CONTRÔLE CONTINU 2 - TOPOLOGIE PARCOURS A - 21 OCTOBRE 2016 - DURÉE : 3 HEURES

Les documents, téléphones portables et tous les autres dispositifs électroniques sont strictement interdits.

NOTATIONS :

Dans tout le problème, $(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé réel et E' l'ensemble des formes linéaires continues f de E dans $\mathbb{R}$

On dit qu'une partie non vide C de E est convexe si

$$\text{pour tous } x,\ y \in C \text{ et } t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in C.$$

Si U est une partie de E on définit

$$\operatorname{Int} U = \{x \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } \quad B(x,r) \subset U\}$$

et

$$\operatorname{Adh} U\, \{x \in E, \forall r > 0\ B(x,r) \cap U \neq \emptyset\}$$

PREMIÈRE PARTIE :

Dans cette partie, l'espace E est supposé complet et A désigne une partie fermée non vide de E. Soient $f \ : A \to \mathbb{R}$ une application continue et minorée et ε un réel strictement positif fixé.

I.1. Montrer que

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E; \|x\| \leqslant 1} |f(x)|.$$

définit une norme sur E'.

I.2. Montrer qu'on peut construire une suite $(K_n)_{n \geqslant 0}$ de parties de E et une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de E telles que $K_0 = A$ et pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_{n+1} \in K_n,\ f(x_{n+1}) \leqslant \inf_{K_n} f + \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } K_{n+1} = \{x \in A \mid f(x) \leqslant f(x_{n+1}) - \varepsilon \|x - x_{n+1}\|\}.$$

I.3. Montrer que la suite (K_n) est décroissante.

I.4. Montrer que pour tous $n \geqslant 1$ et $x \in K_n$, $\|x - x_n\| \leqslant \dfrac{1}{2^n \varepsilon}$.

I.5. Montrer que la suite (x_n) converge vers un point $x_0 \in A$ vérifiant : $\cap_{n \geqslant 0} K_n = \{x_0\}$.

I.6. Montrer que pour tout $x \in A$,

$$f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon \|x - x_0\|.$$

DEUXIÈME PARTIE :

II.1. Soit C un convexe ouvert inclus dans E contenant 0. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0, \frac{1}{\alpha} x \in C\}.$$

a. Montrer que la définition ci-dessus a un sens et qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $0 \leqslant p(x) \leqslant M\|x\|$.

b. Montrer que $C = \{x \in E,\ p(x) < 1\}$.

c. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in E$,

$$p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

d. Montrer que pour tous x et $y \in E$,

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y).$$

II.2. Soit K inclus dans E un convexe d'intérieur non vide.

a. Montrer que $\operatorname{Int} K$ est convexe.

b. Montrer que si K est fermé alors $\operatorname{Adh}(\operatorname{Int} K) = K$.

TROISIÈME PARTIE :

Dans cette partie, F désigne un espace vectoriel normé réel.

III.1. Soient $p \ : F \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant :

$$\forall x \in F,\ \forall \lambda > 0,\ p(\lambda x) = \lambda p(x) \tag{1}$$

$$\forall x, y \in F,\ p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \tag{2}$$

G un sous espace vectoriel strict de F (i.e. $G \neq F$) et $g \ : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur G telle que pour tout $x \in G$, $g(x) \leqslant p(x)$. On fixe $u \in F \setminus G$ et on note $H = G \oplus \mathbb{R}u$ la somme directe de G et de la droite vectorielle engendrée par u.

a. Montrer que pour tous $y', y'' \in G$, $p(y' + u) - g(y') \geqslant g(y'') - p(y'' - u)$.

b. Montrer qu'il existe une application linéaire $h : H \to \mathbb{R}$ prolongeant g (i.e. pour tout $y \in G$, $h(y) = g(y)$) et vérifiant : pour tout $x \in H$, $h(x) \leqslant p(x)$.

Dans toute la suite du problème. on admettra le résultat de prolongement suivant :
Pour toute forme linéaire g définie sur un sous espace vectoriel G de F et vérifiant les hypothèses ci-dessus, il existe une forme linéaire $f : F \to \mathbb{R}$ prolongeant g et vérifiant : pour tout $x \in F$, $f(x) \leqslant p(x)$.

III.2. Soient A et B deux convexes non vides et disjoints inclus dans F. On suppose que A est ouvert. On note D, ensemble différence entre A et B, l'ensemble $A - B = \{d \in F \mid \exists a \in A, b \in B \mid d = a - b\}$.

a. Vérifier que D est un convexe ouvert et $0 \notin D$.

b. Soit $x_0 \in D$ fixé. On note $C = D - \{x_0\}$ l'ensemble différence entre D et le singleton $\{x_0\}$. L'ensemble C est donc un convexe ouvert contenant 0 et on peut poser comme dans la partie II)

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 \mid \frac{1}{\alpha} x \in C\}.$$

On note $G = \mathbb{R}x_0$ la droite vectorielle engendrée par x_0 et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(tx_0) = -t$. Montrer que pour tout $x \in G$, $g(x) \leqslant p(x)$.

c. En déduire qu'il existe une forme linéaire f continue sur F, non nulle et telle que :

$$\sup_{x \in A} f(x) \leqslant \inf_{y \in B} f(y).$$

On dira alors que f sépare A et B.

QUATRIÈME PARTIE :

Dans cette partie, l'espace E est supposé complet, Y désigne l'espace vectoriel produit $E \times \mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|(x,t)\|_Y = \|x\| + |t|$$

et Y' l'ensemble des formes linéaires continues sur Y.

IV.1. **a.** Montrer que l'application :

$$\varphi : \begin{cases} E' \times \mathbb{R} & \to & Y' \\ (\gamma, \alpha) & \mapsto & \Phi_{\gamma,\alpha} \end{cases}$$

définie par : $\Phi_{\gamma,\alpha}(x,t) = \gamma(x) + \alpha t$ est linéaire et bijective, d'inverse linéaire.

b. Calculer $\|\varphi(\gamma,\alpha)\|_{Y'}$ en fonction de $\|\gamma\|_{E'}$ et $|\alpha|$.

Dans la suite de cette partie, C désignera un convexe fermé borné non vide inclus dans E, f une forme linéaire continue sur E, ε un réel strictement positif fixé et $x_0 \in C$ un élément vérifiant :

$$\forall x \in C, \ f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon \|x - x_0\|$$

(l'existence de x_0 a été établie dans la partie I).
On notera :

$$C_1 = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \mid t \leqslant f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|\} \text{ et } C_2 = \{(x,t) \in C \times \mathbb{R} \mid t \geqslant f(x)\}.$$

IV.2. Montrer que $\operatorname{Int} C_1$ et C_2 sont deux convexes non vides disjoints de Y.

IV.3. **a.** Montrer en utilisant les résultats précédents qu'il existe $(h,\alpha) \in E' \times \mathbb{R}$ tel que la forme linéaire $\varphi(h,\alpha)$ soit non nulle et sépare $\operatorname{Int} C_1$ et C_2. La définition de la séparation de deux parties par une forme linéaire a été donnée dans la partie III.

b. Montrer que la forme linéaire $\varphi(h,\alpha)$ sépare aussi C_1 et C_2.

IV.4. Montrer que $\alpha \neq 0$. En déduire qu'il existe $g \in E'$ tel que la forme linéaire $\varphi(g,1)$ sépare C_1 et C_2.

IV.5. Montrer que $\|g\|_{E'} \leqslant \varepsilon$ et que $f + g$ atteint son minimum sur C au point $x_0 \in C$.

IV.6. En déduire que l'ensemble

$$E'_0 = \{\theta \in E' \mid \exists y_0 \in C, \ \theta(y_0) = \sup_{y \in C} \theta(y)\}$$

des formes linéaires continues qui atteignent leur maximum sur C est dense dans E', c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $f \in E'$ on a $B(f,\varepsilon) \cap E'_0 \neq \emptyset$.

Contrôle continu 2

Question de cours

Soient G un groupe et X un ensemble. On suppose que le groupe G agit sur X.

1. Montrer que cette action de G sur X fournit un morphisme de groupes de G dans $S(X)$ où $S(X)$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble X.
2. Soit $x \in X$, montrer qu'il existe une bijection entre l'orbite de x et le quotient $G/Stab(x)$. En déduire que si G et X sont finis alors $|G| = |Stab(x)||Orb(x)|$.
3. Soient x_1 et x_2 deux éléments d'une même orbite sous cette action. Montrer que les groupes $Stab(x_1)$ et $Stab(x_2)$ sont conjugués dans G.

Exercice 1 :

1. Soient S l'ensemble des sommets d'un cube de $\mathbb{R}^3$ centré en 0 et C le sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$ constitué des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui laissent l'ensemble S globalement invariant.
   (a) Montrer que le groupe C est fini.
   (b) Soit $E = \{A_1, A_2, A_3\}$ l'ensemble des trois axes qui joignent les milieux de deux faces opposées du cube. Le groupe C agit sur l'ensemble E. Pour $1 \leq i \leq 3$ on note S_i le stabilisateur de A_i. Montrer que S_i est un sous-groupe d'indice 3 de C.
   (c) Montrer que $S_1 \neq S_2$.
   (d) En déduire que S_1 n'est pas un sous-groupe distingué du groupe C.
2. On considère plus généralement un groupe G (pas nécessairement fini) qui possède un sous-groupe H d'indice 3 tel que H ne soit pas un sous-groupe distingué de G.
   (a) Le groupe G agit sur G/H par translation à gauche. On note K le noyau du morphisme $\phi : G \to S(G/H)$ donné par cette action .
      i. Montrer que K est un sous-groupe de H
      ii. Montrer que K est un sous-groupe distingué de G d'indice 6.
   (b) Le groupe G agit sur l'ensemble de ses sous-groupes par conjugaison. Soit N le stabilisateur de H pour cette action. Montrer que $H = N$.

(c) En déduire qu'il y a exactement 3 sous-groupes conjugués de H dans le groupe G.

(d) Pour $a \in G$ fixé, établir une bijection entre G/H et G/aHa^{-1}. En déduire que chaque sous-groupe conjugué de H est un sous-groupe de G d'indice 3.

(e) Montrer que l'intersection de deux sous-groupes conjugués de H distincts est K.

Exercice 2 :

Soit n un entier strictement positif.

1. Dans S_n on peut écrire toute permutation σ comme un produit de cycles à supports disjoints $\sigma = \prod_{k=1}^{s} c_k$. On notera l_k la longueur du cycle c_k. Quel est l'ordre de la permutation σ ? (justifier)
2. (a) Le groupe S_7 possède-t-il des éléments d'ordre 5 ? d'ordre 10 ? d'ordre 15 ?

   (b) Quel est le plus grand ordre possible pour un élément de S_7 ?
   Quelle est la signature d'un tel élément ?
3. Soit m le plus petit multiple commun des entiers inférieurs ou égaux à n. Montrer que m est l'exposant du groupe S_n, c'est-à-dire le plus petit entier t vérifiant $\forall\sigma \in S_n$, $\sigma^t = id$.

Examen du 4 janvier 2017

4 heures

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de documents, calculatrices ou de téléphones portables est interdite.

* *
*

I. Exercice

1. (Question de cours) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément dans un groupe.

   Soient G un groupe, g et h deux éléments d'ordre fini (a et b). On notera la loi de G multiplicativement.

2. (Question de cours) On suppose que g et h commutent.
   (a) Montrer que ordre(gh) divise ppcm(a, b).
   (b) A-t-on toujours ordre$(gh) =$ ppcm(a, b) ? (on pourra considérer $g = h = i \in \mathbf{C}$).

3. On suppose toujours que g et h commutent et que les sous-groupes engendrés par g et h ont une intersection triviale : $< g > \cap < h >= \{e\}$ où e est l'élément neutre de G.
   (a) Montrer que $(gh)^n = e$ implique $g^n = e$ et $h^n = e$.
   (b) Quel est l'ordre de gh ?

4. (a) Dans cette question g et h sont quelconques.
   Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors $< g > \cap < h >= \{e\}$.
   (b) Montrer que tout groupe commutatif d'ordre 77 est cyclique (on pourra considérer les ordres possibles des éléments de G et appliquer les questions précédentes).

* *
*

II. Exercice

Soit K un corps.

1. (Question de cours). Soit I un idéal non nul de $K[X]$.
   (a) Montrer que l'ensemble
   $$\{\deg(P);\ P \in I \text{ et } P \neq 0\}$$
   admet un plus petit élément, noté d, et qu'il existe $P \in I$ tel que $\deg(P) = d$.
   (b) Soit $Q \in I$. En effectuant la division euclidienne de Q par P, montrer que $Q \in (P)$.
   (c) Montrer que I est un ideal principal. En déduire que $K[X]$ est anneau principal.

On souhaite démontrer la réciproque, à savoir

Si $A[X]$ est un est anneau principal alors A est un corps.

2. Soit $a \in A$, $a \neq 0$. On considère l'idéal $I = (a, X)$. Supposons que I est principal, et soit $P \in I$ un générateur.
   (a) Montrer qu'il existe $U, V \in A[X]$ tels que $a = U \cdot P$ et $X = V \cdot P$.
   (b) En utilisant le degré des polynômes, montrer que P est une constante inversible.
   (c) En déduire que $1 \in I$.
   (d) Conclure.

* *
*

III. Exercice

Soient A un anneau et I un ensemble.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}(I, A)$ des fonctions de I dans A est un anneau pour l'addition et la multiplication usuelles des fonctions (on explicitera l'élément neutre pour l'addition et la multiplication).
2. On suppose que I est un espace métrique et $A = \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur I (noté $\mathscr{C}(I, A)$) forme un sous-anneau de $\mathcal{F}(I, A)$.
3. Pour $x \in I$, on pose $\mathrm{ev}_x : \mathcal{F}(I, A) \to A$, définie par $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$ avec $f \in \mathcal{F}(I, A)$. Montrer que c'est un morphisme d'anneaux (appelé morphisme d'évaluation en x).

On suppose maintenant que $A = I = \mathbf{R}$.

1. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble $I_{x_0} = \{f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R});\ f(x_0) = 0\}$ est un idéal de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2. Montrer que le quotient $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})/I_{x_0}$ est isomorphe à $\mathbf{R}$ (on pourra calculer le noyau et l'image du morphisme $\mathrm{ev}_{x_0} : \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$). En déduire que I_{x_0} est maximal.
3. I_{x_0} est-il principal ? (on pourra supposer que $I_{x_0} = (f)$ et considérer la fonction $\sqrt{|f|} \in I_{x_0}$).

* *
*

IV. Exercice

Soient $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 5&4&3&6&7&2&1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\beta = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ 1&2&4&3&6&5&7 \end{smallmatrix}\right)$ deux permutations de S_7. On se propose de déterminer l'ordre $|G|$ du groupe G, engendré par α et β. Pour cela on considère l'action de G sur $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et on pose

$$G_1 = \{\tau \in G;\ \tau(1) = 1\} \qquad \text{et} \qquad X_1 = \{\tau(1);\ \tau \in G\}.$$

1. Montrer que G agit transitivement sur X (c'est-à-dire $X_1 = X$).
2. Expliciter les éléments $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$ et $\delta = \gamma\beta\gamma^{-1}$ de G (on pourra les écrire sous forme de produits de cycles à supports disjoints).

   On pose (on fera bien attention aux indices utilisés) :

$$\begin{array}{lcl} G_2 = \{\tau \in G_1;\ \tau(2) = 2\} & \text{et} & X_2 = \{\tau(2);\ \tau \in G_1\} \\ G_3 = \{\tau \in G_2;\ \tau(3) = 3\} & \text{et} & X_3 = \{\tau(3);\ \tau \in G_2\} \end{array}$$

3. Vérifier que $\beta, \delta \in G_2$. En déduire que ou bien $X_3 = \{3, 4, 5, 6\}$ ou bien $X_3 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.
4. Vérifier que $\beta, \gamma, \delta \in G_1$. En déduire que ou bien $X_2 = \{2, 7\}$ ou bien $X_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
5. Si E est une partie de X et $\tau \in G$ on notera $\tau \cdot E = \{\tau(x);\ x \in E\}$. Soit $\mathcal{O} = \{\tau \cdot \{1, 2, 7\}; \tau \in G\}$.
   (a) (question difficile) Montrer que $\mathcal{O} = \{\{1, 2, 7\}, \{1, 4, 5\}, \{5, 6, 7\}, \{1, 3, 6\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}\}$.
   (b) On voit que si $x \neq 7$ alors $\{1, 2, x\} \notin \mathcal{O}$.
   En déduire que 7 est fixé par tous les éléments de G_2 puis que $7 \notin X_3$.
   (c) Soit $\tau \in G_3$ (donc τ fixe $1, 2, 3, 7$). Montrer que $\tau \cdot \{1, 4, 5\} = \{1, 4, 5\}$ et $\tau \cdot \{5, 6, 7\} = \{5, 6, 7\}$.
   En déduire que $\tau = \mathrm{Id}$.
6. En utilisant la formule des classes, établir $|G| = |G_1||X_1|$, $|G_1| = |G_2||X_2|$ et $|G_2| = |G_3||X_3|$.
7. Déduire des questions précédentes $|G_2| = 4$ puis $|G| = 28|X_2|$.
8. Quel est l'ordre de α ? En déduire que 3 divise $|G|$.
9. Conclure que $|G| = 168$.

* *
*

V. Exercice

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \qquad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1. Calculer $A - (m-1)\mathrm{Id}$. En déduire que $m-1$ est une valeur propre de A. On précisera la multiplicité.
2. On écrit $\chi_A = (X - m + 1)^4 (X - \alpha)$ le polynôme caractéristique de A (avec $\alpha \in \mathbf{R}$).
   En développant, donner le terme devant X^4 en fonction de α.
   En déduire la valeur de α (on pourra utiliser la trace).
3. Quel est le polynôme minimal de A ? A est-elle diagonalisable ?
4. Donner les valeurs de m pour lesquelles A est inversible.
   Quelle est la matrice inverse de A lorsqu'elle existe ? (on ne fera pas de calculs).

Algèbre L3A - 2016

Durée : 4h

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Problème A.

A1. Montrer qu'un anneau à p éléments, p premier, est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Indication : on pourra d'abord montrer que $\mathrm{car}(A) = p$.

A2. Soit (A, δ) un anneau euclidien. Montrer qu'il existe $x \in A, x \notin A^\times$ tel que l'application

$$A^\times \cup \{0\} \to A/(x)$$

donnée par $a \mapsto \overline{a}$, donc obtenue par restriction de la projection canonique, est surjective.

Indication : Traiter le cas où A est un corps à part. Si A n'est pas un corps, choisir $x \in A \setminus (A^\times \cup \{0\})$ tel que $\delta(x)$ soit minimal, et établir la surjectivité en utilisant une division euclidienne.

Soit $A = \mathbb{Z}[\alpha]$ avec $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{19}}{2}$, de sorte que l'on a $A = \{a + b\alpha | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

On pose $\nu(z) = |z|^2$ pour tout $z \in A$.

A3. Vérifier que $\alpha^2 + \alpha + 5 = 0$, et que $\nu(a + b\alpha) = (a - \dfrac{b}{2})^2 + \dfrac{19b^2}{4} = a^2 - ab + 5b^2 \in \mathbb{N}$.

A4. Montrer que $A^\times = \{\pm 1\}$.

On suppose A euclidien.

A5. Soit x comme dans **A2.** Vérifier soigneusement que $A/(x)$ a 2 ou 3 éléments. En déduire que $A/(x) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec $p = 2$ ou 3.

A6. En déduire l'existence d'un morphisme surjectif $\eta : A \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec $p = 2$ ou 3.

A7. Justifier que $\eta(m) = \overline{m}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, où $\overline{m}$ est la classe de m modulo p (pour $p = 2$ ou 3).

A8. En déduire l'existence d'une racine du polynôme $X^2 + X + \overline{5} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p = 2$ ou 3.

A9. Montrer que A n'est pas euclidien.

Problème B. Soient p, q deux nombre premiers. On suppose que $p < q$ et $p \nmid q - 1$. Soit G un groupe d'ordre pq.

B1. Montrer que G possède un unique p-Sylow H_p et un unique q-Sylow H_q. Donner la structure de H_p et H_q.

B2. Montrer que $G = H_p \odot H_q$.

B3. En déduire que G est cyclique.

Problème C.

Soit G un groupe d'ordre $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$.

C1. Montrer que G possède un unique 17-Sylow H_{17}. Justifier l'existence de $y \in G$ tel que $H_{17} = \langle y \rangle$.

C2. Quel est l'ordre du groupe G/H_{17} ? En déduire l'existence de $x \in G$ tel que $G/H_{17} = \langle \overline{x} \rangle$.

C3. Montrer que $15 \mid o(x)$. En déduire que $o(x) = 15$ ou 255.

C4. On suppose que $o(x) = 15$.

(a) Montrer qu'il existe $0 \leq m \leq 16$ tel que $xyx^{-1} = y^m$, puis que $m^{15} \equiv 1 \mod 17$. En déduire que l'ordre de $[m]_{17}$ dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$ divise 15, où $[m]_{17}$ désigne la classe de m modulo 17.

(b) Quel est l'ordre de $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$? En déduire que $o([m]_{17}) \mid 16$, puis que $m = 1$.

(c) Quel est l'ordre de xy ?

C6. Combien existe-t-il de groupes d'ordre 255 à isomorphisme près ?

Problème D. Soit $A := \mathbb{C}[X, Y]$ et $f = X^2 + Y^2 - 1$, $g = X^2 + Y^2$ des éléments de A.

D1. Démontrer que $A/(fg) \simeq A/(f) \times A/(g)$.

D2. L'anneau $A/(g)$ est-il intègre ? Justifiez votre réponse.

D3. Montrer que $X + iY$ est inversible dans $A/(f)$.

D4. Démontrer qu'il existe un homomorphisme d'anneaux $\psi : \mathbb{C}[T] \to A/(f)$ tel que $\psi(T) = X + iY$.

D5. Donner les idéaux premiers et maximaux de $\mathbb{C}[T]$. Justifier la réponse.

D6. Démontrer qu'il existe un homomorphisme d'anneaux $\phi : \mathbb{C}[T, U] \to A/(f)$ tel que $\phi(T) = X + iY$ et $\phi(U) = X - iY$.

D7. Montrer que ϕ est surjectif et calculer son noyau.

D8. Trouver un idéal maximal de A contenant f.

Licence de mathématiques (2016-2017)
Partiel "Topologie" (L3B)
Novembre 2016
Durée : 3h

Sans calculatrice, ni document.
Le barème est donné à titre indicatif

On suppose dans les deux exercices que $\mathbb{R}$ est muni de la valeur absolue.

Exercice 1 (10 points). *1a) L'ensemble $A = [0, 2] \cup [13, 14]$ est-il ouvert, fermé, compact ?*
1b) Même question avec le singleton $B = \{118\}$.
1c) Même question avec $C =]1, +\infty[$.
1d) Même question avec $D = \{1/2^n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

2a) Démontrer qu'une suite convergente de $\mathbb{R}$ est bornée.
2b) Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = 1 + (-3)^n$ (On pourra utiliser la question précédente) ?
2c) Démontrer que si une suite converge dans $\mathbb{R}$, elle n'a qu'une valeur d'adhérence.
2d) Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{3 + (-1)^n}{2n}$ (On pourra utiliser la question précédente) ?

3) Dans les questions qui suivent, on utilisera la définition d'une suite de Cauchy, mais surtout pas le fait que les suites de Cauchy de $\mathbb{R}$ sont les suites convergentes.
3a) Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $u_n + v_n$ est une suite de Cauchy.
3b) Démontrer que toute suite de Cauchy (u_n) dans $\mathbb{R}$ est bornée.
3c) Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $u_n v_n$ est une suite de Cauchy (On pourra utiliser la question précédente).

4a) Démontrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au sens usuel (c'est à dire $\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) alors l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
4b) Démontrer que si $O \subset \mathbb{R}$ est ouvert, alors son complémentaire est fermé (Les fermés sont définis via les suites, voir la question 1a) de l'exercice 2).
4c) Déduire des questions précédentes que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}; e^x \geq 3x + 1\}$ est fermé. Est-il borné ?

Exercice 2 (10 points). *1a) Donner la définition séquentielle d'un fermé puis celle d'un compact de $\mathbb{R}$.*
1b) Démontrer qu'un compact K dans $\mathbb{R}$ est fermé et borné.
1c) Démontrer que l'image d'un compact K par une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un compact.
1d) Déduire de 1b) et 1c) que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et si $K \subset \mathbb{R}$ est compact,

alors f est bornée sur K et atteint ses bornes.
On utilisera ces résultats dans la suite. Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

2a) Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact et soit $F \subset \mathbb{R}$ un fermé. Démontrer que $K + F = \{x + y; x \in K, y \in F\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
2b) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on suppose K et F SEULEMENT fermés dans $\mathbb{R}$?

3a) Justifier que la fonction $x \in \mathbb{R} \to |x|$ est continue.
On considère dans la suite une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie que pour tous les réels x, y avec $x \neq y$,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

3b) Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
On fixe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $f(K) \subset K$ (de sorte que l'application $f : K \to K$ est bien définie). On dit que $x_0 \in K$ est un point fixe de f sur K si $f(x_0) = x_0$.
3c) Démontrer que si f admet un point fixe sur K, ce point fixe est unique. Le but de ce qui suit est de démontrer qu'un tel point fixe existe (et est donc unique).
3d) On suppose que pour tout $x \in K$, $f(x) \neq x$ et on pose $\phi(x) = |f(x) - x|$. Montrer que ϕ est continue puis qu'il existe $a \in K$ tel que $\phi(a) = \inf_{x \in K} \phi(x) > 0$.
3e) Conclure (On pourra utiliser $f(a)$).

Contrôle Continu 2

Exercice A

Soit G un groupe. On considère un morphisme de groupes $f : G \to G'$. On note $H = \ker(f)$ et $p : G \to G/H$ l'application quotient.

A.1. Montrer que f induit une application $\bar{f} : G/H \to G'$ vérifiant $\bar{f} \circ p = f$.

A.2. Montrer que $\bar{f}$ est injective, puis que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\bar{f})$.

A.3. Si G est fini, en déduire une relation entre les cardinaux de $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ et G.

Exercice B

On considère dans cet exercice un groupe abélien fini G.

B.1. Donner un exemple de partie génératrice finie de G.

B.2. Soit $\{x_1, \ldots, x_r\}$ une partie génératrice finie de G. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, notons $G_i = \langle x_i \rangle$ le groupe engendré par x_i.

(B.2.a) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G_1 \times \cdots \times G_r & \to & G \\ (g_1, \ldots, g_r) & \mapsto & g_1 \cdots g_r \end{array}$$

est un morphisme de groupe surjectif (on munit ici $G_1 \times \cdots \times G_r$ de sa structure de groupe usuelle).

(B.2.b) Exprimer l'ordre du groupe G_i en fonction de l'ordre de x_i.

(B.2.c) En déduire une expression de l'ordre du groupe $G_1 \times \cdots \times G_r$ en fonction des ordres des x_i.

(B.2.d) Montrer que $|G|$ divise $o(x_1) \cdots o(x_r)$.

B.3. Soit p un diviseur premier de $|G|$. Déduire de la question précédente que l'un des x_i est d'ordre divisible par p, puis que G possède un élément d'ordre p.

B.4. Soit p un diviseur premier de $|G|$. Soit H_p l'ensemble des éléments de G dont l'ordre est une puissance de p, c'est-à-dire $H_p = \{x \in G \mid \exists m \geq 0, o(x) = p^m\}$ (par convention, l'ordre de l'élément neutre e_G vaut 1, et c'est le seul élément de G possédant cette propriété).

(B.4.a) Montrer que H_p est un sous-groupe de G.

(B.4.b) Montrer que $|H_p|$ est une puissance de p.

(B.4.c) Montrer que l'ordre $|G/H_p|$ du groupe quotient G/H_p n'est pas divisible par p.

(B.4.d) En déduire que l'ordre de H_p est égal à la plus grande puissance de p divisant $|G|$.

B.5. Soit p un diviseur premier de $|G|$. Soit H un sous-groupe de G dont l'ordre est égal à la plus grande puissance de p divisant $|G|$. Montrer que $H = H_p$.

B.6. (Question difficile.) Soient $p_1, \cdots, p_s$ les diviseurs premiers de $|G|$. Montrer que les groupes $H_{p_1} \times \cdots \times H_{p_s}$ et G sont isomorphes.

Exercice C

Soit G un groupe d'ordre 15. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (g, h) & \mapsto & g * h := ghg^{-1}. \end{array}$$

C.1. Montrer qu'il s'agit d'une action de groupe de G sur lui-même.

C.2. On suppose que le centre de G vaut $Z(G) = \{e_G\}$. Montrer que cette action possède exactement 1 orbite à 1 élément, 1 orbite à 5 éléments, 3 orbites à 3 éléments.

Exercice D

Soit G un groupe fini. Soient p un nombre premier et H et K des sous-groupes de G d'ordre p.

D.1. Montrer que, si $H \neq K$, alors $H \cap K = \{e_G\}$.

D.2. En déduire que le nombre d'élements d'ordre p de G est un multiple de $p - 1$.

TOPOLOGIE L3B (2016-2017)
Examen de janvier 2017
Durée : 4h
(Sans calculatrice, sans document)
Le barème est donné à titre indicatif

Les quatre exercices sont indépendants. Chacun contient des questions de cours qui peuvent servir dans la suite.

Rappels : La série de terme général $1/n^2$ converge et si on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} 1/k^2$ (série reste), alors $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$.

Exercice 1 [5 points]
Questions de cours.
1) Donner la définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2) Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $||.||$. On dit que $A \subset E$ est dense dans E si pour tout $x \in E$, tout $R > 0$, $B(x, R) \cap A \neq \emptyset$. Montrer que si A est dense dans E, alors pour tout $x \in E$, il existe une suite (a_n) dans A qui converge vers x.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ (à valeurs réelles). Si (u_n) est une suite dans $[0,1]$, on lui associe $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ par $\phi(f,g) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n)g(u_n)}{n^2}$ pour f, $g \in E$.

1a) Montrer que si f, $g \in E$, f et g sont bornées sur $[0,1]$ (On énoncera avec soin le résultat du cours utilisé).
1b) Montrer que si f, $g \in E$, $\phi(f,g)$ est fini (On pourra montrer que la série associée à $\phi(f,g)$ est absolument convergente en utilisant 1a).
2) Montrer que ϕ est une forme bilinéaire, symétrique et positive. Quelle condition manque-t-il à ϕ pour être un produit scalaire sur E ?
Le but de ce qui suit est de donner une condition nécessaire et suffisante sur la topologie de $A = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ pour que ϕ soit un produit scalaire sur E.
3) Soit $f \in E$. Montrer que $\phi(f,f) = 0$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$. On utilisera cette caractérisation dans la suite.
4) On suppose que $A = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$. Montrer qu'alors ϕ est un produit scalaire sur E.
5) On suppose que $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas dense dans $[0,1]$.
5a) Montrer qu'il existe un intervalle $]a-r, a+r[\subset [0,1]$ ($a \in [0,1]$, $r > 0$) qui ne contient aucun u_n.
5b) Construire une fonction continue $\tilde{f}$ sur $[0,1]$ non identiquement nulle sur $[0,1]$ mais nulle en dehors de $[a-r, a+r]$ (On pourra se contenter de dessiner le graphe d'une telle fonction). Estimer $\phi(\tilde{f}, \tilde{f})$. Que peut-on en déduire ?
6) Conclure (par rapport à la question initiale).

Exercice 2 [5 points]
Questions de cours. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
1) Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I. Donner la définition de la convergence simple puis de la convergence uniforme de (f_n) vers f sur I.
2) Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur I et si tous les f_n sont continues sur I, alors f est continue sur I. Cette question ne sert pas dans la suite.

Les deux questions sont indépendantes.

1) Soit $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \geq 1$. *Etudier la convergence simple et uniforme de* f_n *sur* $\mathbb{R}$.

2) Soit f *une fonction continue sur* $[0,1]$ *(à valeurs réelles) telle que* $f(1) = 0$. *On pose pour tout* $x \in [0,1]$, *tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n f(x)$.
2a) Soit $\varepsilon > 0$. *Montrer que*

(i) *Il existe* $\eta \in]0,1[$ *tel que* $\forall x \in [1-\eta, 1]$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(On pourra commencer par montrer que pour tout* $x \in [0,1]$, *tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq |f(x) - f(1)|$*). On fixe dans la suite un tel* η.

(ii) *Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout entier* $n \geq N$, $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ *pour tout* $x \in [0, 1-\eta]$ *(On pourra commencer par vérifier que pour tout* $x \in [0, 1-\eta]$, *tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq (1-\eta)^n \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$*).*

2b) Déduire des questions précédentes que (f_n) *converge uniformément sur* $[0,1]$ *vers une fonction que l'on déterminera.*

Exercice 3 [5 points]
Questions de cours. Soient E et F deux espaces vectoriels munis de normes $||.||_E$ et $||.||_F$.
1) Donner la définition de la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $R > 0$, puis d'un ouvert de E.
2) Donner la définition d'une application continue $f : E \to F$ (avec des ε).
3) Montrer que si $f : E \to F$ est continue, alors l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.

Soit E *un espace vectoriel muni d'une norme* $||.||$.

1a) Soit $x \in E$. *On définit l'application* $f_x : E \to \mathbb{R}$ *par* $f_x(y) = ||x - y||$ *pour tout* $y \in E$. *Montrer que* f_x *est lipschitzienne. Le but de la question suivante est d'étendre ce résultat au cas des sous-ensembles* $A \subset E$ *qui ne sont des singletons* $\{x\}$.
Soit $A \subset E$ *(non vide). Si* $y \in E$, *on pose* $d(y, A) = \inf\{||y - a||, a \in A\}$. *On définit l'application* $f_A : E \to \mathbb{R}$ *par* $f_A(y) = d(y, A)$ *pour tout* $y \in E$.
1b) Soient x, $y \in E$. *Montrer que pour tout* $a \in A$, $d(x, A) \leq ||x - y|| + ||y - a||$. *En déduire que* f_A *est lipschitzienne.*

1c) Soit $x \in E$ tel que $d(x, A) = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in A$ tel que $||x - a_n|| \leq 1/n$.
1d) En déduire que si A est fermé et $x \notin A$, alors $d(x, A) > 0$.

2) Soient F et G des fermés de E tels que $F \cap G = \emptyset$. On pose $\phi(x) = d(x, G) - d(x, F)$ pour tout $x \in E$, puis $U = \phi^{-1}(]0, +\infty[)$ et $V = \phi^{-1}(] - \infty, 0[)$. Montrer que (en utilisant les questions précédentes)
- U et V sont des ouverts de E (On précisera la caractérisation des ouverts utilisée);
- $U \cap V = \emptyset$;
- $F \subset U$ et $G \subset V$.

Exercice 4 [5 points]
Questions de cours.
1) Donner la définition d'une suite de Cauchy (u_n) dans l'espace vectoriel normé $(E, ||.||)$. Démontrer que toute suite convergente dans $(E, ||.||)$ est une suite de Cauchy.
2) Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel normé $(E, ||.||_E)$ dans l'espace vectoriel normé $(F, ||.||_F)$. Montrer que f est continue sur E si et seulement si

$$\sup\{||f(x)||_F ; ||x||_E \leq 1\} < \infty.$$

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Si $P \in E$, on pose $N(P) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|P^n(0)|}{n!}$.
1a) Montrer que si $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, alors $N(P) = |a_0| + ... + |a_n|$. Ce résultat servira souvent dans la suite.
1b) En déduire que $N(P)$ est fini pour tout $P \in E$, puis que N est une norme sur E.

2) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{X^k}{k^2}$.
2a) Montrer que $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de (E, N) (Si $q > p$, on pourra majorer $N(f_p - f_q)$ par la série reste d'une série convergente).
2b) Soit $P \in E$. On note d le degré de P. Montrer que si $q > d$, $N(f_q - P) \geq \dfrac{|f_q^{(d+1)}(0)|}{(d+1)!} = \dfrac{1}{(d+1)^2} > 0$.
2c) Déduire de la question précédente que (f_q) ne converge pas dans (E, N).

3) Soit $D : E \to E$ l'application définie par $D(P) = P'$ pour tout $P \in E$.
3a) Montrer que D est linéaire sur E.
3b) Calculer $N(X^n)$ et $N(D(X^n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que D n'est pas continue sur E.