press.

## 29 Percolation critique et invariance conforme

La percolation est un des modèles de mécanique statistique les plus simples à définir, mais elle reste dans l'ensemble assez mal comprise. Une version est la suivante : sur le réseau hexagonal dans le plan, on colorie indépendamment chaque face en bleu avec probabilité  $p$  et en jaune avec probabilité  $1 - p$ ; on s'intéresse à la géométrie des composantes connexes bleues. Il n'est pas difficile de prouver que pour  $p$  petit, toutes ces composantes sont bornées avec probabilité 1, alors que pour  $p$  proche de 1, il existe une composante non bornée, et on sait que la transition entre ces deux régimes se fait pour  $p = 1/2$ .

Dans le régime critique  $p = 1/2$ , toutes les composantes connexes bleues sont encore finies mais la plus grande composante dans une région de taille  $L$  est elle aussi de taille d'ordre  $L$  (il n'y a pas d'échelle caractéristique). Un des résultats les plus marquants dans ce domaine, qui a (entre autres) valu en 2010 à Stanislav Smirnov la médaille Fields, est la preuve de la convergence, quand  $n \rightarrow \infty$ , de la probabilité qu'il existe une composante bleue traversant le rectangle  $[0, \lambda n] \times [0, n]$  dans le sens de la largeur, vers une fonction explicite de  $\lambda$  donnée par une formule dite *formule de Cardy*.

On a en fait un résultat beaucoup plus frappant. Si  $\Omega$  est une région simplement connexe du plan complexe, et  $I$  et  $J$  sont deux intervalles du bord de  $\Omega$ , on peut regarder la probabilité pour que dans le domaine  $n\Omega$  (zoomé d'un facteur  $n$ ), il existe une composante bleue reliant  $nI$  à  $nJ$  : quand  $n \rightarrow \infty$ , cette probabilité converge vers une limite  $\pi(\Omega, I, J)$  (c'est le résultat de Smirnov), et cette limite est invariante par transformation conforme, ce qui signifie que, si  $\Phi : \Omega \rightarrow \Phi(\Omega)$  est une transformation conforme, alors

$$\pi(\Phi(\Omega), \Phi(I), \Phi(J)) = \pi(\Omega, I, J).$$

L'extension de ce résultat à d'autres réseaux reste une question ouverte majeure.

Le but du TER sera de comprendre suffisamment les bases de la théorie de la percolation pour être en mesure de lire la preuve (elle-même très courte) du résultat de Smirnov.

## Prérequis

Le cours de variable complexe du premier semestre

## Bibliographie

Stanislav Smirnov, *Critical percolation in the plane : conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série I - Mathématiques, 333 (2001), 239-244. [[www.unige.ch/~smirnov](http://www.unige.ch/~smirnov)]

Gregory F. Lawler, *Conformally Invariant Processes in the Plane*, American Mathematical Soc., 2008.

## 30 Produits normalement ordonnés de champs

Le but du projet est d'étudier la construction du produit normalement ordonné de champs en théorie quantique de champs, en montrant qu'il s'agit d'une symétrisation du produit externe de distributions. On étudiera d'abord les aspects basiques de la théorie des distributions, puis on les appliquera au cas de la construction de produits normalement ordonnés en théorie quantique des champs.

## Bibliographie

Danielle Pesenti, *Produit de Wick des formes sesquilineaires*, *Séminaire de Théorie du Potentiel* (Paris, 1972), Springer, Berlin, 1976, pp. 120-143. *Lecture Notes in Mathematics*, Volume 518.

Walter Rudin, *Functional analysis*, 2nd ed., *International Series in Pure and Applied Mathematics*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

## 31 Propriétés de symétrie des solutions de certaines équations aux dérivées partielles

Soient  $B = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| < r\}$  une boule euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  et  $u \in C^2(\overline{B})$ . On suppose que  $u > 0$  dans  $B$ , que  $u = 0$  sur  $\partial B$ , et qu'il existe une fonction  $f$  de classe  $C^1$  telle que, pour tout  $x \in B$ ,

$$\Delta u(x) + f(u(x)) = 0.$$

Alors la fonction  $u$  est radiale au sens où  $u(x)$  ne dépend que de la norme euclidienne  $\|x\|$  de  $x$ .

Dans ce TER, on étudiera la preuve de ce résultat, dû à Gidas, Ni et Nirenberg, et on en examinera diverses extensions.

## Prérequis

Des notions élémentaires de calcul différentiel, niveau L3.

## Bibliographie

Basilis Gidas, Wei Ming Ni, Louis Nirenberg, Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* **68**, 209-243, 1979.

## 32 Que le meilleur gagne (ou pas...)

En écologie, le principe d'exclusion compétitive postule que quand deux espèces sont en compétition pour une même ressource, la « meilleure » compétitrice va finir par exclure l'autre espèce. La diversité que l'on observe dans certaines communautés d'espèces, pourtant en compétition pour peu de ressources, semble cependant contredire ce principe. Une hypothèse pour expliquer ce phénomène est que les variations de l'environnement permettraient à la « meilleure » espèce de varier au cours du temps.

On essayera de mieux comprendre ce phénomène en s'intéressant à un modèle simple, dans lequel deux espèces évoluent suivant un système de Lotka-Volterra compétitif de dimension 2, dont les paramètres peuvent prendre deux ensembles de valeurs et changent à des temps aléatoires. Des comportements contre-intuitifs peuvent alors apparaître, par exemple le système peut fluctuer entre deux états favorables à la même espèce, et pourtant conduire à la disparition de cette espèce.

On s'appuiera sur l'article donné en référence, qui présente une étude exhaustive de ce type de systèmes.

## Bibliographie

Michel Benaïm, Claude Lobry, Lotka-Volterra with randomly fluctuating environments, or : How switching between beneficial environments can make survival harder, *The Annals of Applied Probability*, 26.6 (2016), 3754-3785.  
[projecteuclid.org/euclid.aop/1481792599]

## 33 Quelques propriétés de l'opérateur divergence

Pour toute fonction  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  différentiable, la divergence de  $u$  est définie par

$$\operatorname{div} u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x_i}.$$

Ce TER est consacré à l'étude des équations  $\operatorname{div} u = f$  et  $\operatorname{div} u = \mu$ , où  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  est une fonction et  $\mu$  est une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

Par exemple, on montrera que, si  $u \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  est de classe  $C^1$  avec  $1 \leq p \leq \frac{n}{n-1}$  et si  $\operatorname{div} u = \mu$ , alors  $\mu = 0$ . Plus généralement, on examinera les liens entre les propriétés de  $f$  ou de  $\mu$ , et les propriétés de la solution  $u$ .

### Prérequis

Le contenu d'un cours de L3 en théorie de la mesure et en calcul différentiel.

### Bibliographie

Eduard Curcà, On the existence of vector fields with nonnegative divergence in rearrangement invariant spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **69** (1), 119-136, 2020.

Nguyen Cong Phuc, Monica Torres, Characterizations of the existence and removable singularities of divergence-measure vector fields, *Indiana Univ. Math. J.* **57** (4), 1573-1597, 2008.

## 34 Représentabilité abélienne

Dans le cadre de la théorie de l'information pour les réseaux, on associe à chaque  $n$ -uplet de variables aléatoires discrètes un *vecteur d'entropie* à valeurs dans l'espace euclidien de dimension  $2^n - 1$ , et on souhaite décrire la région  $\Gamma_n^*$  formée par tous ces vecteurs. Or, chaque groupe fini  $G$  muni de  $n$  sous-groupes  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , détermine un tel  $n$ -uplet de variables, dont le vecteur d'entropie correspond à la donnée des indices dans  $G$  des différentes intersections des  $G_i$ . Il a été montré que la région d'entropie associée aux groupes finis suffit à déterminer l'adhérence de  $\Gamma_n^*$ , alors que si  $n \geq 4$  la région d'entropie associée aux seuls groupes *abéliens* finis est strictement plus petite.

En vue notamment de comprendre les stratégies de codage non linéaire pour le codage en réseau, on souhaite préciser quels groupes ont un vecteur d'entropie « abélien ». On appelle ainsi *Ab-représentable* tout groupe fini  $G$  tel que pour tout choix de  $n$  sous-groupes  $G_1, G_2, \dots, G_n$  de  $G$ , il existe un groupe abélien fini  $A$  muni de  $n$  sous-groupes  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , qui donne lieu au même vecteur d'entropie que  $G$  muni des sous-groupes  $G_1, G_2, \dots, G_n$ .

La *nilpotence* pour un groupe est une propriété qui généralise la commutativité ; tout  $p$ -groupe fini est nilpotent. On montrera dans ce TER que les groupes finis *Ab-représentables* sont nilpotents, et inversement on établira la représentabilité abélienne de certaines classes de 2-groupes finis, ainsi que de la classe des  $p$ -groupes de degré de nilpotence strictement inférieur à  $p$ . Il s'agira pour cela d'établir des correspondances entre les différentes structures de sous-groupes.

### Prérequis

Cours d'Algèbre de L3 sur les groupes.

## Bibliographie

Pirita Paaajanen, *Finite  $p$ -groups, entropy vectors, and the Ingleton inequality for nilpotent groups*, IEEE Trans. Inform. Theory 2014, 60 (7) :3821-3824. [arXiv:1308.2069]

Eldho K. Thomas, Nadya Markin, Frédérique Oggier, *On abelian group representability of finite groups*, Adv. Math. Comm. 2014, 8 (2) :139-152. [arXiv:1212.1298]

## 35 Résultant de deux polynômes et applications

Nous étudierons le lien entre le résultant de deux polynômes et leurs racines communes. Nous appliquerons cette étude au théorème de Bezout en donnant une majoration du nombre de points d'intersection de deux courbes algébriques planes. Nous verrons aussi comment utiliser le résultant pour montrer le théorème de Pascal sur les coniques.

### Prérequis

Le cours d'Algèbre 1 du M1.

## Bibliographie

Daniel Perrin, *Résultant et discriminant*.

[[www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Sevres.html](http://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Sevres.html)]

Joël Briançon, Philippe Maisonobe, *Éléments d'algèbre commutative*, Ellipses, 2004.

## 36 Semi-groupes dynamiques quantiques

La dynamique d'un système quantique est convenablement approchée, sous certaines conditions, par une équation différentielle ordinaire linéaire donnant lieu à ce qu'on appelle un semi-groupe dynamique quantique, ou semi-groupe markovien quantique. L'inconnue, solution de l'EDO, est une matrice dont des considérations physiques exigent qu'elle soit complètement positive en tout temps et de trace un. Ces conditions imposent une structure particulière sur le générateur de l'EDO, comme l'ont montré Gorini-Kossakowski-Sudarshan et Lindblad dans un contexte plus général.

L'objectif de ce TER est de se familiariser avec les notions et avec le formalisme menant à ce résultat de structure dans le cas matriciel et d'en étudier certaines propriétés. On analysera également la dynamique de cas particuliers de semi-groupes dynamiques quantiques.

## Bibliographie

Robert Alicki, Mark Fannes, *Quantum Dynamical Systems*, Oxford University Press, 2001.



Michael M. Wolf, *Mathematical Introduction to Quantum Information Processing*. Notes de cours disponibles sur le web, 2019.

Teiko Heinosaari, Mario Ziman, *The mathematical language of quantum theory : From uncertainty to entanglement*, Cambridge University Press, 2012.

## 37 Surfaces minimales et représentation de Weierstrass-Enneper

D'après Wikipedia : « *En géométrie différentielle élémentaire, une surface minimale est une surface fermée et bornée d'un espace affine réel euclidien de dimension 3 à bord régulier minimisant l'aire totale à contour fixé. La définition se généralise en géométrie différentielle : une surface minimale dans une variété riemannienne donnée est le plongement d'une variété compacte à bord minimisant le volume riemannien à bord fixé.*

*Intuitivement, une surface minimale est une surface dont l'aire ou le volume ne peut qu'augmenter lorsqu'on lui applique une perturbation suffisamment petite. Les surfaces minimales forment donc l'analogue en dimension supérieure des géodésiques (courbes dont la longueur ne peut qu'augmenter sous l'effet d'une perturbation assez petite et assez localisée). La surface d'Enneper est une surface non plongée de courbure nulle.*

*Décrire les surfaces minimales n'est pas un problème mathématique simple. La première approche est d'effectuer un calcul des variations sur l'aire ou le volume riemannien vu comme une fonctionnelle d'énergie. Cette méthode permet d'en décrire les points critiques : il s'agit des surfaces dont la courbure moyenne est nulle, ou des sous-variétés dont la courbure sectionnelle est nulle. Cette propriété est parfois présentée comme une définition des surfaces minimales. Les deux définitions ne sont pas équivalentes.*

*Certaines surfaces minimales peuvent être matérialisées par des bulles de savon s'appuyant sur un contour, car le film de savon tend à minimiser son énergie, donc sa superficie. Elles sont utilisées justement en ingénierie pour minimiser la surface de contact et donc par exemple les pertes d'énergie. »*

On peut montrer que toute surface minimale régulière peut-être représentée par deux fonctions méromorphes, c'est la représentation de Weierstrass-Enneper. Le travail demandé pour ce TER sera de donner plusieurs définitions des surfaces minimales dans  $\mathbb{R}^3$  puis, au minimum, de montrer qu'une représentation de Weierstrass-Enneper est bien une surface minimale et d'étudier quelques exemples.

### Prérequis

Le cours d'analyse complexe du premier semestre. On utilisera aussi des notions du cours de géométrie différentielle.

### Bibliographie

Celso Costa, Surfaces minimales dans  $\mathbb{R}^3$ , *Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*,

tome 7 (1988-1989), 53-91.

[[www.numdam.org/article/TSG\\_1988-1989\\_\\_7\\_\\_53\\_0.pdf](http://www.numdam.org/article/TSG_1988-1989__7__53_0.pdf)]

*Surface minimale*, page web [mathcurve.com/surfaces/minimale/minimale.shtml](http://mathcurve.com/surfaces/minimale/minimale.shtml)

Roshan Sharma (2012), *The Weierstrass representation always gives a minimal surface*. [arXiv:1208.5689]

## 38 Tests groupés et SARS-CoV-2

De nombreux tests ont été mis en place pendant l'épidémie de SARS-CoV-2 pour détecter les personnes malades. Malheureusement, l'approvisionnement en tests n'a pas toujours été suffisant pour tester suffisamment de personnes et endiguer l'épidémie. Afin de contrer ce problème, plusieurs chercheurs français proposent de recourir aux tests groupés. Le principe est de regrouper les prélèvements dans un seul test : si le test est négatif alors on suppose que toutes les personnes sont négatives mais s'il est positif, cela veut dire qu'au moins une personne est contaminée et différentes stratégies sont alors possibles. Le but est ainsi de diminuer le nombre de tests réalisés tout en testant une grande population.

Le but du TER est d'explorer plusieurs stratégies de tests groupés et de réfléchir à l'influence des faux positifs et des faux négatifs sur ces stratégies. On s'intéressera également à leur adaptation au cas du virus SARS-CoV-2, avec notamment une étude de la charge virale dans la population.

### Mots-clefs

Probabilité, statistique, simulations.

### Bibliographie

Vincent Brault, Bastien Mallein, Jean-François Rupprecht (2020). *Group testing as a strategy for the epidemiologic monitoring of COVID-19*. [arXiv:2005.06776]

## 39 Métrique de Schwarzschild (ex-Thème numéro 1)

La métrique de Schwarzschild décrit des trous noirs à symétrie sphérique. C'est une solution exacte des équations d'Einstein dans le vide. De nombreuses prédictions de la relativité générale sont basées sur une étude détaillée de cette métrique.

Pendant ce TER, l'étudiant(e) devra d'abord apprendre les bases de la géométrie lorentzienne. On examinera ensuite plus en détail la métrique de Schwarzschild. On comprendra en particulier la notion de trou noir et l'existence d'une sphère de photons qui est une sphère sur laquelle des photons peuvent tourner sans aller à l'infini.

## **Bibliographie**

Robert M. Wald, General Relativity, University of Chicago Press, 1984.

Barrett O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, With applications to relativity. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press 1983.

## **40 Équations de Maxwell (ex-Thème numéro 2)**

Les équations de Maxwell sont des équations aux dérivées partielles fournissant les postulats de base de l'électromagnétisme. Elles sont très proches des équations des ondes et en partagent certaines propriétés comme l'existence d'une vitesse maximale de propagation. Une de leurs caractéristiques fondamentales est d'être invariantes par transformations de Lorentz. La théorie de Maxwell est donc en accord avec la relativité restreinte.

Pendant ce TER, l'étudiant(e) étudiera les propriétés fondamentales de ces équations.

### **Prérequis**

Le cours d'EDO-EDP au premier semestre.

## **Bibliographie**

Michael E. Taylor, Partial Differential Equations 1 (Basic theory), Applied mathematical Sciences 115, Springer 1996.

## **41 Équation de Schrödinger (ex-Thème numéro 3)**

L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles. C'est l'équation fondamentale de la mécanique quantique.

Pendant ce TER, l'étudiant(e) étudiera certains aspects fondamentaux de cette équation et rencontrera dans ce cadre certains concepts fondamentaux de la théorie spectrale.

### **Prérequis**

Le cours d'EDO-EDP au premier semestre.

## **Bibliographie**

Michael Reed, Barry Simon, Methods of modern mathematical Physics 1, Academic Press, 1983.

## 42 Théorème “edge of the wedge”

Le but du projet est d'étudier la preuve du théorème “edge of the wedge”, qui permet d'exprimer une distribution comme une valeur au bord d'une fonction holomorphe. On étudiera d'abord les aspects basiques de la théorie des distributions, pour éventuellement ensuite étudier les applications du théorème à la théorie quantique des champs.

### Bibliographie

Felix E. Browder, On the “edge of the wedge” theorem. *Can. J. Math.*, 18 (1963), 125-131. [[doi.org/10.4153/CJM-1963-015-4](https://doi.org/10.4153/CJM-1963-015-4)]

Walter Rudin, *Functional analysis*, 2nd ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

Raymond F. Streater, Arthur S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, Princeton Landmarks in Physics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2000. Corrected third printing of the 1978 edition.