UJF L3 mathématiques 2014-15
Mat35b Algèbre A

Contrôle continu n°2
jeudi 23 octobre 9h-12h

Documents, téléphones et calculatrices interdits. Dans tout le sujet on pourra utiliser sans preuve le fait que *tout sous–groupe d'indice 2 d'un groupe en est un sous–groupe distingué.*

Exercice 1

Soit $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} ; a, d \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}$ et $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Montrer que T est un groupe pour la multiplication matricielle, et que U est un sous–groupe distingué de T.

b) Identifier le groupe quotient T/U à un groupe connu.

Exercice 2

Soient k un corps et $n \geq 2$ un entier. On désigne par V un k–espace vectoriel de dimension n, et par $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites vectorielles de V. On note G le groupe $\mathrm{GL}(V)$.

1. Montrer que l'action naturelle de G sur V induit une action de G sur $\mathcal{D}$.

2. Cette action est-elle transitive?

3. On note $\varphi : G \longrightarrow S(\mathcal{D})$ le morphisme de groupes correspondant. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est le sous–groupe Z de G formé des homothéties.

On note PG le groupe quotient de G par Z. Dans la suite on pose $n = 2$ et on prend pour k un corps fini dont on note q le cardinal.

4. Montrer que $\mathcal{D}$ a pour cardinal $q + 1$.

5. Montrer que l'ordre de G est $(q^2 - 1)(q^2 - q)$ *(on pourra dénombrer les bases de V).*

6. En déduire l'ordre de PG.

7. On suppose que $q = 4$ (on admet qu'un tel corps existe). Montrer avec ce qui précède qu'alors on a $PG \simeq A_5$.

On suppose dans la suite que $q = 3$.

8. Montrer que PG est isomorphe à S_4. En déduire son centre.

9. Déterminer l'ordre de $\mathrm{SL}(V)$. Les groupes $\mathrm{SL}(V)$ et PG sont-ils isomorphes?

T.S.V.P.

Exercice 3.

Partie A.

Soient p un nombre premier fixé, et $n \geq 1$ un entier. Soit G un groupe d'ordre n. On pose
$$E = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1_G\}.$$

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Montrer que tout sous-groupe H de S_p agit sur G^p par
$$\begin{aligned} H \times G^p &\longrightarrow G^p \\ (\tau, (g_1, \ldots, g_p)) &\longmapsto (g_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, g_{\tau^{-1}(p)}). \end{aligned}$$

Soit σ le p-cycle $(1\ p\ p-1 \cdots 2)$, on pose $H = \langle \sigma \rangle$.

3. Vérifier que l'action de H sur G^p se restreint en une action de H sur E.

4. Quels sont les cardinaux possibles d'une orbite de E sous l'action de H ? Décrire toutes les orbites à 1 élément. Montrer qu'il existe au moins une orbite à 1 élément.

5. On suppose que $p \nmid n$. Montrer que G n'a pas d'élément d'ordre p, et en déduire qu'il n'y a qu'une seule orbite à un élément. En déduire le :

Théorème de Fermat. Soit p un nombre premier. Pour tout $n \geq 1$ tel que $p \nmid n$, on a $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

6. On suppose que $p \mid n$. Montrer qu'il y a au moins deux orbites à un élément. En déduire le :

Théorème de Cauchy. Soit un groupe G fini. Pour tout p premier qui divise l'ordre de G, G possède au moins un élément d'ordre p.

Partie B.

Dans cette partie, G est un groupe d'ordre 6.

1. Justifier que G possède un élément σ d'ordre 3, et un élément τ d'ordre 2. En déduire que si G est abélien, on a $G \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

On suppose jusqu'à la fin que G est non abélien.

2. Montrer que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^2$ (comparer les ordres de σ et $\tau\sigma\tau^{-1}$).

3. Montrer que $\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau$ sont des éléments d'ordre 2 de G, deux à deux distincts, et que ce sont les seuls.

4. Soit X l'ensemble des éléments d'ordre 2. Montrer que l'action de G par conjugaison sur lui-même induit une action de G sur X, et que cette action est fidèle.

5. En déduire que G est isomorphe à S_3.

6. Résumer le résultat obtenu dans cette partie.

◇◇◇

Contrôle Continu N^o 2 - 23/10/2014

Exo 1. 1) Soient G un groupe et H une partie de G. Que signifie “H est un sous-groupe de G” ?

2) Soit $\sim$ une relation binaire sur un ensemble E.

2.a) Que signifie “$\sim$ est une relation d'équivalence” ?

On suppose à présent que $\sim$ est une relation d'équivalence.

2.b) Quel est la définition de la classe d'équivalence de $x \in E$?

2.c) Quel est la définition de l'ensemble quotient $E/\sim$?

3) Si H est un sous-groupe d'un groupe G, montrer que

$$x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

est une relation d'equivalence sur G.

Exo 2. Soit G un groupe, dont la loi est notée multiplicativement et le neutre e.

1) Montrer que si H et K sont des sous-groupes d'ordre fini de G tels que $H \cap K = \{e\}$ alors le cardinal de $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ est égal à $|H||K|$.

2) On suppose que G est fini et que $|G| = pq$ où p est nombre premier strictement supérieur à l'entier q (qui n'est pas forcément un nombre premier).

2.a) Montrer que G possède au plus un sous-groupe d'ordre p.

2.b) Montrer que si H est un sous-groupe de G d'ordre p alors, pour tout $g \in G$, on a $gHg^{-1} \subset H$ où $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

Les questions suivantes montrent que les conclusions de 2.a) et 2.b) ne sont pas forcément satisfaites si p n'est pas supposé strictement supérieur à q.

3) On considère dans cette question le groupe $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On a $|G| = 9 = pq$ avec $p = 3$ et $q = 3$.

3.a) Combien G possède-t-il de sous-groupes d'ordre $p = 3$? En déduire que la conclusion de 2.a) n'est pas valable pour ce groupe G et $p = 3$.

3.b) Montrer qu'en revanche la conclusion de 2.b) est valable pour tout sous-groupe de H de G.

4) On considère dans cette question le groupe $G = \mathfrak{S}_3$ des bijections de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dans lui-même. On rappelle que la loi de groupe

est donnée par la composition des applications. On a $|G| = 6 = pq$ avec $p = 2$ et $q = 3$.

4.a) Déterminer les sous-groupes d'ordre $p = 2$ de G.

4.b) Montrer que la conclusion de la question 2.b) n'est pas valable pour G.

Exo 3. On note E l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la relation binaire sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$f \sim g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$$

est une relation d'équivalence.

2) Montrer que $E/\sim$ est en bijection avec $\mathbb{R}$.

Exo 4. On note A l'anneau $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) Déterminer l'ensemble $A^\times$ formé des éléments inversibles de A.

2) Déterminer les diviseurs de zéro de A.

Exo 5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et notons $\alpha = \sqrt{m^2 + 1}$. On pose $A = \{x + \alpha y \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

1) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

3) Montrer que si $x + \alpha y = x' + \alpha y'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$ alors $x = x'$ et $y = y'$.

4) Pour tout $a = x + \alpha y \in A$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\overline{a} = x - \alpha y \in A \text{ et } N(a) = a\overline{a} = x^2 - \alpha^2 y^2 \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que, pour tous $a, b \in A$, on a $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$ et $N(ab) = N(a)N(b)$.

5) Soit $a \in A$. Montrer que a est inversible dans A si et seulement si $N(a) \in \{-1, 1\}$ et, dans ce cas, déterminer l'inverse de a.

6) Soit $a = x + \alpha y \in A$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$. On suppose a inversible de A et $a > 1$. Nous allons montrer que $a \geq \omega$ où $\omega = m + \alpha$.

6.a) Montrer que $y \neq 0$.

6.b) Montrer que $|x| \geq m$.

6.c) Prouver que $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$.

6.d) En déduire que $a \geq \omega$.

7) Montrer que ω est inversible dans A. Montrer l'ensemble $A^\times$ des éléments inversibles de A est donné par

$$A^\times = \{\epsilon\omega^n \mid \epsilon \in \{-1, 1\}, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Université Joseph Fourier	2014-2015
Licence 3	Parcours A

Topologie

Contrôle continu du 22/10/2014

Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1 (Points fixes d'une application)**.** [Environ 4 points] Soient $a < b$ deux réels et f une application de $[a, b]$ dans $[a, b]$. On veut montrer que f sous certaines hypothèses, f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

1. À l'aide d'un théorème du cours, montrer le résultat lorsque f est continue.
2. Dans cette question, on suppose que f est croissante (mais pas nécessairement continue). On pose $c = \sup\{x \in [a, b] : f(x) \geqslant x\}$. Montrer que $c \in [a, b]$ et que $f(c) = c$.
3. Montrer que la conclusion peut être fausse pour une application décroissante de $[a, b]$ dans $[a, b]$.
4. Montrer que même avec une fonction continue et croissante, la conclusion peut être fausse si l'on remplace $[a, b]$ par l'intervalle $]0, 1[$ ou par l'intervalle $[0, +\infty[$.

Exercice 2 (Bases d'ouverts)**.** [Environ 6 points] Dans cet exercice, on se propose de montrer que dans un espace métrique, les ouverts sont les unions de boules ouvertes. Dans le cas de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^d$ muni d'une norme quelconque, on montre l'existence d'une famille dénombrable de boules telle que tout ouvert peut s'écrire comme union de boules appartenant à cette famille.

1. Soit (E, d) un espace métrique.
   (a) À l'aide de résultats du cours, expliquer pourquoi une union quelconque de boules ouvertes est toujours un ouvert de (E, d).
   (b) Montrer que E peut s'écrire comme union de boules ouvertes de (E, d).
   (c) Soit O un ouvert de (E, d), différent de E. Pour tout $x \in O$, on note $\rho(x) = d(x, E \setminus O)$. Montrer que pour tout $x \in O$, $\rho(x) > 0$. Montrer que
   $$O = \bigcup_{x \in O} B(x, \rho(x)).$$
2. On fixe $d \in \mathbb{N}^*$. On note $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit $||\cdot||$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$, et $||\cdot||_\infty$ la norme sur $\mathbb{R}^d$ définie par
   $$||x||_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_d|) \text{ si } x = (x_1, \ldots, x_d) = x_1e_1 + \cdots + x_de_d.$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et $r > 0$, on note $B(x, r)$ et $B_\infty(x, r)$ les boules ouvertes de centre x et de rayon r pour les distances associées respectivement aux normes $||\cdot||$ et $||\cdot||_\infty$.
   (a) Montrer que toute boule ouverte pour la norme $||\cdot||_\infty$ contient au moins un élément de $\mathbb{Q}^d$.
   (b) Soit $C = ||e_1|| + \cdots + ||e_d||$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $||x|| \leqslant C||x||_\infty$. En déduire que toute boule ouverte pour la norme $||\cdot||$ contient au moins un élément de $\mathbb{Q}^d$.
   (c) On note $D = \{1/n \ , \ n \in \mathbb{N}^*\}$. À l'aide de résultats du cours, montrer que $\mathbb{Q}^d \times D$ est dénombrable.
   (d) Soit O un ouvert de $(\mathbb{R}^d, ||\cdot||)$. On note $I_O = \{(x, r) \in \mathbb{Q}^d \times D : B(x, r) \subset O\}$. Montrer que
   $$O = \bigcup_{(x,r) \in I_0} B(x, r).$$

Exercice 3 (Fonction indicatrice d'un fermé). [Environ 5 points] Soit (E, d) un espace métrique. Soit F un fermé non vide de E. On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle.

1. Montrer que pour tout $x \in E \setminus F$, $d(x, F) > 0$.
2. En adaptant une preuve vue en cours, montrer que si une suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ d'applications continues de (E, d) dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers une application f, alors f est continue.
3. Montrer que l'application $x \mapsto \max(x, 0)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$, on note $f_n(x) = \max(1 - nd(x, F), 0)$. Montrer que f_n est lispchitzienne.
5. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers l'application $\mathbf{1}_F$ définie par $\mathbf{1}_F(x) = 1$ pour tout $x \in F$, $\mathbf{1}_F(x) = 0$ pour tout $x \in E \setminus F$.
6. On suppose dans cette question que F n'est pas ouvert. Montrer qu'il existe un point $\ell \in F$ qui peut s'écrire comme limite d'une suite (x_n) d'éléments de $E \setminus F$. En déduire que la convergence de $(f_n)_{n \geqslant 0}$ ne peut pas être uniforme.

Exercice 4 (Distance associée au développement binaire). [Environ 5 points]

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On note E l'intervalle $[0, 1[$. On note d la distance sur $[0, 1[$ induite par la distance usuelle sur $\mathbb{R}$, autrement dit $d(x, y) = |x - y|$ pour tout x et y dans E. Pour tout $x \in [0, 1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D_n(x) = \lfloor 2^n x \rfloor - 2\lfloor 2^{n-1} x \rfloor$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n(x) \in \{0, 1\}$.
2. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} D_n(x) = x$.
3. Soient x et y dans E. Montrer que si $x \neq y$, l'entier $m(x, y) = \min\{n \geqslant 1 : D_n(x) \neq D_n(y)\}$ est bien défini. Montrer que les formules $D(x, y) = 2^{-m(x,y)}$ si $x \neq y$ et $D(x, y) = 0$ sinon définissent une distance sur E.
4. Montrer que pour tout x et y dans E, $d(x, y) \leqslant 2D(x, y)$.
5. Pour tout entier $N \geqslant 2$, on note $S_N = \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2^n}$. Calculer $d(S_N, 1/2)$ et $D(S_N, 1/2)$. Les distances d et D sont-elles équivalentes ?
6. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$ est une suite de Cauchy dans (E, D). Cette suite converge-t-elle dans (E, D) ?

Documents, Calculatrices, Téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Questions de cours [6 points]

1) Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application.

a) Écrire avec des quantificateurs que l'application f est continue en 0 (relativement aux normes indiquées).

b) Montrer que f est continue en 0 si et seulement si pour toute suite (u_n) de $(E, \|.\|)$ convergeant vers 0 la suite $(f(u_n))$ de $(F, \|.\|')$ converge vers $f(0)$ (critère séquentiel de continuité).

2) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

a) Que veut dire qu'une suite (u_n) de $(E, \|\cdot\|)$ est de Cauchy ?
b) Par définition, à quelle condition l'espace $(E, \|\cdot\|)$ est-il complet ?

On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est complet et on considère une suite (u_n) de $(E, \|\cdot\|)$.

c) Que veut dire que la série $\sum u_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$?
d) Montrer que si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge (on dit qu'il y a convergence normale) alors la série $\sum u_n$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$.

Exercice 1. [3 points]

1) A quelle condition sur le réel a la fonction

$$N_a(x, y) = \max(|x + y|, |x - ay|)$$

est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?

2) Quand la condition est remplie, décrire la boule unité B_a de la norme N_a.

Exercice 2. [3 points] Soit (E, d) un espace métrique.

1) Montrer qu'on obtient une nouvelle distance δ sur E en posant $\delta(x, y) = \min(d(x, y), 1)$.

2) Montrer que les distances d et δ définissent les mêmes suites convergentes et les mêmes suites de Cauchy.

3) Pour $x \in E$ donné, comparer selon la valeur de $r \geq 0$ les boules de centre x et de rayon r notées respectivement $B(x, r)$ dans l'espace (E, d) et $B'(x, r)$ dans l'espace (E, δ).

.../...

Exercice 3. [6 points]

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une application.
On dit que f est k-lipschitzienne si elle vérifie la propriété

$$\forall x, y \in E \quad ||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y|| \quad (*)$$

où $k > 0$, est un nombre réel fixé.

1) Montrer que si f est k-lipschitzienne pour un certain $k > 0$, alors f est continue de $(E, ||.||)$ dans $(E, ||.||)$.

2) On suppose que f est linéaire. Montrer que f est k-lipschitzienne équivaut à

$$\sup_{||x||=1} ||f(x)|| \leq k.$$

3) On considère le cas particulier où $E = \mathbb{R}^2$ et $||(u, v)|| = \max(|u|, |v|)$. Soit l'application linéaire

$$f(u, v) = (u + v, u + 2v).$$

Montrer que f est k-lipschitzienne pour au moins un $k > 0$ que l'on précisera.

On considère maintenant le cas où l'espace vectoriel normé $(E, ||.||)$ est *complet* et où k est un nombre fixé vérifiant $0 < k < 1$. Soit $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne.
Il s'agit de montrer ici que f possède un unique point fixe, c'est à dire qu'il y a un unique point $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = x_0$.

4) Montrer que si f a un point fixe, il est unique.

Soit la suite (v_n) de E définie par $v_0 = v \in E$ donné et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pose $u_n = v_{n+1} - v_n$.

5) Après avoir majoré $||u_{n+1}||$ à l'aide de $||u_n||$, montrer que la série $\sum u_n$ converge normalement.

6) En déduire que la suite (v_n) converge dans $(E, ||.||)$ et conclure.

Exercice 4. [3 points]

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, \pi/2]$ par $v_n(x) = (-1)^n(\sin x)\cos^n x$.
On pourra noter $u_n = |v_n| = (\sin x)\cos^n x$ sur $[0, \pi/2]$.

1) La suite v_n converge-t-elle simplement ? uniformément ?

2) Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge simplement.

Que vaut pour $x \in [0, \pi/2]$ la somme $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$?

3) Est-ce que $\sum v_n$ converge normalement ?
[on déterminera précisément $||v_n||_\infty = \sup_{t\in[0,\pi/2]} |v_n(t)|$]

4) Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément.

— ◇ —

Algèbre L3A - 2014

Durée : 4h

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits. La question avec une astérisque est un peu plus difficile et il est conseillé de ne pas passer deux heures dessus.

Problème A.

A1. Soit $A := \mathbb{C}[X, Y]$ et $I = (X - Y^2)$. L'idéal I est-il premier ? Est-il maximal ?

A2.(*) Trouver l'ensemble des idéaux maximaux de A contenant I.

Problème B. Soient p, q deux nombre premiers. On suppose que $p < q$ et $p \nmid q - 1$. Soit G un groupe d'ordre pq.

B1. Montrer que G possède un unique p-Sylow H_p et un unique q-Sylow H_q. Donner la structure de H_p et H_q.

B2. Montrer que $G = H_p \odot H_q$.

B3. En déduire que G est cyclique.

Problème C.

Soit G un groupe d'ordre $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$.

C1. Montrer que G possède un unique 17-Sylow H_{17}. Justifier l'existence de $y \in G$ tel que $H_{17} = \langle y \rangle$.

C2. Quel est l'ordre du groupe G/H_{17} ? En déduire l'existence de $x \in G$ tel que $G/H_{17} = \langle \overline{x} \rangle$.

C3. Montrer que $15 \mid o(x)$. En déduire que $o(x) = 15$ ou 255.

C4. On suppose que $o(x) = 255$. Montrer que G est cyclique.

C5. On suppose que $o(x) = 15$.

(a) Montrer qu'il existe $0 \leq m \leq 16$ tel que $xyx^{-1} = y^m$, puis que $m^{15} \equiv 1 \mod 17$. En déduire que l'ordre de $[m]_{17}$ dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$ divise 15, où $[m]_{17}$ désigne la classe de m modulo 17.

(b) Quel est l'ordre de $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$? En déduire que $o([m]_{17}) \mid 16$, puis que $m = 1$.

(c) Montrer que G est cyclique. On pourra calculer $o(xy)$.

C6. Résumer le résultat obtenu.

Problème D. Soit E un k-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $u \in L(E)$ un endomorphisme de E. On rappelle qu'un sous-espace F de E est stable par u si $u(F) \subset F$. Dans ce cas, on note $u_F \in L(F)$ l'endomorphisme de F induit par u.

Si $x \in E$, on pose $E_x = \mathrm{Vect}(u^m(x), m \geq 1)$.

D1. Soit $Q \in k[X]$, et soit $x \in E$. Montrer que les sous-espaces $\ker(Q(u))$ et E_x sont stables par u.

D2. Soit F un sous-espace stable par u. Montrer que $\mu_{u_F} \mid \mu_u$.

Soit $\pi \in k[X]$ un polynôme **irréductible** unitaire.

Si $\pi = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \ldots + a_0$, on pose

$$C(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & & & -a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_d(k).$$

D3. On rappelle que $\chi_{C(\pi)} = \pi$. Montrer que $\mu_{C(\pi)} = \pi$.

Dans toute la suite, on considère un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $\mu_u = \pi$.

D4. Justifier que $\chi_u = \pi^r$ pour un entier $r \geq 1$, et en déduire que $d \mid n$.

D5. On suppose que $n = dr$. Soit $u \in L(E)$. On suppose **dans cette question seulement** qu'il existe une base $\mathbf{e}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathbf{e})$ soit la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} C(\pi) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\pi) \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mu_u = \pi$.

D6. On revient au cas général. Soit $x \in E, x \neq 0$.

(a) Montrer que $\mu_{u_{E_x}} = \pi$.

(b) Soit $P \in k[X]$ tel que $P(u)(x) = 0$. Montrer que $P(u_{E_x}) = 0$, puis $\pi \mid P$.

(c) En déduire que $(1, x, \ldots, u^{d-1}(x))$ est une famille libre.

(d) Montrer également qu'elle est génératrice et en déduire la dimension de E_x.

D7. Soit F un sous-espace de E stable par u, et soit $x \in E, x \notin F$. Montrer que $F \cap E_x = \{0\}$.

Indication : si $y \in F \cap E_x$, montrer que $E_y \subset F \cap E_x$. En déduire que si $y \neq 0$, alors $E_y = E_x$ et obtenir une contradiction.

D8. Montrer qu'il existe $x_1, \ldots, x_r \in E$ non nuls tels que $E = E_{x_1} \oplus \ldots \oplus E_{x_r}$, et en déduire l'existence d'une base $\mathbf{e}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathbf{e})$

soit la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} C(\pi) & & \\ & \ddots & \\ & & C(\pi) \end{pmatrix}.$$

D9. En déduire que deux endomorphismes $u, u' \in L(E)$ tels que $\mu_u = \mu_{u'} = \pi$ sont semblables.

Le résultat subsiste-t-il si π n'est pas irréductible ? Justifier.

Problème E.

E1. Montrer qu'un anneau à p éléments, p premier, est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Indication : on pourra d'abord montrer que $\mathrm{car}(A) = p$.

E2. Soit (A, δ) un anneau euclidien. Montrer qu'il existe $x \in A, x \notin A^\times$ tel que l'application

$$A^\times \cup \{0\} \to A/(x)$$

donnée par $a \mapsto \overline{a}$, donc obtenue par restriction de la projection canonique, est surjective.

Indication : Traiter le cas où A est un corps à part. Si A n'est pas un corps, choisir $x \in A \setminus (A^\times \cup \{0\})$ tel que $\delta(x)$ soit minimal, et établir la surjectivité en utilisant une division euclidienne.

Soit $A = \mathbb{Z}[\alpha]$ avec $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{19}}{2}$, de sorte que l'on a $A = \{a + b\alpha, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

On pose $\nu(z) = |z|^2$ pour tout $z \in A$.

E3. Vérifier que $\alpha^2 + \alpha + 5 = 0$, et que $\nu(a + b\alpha) = (a - \dfrac{b}{2})^2 + \dfrac{19b^2}{4} = a^2 - ab + 5b^2 \in \mathbb{N}$.

E4. Montrer que $A^\times = \{\pm 1\}$.

On suppose A euclidien.

E5. Soit x comme dans **E2.** Vérifier soigneusement que $A/(x)$ a 2 ou 3 éléments. En déduire que $A/(x) \simeq \mathbb{F}_p$, avec $p = 2$ ou 3.

E6. En déduire l'existence d'un morphisme surjectif $\varphi : A \to \mathbb{F}_p$, avec $p = 2$ ou 3.

E7. Justifier que $\varphi(m) = \overline{m}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, où $\overline{m}$ est la classe de m modulo p (pour $p = 2$ ou 3).

E8. En déduire l'existence d'une racine du polynôme $X^2 + X + \overline{5} \in \mathbb{F}_p[X]$ dans $\mathbb{F}_p, p = 2$ ou 3.

E9. Montrer que A n'est pas euclidien.

Examen du 6 janvier 2014

4 heures

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de documents, calculatrices ou de téléphones portables est interdite.

Le sujet est constitué d'une question de cours, de trois exercices proches du cours et d'un problème. Au sein d'un exercice, certaines questions utilisent les précédentes, mais de nombreuses sont indépendantes entre elles. Le candidat pourra admettre le résultat d'une question afin de traiter les suivantes **s'il le précise explicitement**.

* *
*

I. Question de cours

1. Donner la définition d'un groupe, d'un morphisme de groupes.
2. Soit K l'ensemble des matrices
$$K := \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} ;\ x \in \mathbf{R},\ x \neq \frac{1}{2} \right\}.$$
   (a) $\forall\, x, y \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, montrer l'égalité $A(x)A(y) = A(x+y-2xy)$.
   (b) Pour $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ fixé, trouver $y \in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ tel que $x+y-2xy = 0$.
   (c) En déduire que $(K, \cdot)$ est un groupe commutatif, d'élément neutre $A(0)$.

* *
*

II. Exercice

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On suppose que u^2 est diagonalisable. Le but de cet exercice est de montrer que si u est inversible alors u est diagonalisable.

Deux questions préliminaires.

1. Soit $n \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $n^k = 0$ pour un certain $k \in \mathbf{N}$. Calculer $(\mathrm{Id} - n)(\mathrm{Id} + n + n^2 + \cdots + n^{k-1})$.
   En déduire que $\mathrm{Id} - n \in \mathcal{L}(E)$ est inversible.
2. Soient d inversible et n nilpotente. On suppose que $d \circ n = n \circ d$. Montrer que $d^{-1} \circ n$ est nilpotente.
   En écrivant $d - n = d \circ (\mathrm{Id} - d^{-1} \circ n)$, montrer que $d - n$ est inversible.

On suppose u^2 diagonalisable et u inversible.

1. Justifiez pourquoi on peut écrire $u = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $d \circ n = n \circ d$.
2. Calculer u^2. En déduire la décomposition de Dunford de $u^2 = d' + n'$ en fonction de d et n.
3. Montrer que d^2 diagonalisable implique $n \circ (2d + n) = 0$.
4. *On admettra que d est inversible.* Montrer $2d + n$ est inversible. En déduire alors que $n = 0$.
5. Conclure que u est diagonalisable.

L'hypothèse u inversible et le corps de base $\mathbf{C}$ sont importantes.

1. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ dans la base canonique. Montrer que u est inversible, u^2 est diagonalisable mais que u n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$.
2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$ dans la base canonique. Montrer que u^2 est diagonalisable mais que u ne l'est pas.

* *
*

III. Exercice

Soient $\gamma \in \mathbf{R}$ et $A_\gamma \in M_3(\mathbf{R})$ la matrice suivante :

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 2 & -\gamma+2 & -\gamma+2 \\ -3 & 2\gamma-1 & 2\gamma \\ 3 & -\gamma+1 & -\gamma \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\chi_{A_\gamma} = X^3 - (\gamma+1)X^2 + (\gamma-2)X + 2\gamma$.
2. Factoriser le polynôme caractéristique de A_γ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbf{R}[X]$ (on prendra soin de trouver quelques racines évidentes).
3. Déterminer selon la valeur de γ le polynôme minimal de A_γ.
4. En déduire les valeurs de γ pour lesquelles la matrice A_γ est diagonalisable.

On suppose désormais $\gamma = -1$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ associé à la matrice A_γ dans la base canonique.

1. Montrer que $\dim \ker(u - 2\mathrm{Id}) = 1$ et en trouver une base $\{v_1\}$.
2. Trouver $v_2 \neq 0$ tel que $v_2 \in \ker(u + \mathrm{Id})$.
3. Compléter la famille $\{v_1, v_2\}$ en une base de $\mathbf{R}^3$ telle que la matrice de u dans cette base soit de la forme
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
4. Donner la décomposition de Dunford de B (justifier la réponse).
5. Trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}A_{-1}P = B$.
6. En déduire la décomposition de Dunford de A_{-1}.

* *
*

IV. Exercice (Étude d'un anneau quotient)

On considère l'anneau des polynômes $\mathbf{R}[X]$ à coefficients réels. On note I l'idéal de $\mathbf{R}[X]$ engendré par X^2+1, c'est-à-dire :
$$I = \left\{P \in \mathbf{R}[X];\ P = (X^2+1)Q(X),\ Q \in \mathbf{R}[X]\right\}.$$
Soient $A = \mathbf{R}[X]/I$ l'anneau quotient et $\pi : \mathbf{R}[X] \to A$ l'application quotient.

On note f l'application de $\mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{C}$ qui à $P \in \mathbf{R}[X]$ associe $P(i) \in \mathbf{C}$.

1. Montrer que f est un morphisme d'anneaux et que f est surjectif.
2. Montrer que $X^2+1 \in \ker(f)$.
3. Plus généralement, montrer que le noyau de f est égal à I (effectuer la division de $P \in \ker(f)$ par X^2+1).
4. On considère l'application $\overline{f} : A \to \mathbf{C}$ définie par $\overline{f}(\pi(P)) = f(P)$.
Montrer que $\overline{f}$ est bien définie et que $\overline{f}$ est un morphisme d'anneaux, injectif.
5. Déduire de ce qui précède que $\overline{f}$ est un isomorphisme d'anneaux entre A et $\mathbf{C}$.

Soit $P = \alpha + \beta X \in \mathbf{R}[X]$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. On souhaiter calculer l'inverse de $\pi(P) \in A$.

1. Montrer que X^2+1 et P sont premiers entre eux.
2. Trouver $U, V \in \mathbf{R}[X]$ tels que $(X^2+1)U(X) + P(X)V(X) = 1$.
3. Montrer que $\pi(P)\pi(V) = \pi(1)$.
4. En notant $\pi(X) = \overline{X}$, déduire de ce qui précède
$$\pi(P)^{-1} = \frac{\alpha - \beta\overline{X}}{\alpha^2+\beta^2}.$$

V. Problème

N.B. : Vous pourrez admettre certains résultats des questions **1.** à **3.** afin de traiter les suivantes en **le précisant explicitement**.

1. — **Formule de Burnside**

On souhaite démontrer le résultat général suivant. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble X fini. Alors le cardinal de l'ensemble des orbites, noté N, vérifie :

$$(\star) \qquad N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}_g|, \qquad \text{avec } \mathrm{Fix}_g = \{x \in X; gx = x\}.$$

On pose $A = \{(g,x) \in G \times X;\ gx = x\}$. On note, pour $x \in X$, $\mathrm{Stab}_x(G) = \{g \in G;\ gx = x\}$

a) Montrer les égalités

$$|A| = \sum_{g\in G}|\{x \in X;\ gx = x\}| = \sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}_g|.$$

b) Montrer les égalités

$$|A| = \sum_{x\in X}|\{g \in G;\ gx = x\}| = \sum_{x\in X}|\mathrm{Stab}_x(G)|.$$

En utilisant la formule des classes, en déduire que $|A| = N \cdot |G|$.

c) Déduire $(\star)$ de **a)** et **b)**.

Applications aux sous-groupes finis du groupe des matrices orthogonales $SO_3(\mathbf{R})$:

$$SO_3(\mathbf{R}) = \{g \in M_3(\mathbf{R});\ \det(g) = 1, \forall\, p \in \mathbf{R}^3, ||g(p)|| = ||p||\}$$

où $||p|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ avec $p = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

Dans toute la suite, on suppose que G est un sous-groupe fini de $SO_3(\mathbf{R})$ tel que $G \neq \{\mathrm{Id}\}$.

2. — **Une action de G sur un espace X.**

a) Soit $g \in SO_3(\mathbf{R})$, $g \neq \mathrm{Id}$. On note la sphère unité $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$.
Montrer que si $p = (x,y,z) \in S^2$ alors $g(p) \in S^2$.
Montrer que $V_1 := \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$ est de dimension 1 : c'est l'*axe* de g.
Montrer que $V_1 \cap S^2$ est constitué exactement de deux points, p et $-p$, appelés *pôles* de la rotation.
On notera $X = \{$pôles de $g;\ g \in G,\ g \neq \mathrm{Id}\}$.

b) Montrer que X est fini.

c) Soit $g \in SO_3(\mathbf{R})$ et p un pôle de g. Pour tout $h \in SO_3(\mathbf{R})$ montrer que $hgh^{-1}(h(p)) = h(p)$.

d) Déduire des questions précédentes une action de G sur X.

3. — **Nombre d'orbites.**

On note N le nombre d'orbites pour l'action de G sur X. Pour chaque $i = 1,\dots,N$, on note $\mathcal{O}_i$ les orbites et on choisit $x_i \in \mathcal{O}_i$. Soit $G_i = \mathrm{Stab}_{x_i}(G)$. Nous allons établir $N \in \{2,3\}$.

a) Montrer que

$$|\mathrm{Fix}_g| = \begin{cases} |X| & \text{si } g = \mathrm{Id}, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant $(\star)$ déduire alors que $N = \frac{1}{|G|}(|X| + 2(|G|-1))$.

b) En utilisant la formule des classes, et l'égalité ci dessus, montrer la formule :

$$\sum_{i=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{|G_i|}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right).$$

c) Montrer que $|G_i| \geqslant 2$. En déduire $\frac{N}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{|G_i|}\right) < N$.

d) En utilisant $|G| \geqslant 2$ et les inégalités précédentes, déduire que $N \in \{2,3\}$.

Fin du sujet

Université Joseph Fourier
Licence Sciences et Technologies

Topologie L3A
Année 2014–2015

Examen du 6 janvier 2015

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits. Les deux exercices et le problème sont indépendants. Durée : 4 heures. Barème indicatif : 3 - 6 - 4 - 9.

Question de cours
Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et $f : E \to E'$ une application. Définir les propriétés suivantes :
i) f est continue;
ii) f est uniformément continue;
iii) f est lipschitzienne.
Vérifier que iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i), et donner des exemples montrant que les implications réciproques ne sont pas vraies. Sous quelle hypothèse supplémentaire sur E peut-on affirmer que i) $\Rightarrow$ ii) ? Si E et E' sont des espaces vectoriels normés, sous quelle hypothèse sur f peut-on affirmer que i) $\Rightarrow$ iii) ?

Exercice 1 (*Valeurs d'adhérence d'une suite dans un espace métrique compact*)
Soit (E, d) un espace métrique et $S = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E.

a) Définir l'ensemble A des valeurs d'adhérence de la suite S, et donner sans justification une caractérisation de A en termes des sous-suites que l'on peut extraire de S. Vérifier que A est une partie fermée de E.

b) On suppose désormais que (E, d) un espace métrique **compact**. Montrer que A est un compact non vide, et que

$$\mathrm{dist}(x_n, A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;.$$

Indication : on pourra argumenter par contradiction pour établir le dernier point.

c) On suppose dans cette question que $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Montrer que A est une partie connexe de E. *Indication :* on pourra argumenter par contradiction, en utilisant la question précédente.

d) Soit (E', d') un autre espace métrique et $f : E \to E'$ une application continue. Si $B \subset E'$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite image $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que $B = f(A)$. Cette égalité reste-t-elle vraie si on ne suppose pas que E soit compact ?

Exercice 2 (*Un hyperplan fermé sans direction normale*)
Soit $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \;, \qquad f, g \in E \;.$$

On rappelle que E est un espace préhilbertien. Pour tout $f \in E$, one note $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$.

On considère l'application $\ell : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\ell(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x , \qquad f \in E .$$

a) Vérifier que ℓ est une forme linéaire continue sur E, et que $|||\ell||| \le \sqrt{2}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $g_n \in E$ définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1/n \le x \le 1 , \\ nx & \text{si } -1/n \le x \le 1/n , \\ -1 & \text{si } -1 \le x \le -1/n . \end{cases}$$

Esquisser le graphe de g_n, et calculer $\ell(g_n)$ ainsi que $\|g_n\|$. En déduire la valeur exacte de la norme $|||\ell|||$.

c) On considère le sous-espace vectoriel $F = \ker(\ell) = \{f \in E ; \ell(f) = 0\} \subset E$. Rappeler pourquoi F est un hyperplan fermé de E. Exhiber un sous-espace $G \subset E$ de dimension un tel que $E = F \oplus G$.

d) On se propose de vérifier que le théorème de représentation de Riesz ne s'applique pas à la forme linéaire ℓ. Supposons au contraire qu'il existe une fonction $h \in E$ telle que

$$\ell(f) = \langle h, f \rangle , \quad \text{pour tout } f \in E . \tag{1}$$

En appliquant la relation (1) à des fonctions $f \in E$ identiquement nulles en dehors du segment $[0,1]$, montrer que $h(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Déterminer de même la valeur de h sur le segment $[-1,0]$. Conclure.

e) Montrer que $F^\perp = \{0\}$. *Indication :* Si g est un élément non nul de $F^\perp$, montrer qu'on a la représentation (1) avec $h = \alpha g$ si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante bien choisie.

Problème (*Rayon spectral d'un endomorphisme continu*)

Première partie :

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle possédant la propriété de sous-additivité suivante :

$$\alpha_{n+m} \le \alpha_n + \alpha_m , \qquad \text{pour tous les } n, m \in \mathbb{N} .$$

I.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Si m est un entier supérieur ou égal à n, on décompose $m = kn + \ell$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$. Vérifier que $\alpha_m \le k\alpha_n + \alpha_\ell$, et en déduire que

$$\frac{\alpha_m}{m} \le \frac{\alpha_n}{n} + \frac{1}{m}\max\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\} . \tag{2}$$

I.b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $\beta_n = \alpha_n/n$. En utilisant (2), montrer soigneusement qu'on a l'alternative suivante :

- Soit la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée inférieurement, auquel cas $\beta_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$;
- Soit la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée inférieurement, auquel cas elle converge et on a

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\alpha_n}{n} .$$

I.c) Si $\gamma_n = \exp(\alpha_n/n)$, en déduire que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans tous les cas.

Deuxième partie :
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $\mathcal{L}_c(E)$ l'algèbre des applications linéaires continues de E dans E, munie de la norme $|||\cdot|||$. Si $f \in \mathcal{L}_c(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n facteurs), avec la convention que $f^0 = \mathbf{1}$ désigne l'application identité.

II.a) Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$. Rappeler pourquoi $|||f^n||| \leq |||f|||^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.b) Montrer que la limite suivante existe :

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} |||f^n|||^{1/n} , \tag{3}$$

et que $\rho(f) \leq |||f|||$. *Indication :* si $|||f^n||| \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on posera $\alpha_n = \log(|||f^n|||)$ et on utilisera la première partie du problème.

Définition : on dit que $\rho(f)$ est le **rayon spectral** de l'application f.

II.c) Soit $|\cdot|$ une norme quelconque sur $\mathcal{L}_c(E)$, équivalente à la norme $|||\cdot|||$. Pour tout $f \in \mathcal{L}_c(E)$, vérifier que $|f^n|^{1/n} \to \rho(f)$ lorsque $n \to \infty$. En déduire que la définition (3) ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathcal{L}_c(E)$.

II.d) On suppose dans cette question que l'espace $(E, \|\cdot\|)$ est complet. Si $f \in \mathcal{L}_c(E)$ est tel que $\rho(f) < 1$, montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^n = \mathbf{1} + f + f^2 + f^3 + \ldots$$

converge absolument. En utilisant un résultat du cours, en déduire que l'application $\mathbf{1} - f$ est inversible dans l'algèbre de Banach $\mathcal{L}_c(E)$.

Troisième partie :
Dans cette dernière partie, on suppose que $E = \mathbb{C}^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$, et que $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^m$. Si $f \in \mathcal{L}_c(E)$, on identifie f à la matrice $A \in M_m(\mathbb{C})$ qui représente f dans la base canonique de $\mathbb{C}^m$. On veut montrer que $\rho(A) = R(A)$, où

$$R(A) = \max\Big\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \mathbb{C} \text{ est valeur propre de } A\Big\} . \tag{4}$$

III.a) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, vérifier que $|||A^n||| \geq |\lambda|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire que $\rho(A) \geq R(A)$.

III.b) Montrer que $\rho(A) = R(A)$ si A est nilpotente. Que peut-on dire des valeurs propres de A dans ce cas ?

III.c) Montrer que $\rho(A) = R(A)$ si A est diagonalisable. *Indication :* on pourra commencer par traiter le cas où $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ est diagonale; on rappelle que $|||A||| = R(A)$ dans ce cas (résultat vu en cours).

III.d) Dans le cas général, on rappelle (*décomposition de Dunford*) que $A = D + N$, où $D \in M_m(\mathbb{C})$ est diagonalisable, $N \in M_m(\mathbb{C})$ est nilpotente, et $DN = ND$. En utilisant cette décomposition, estimer la norme de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire que $\rho(A) \leq R(A)$. Conclure.

L3B Topologie Examen du lundi 5 janvier 2015 13h00-17h00

Documents, calculatrices, téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

A. Questions de cours [5 points].

Soit (E, d) un espace métrique (on pourra si on le souhaite se restreindre au cas d'un espace normé), et A une partie de E.

1) Montrer que si A est compacte, alors A est complète.

2) Montrer que si A est compacte, alors A est fermée et bornée.

3) La réciproque de 2) est-elle vraie sous des hypothèses particulières pour E ? Est-elle vraie en général ? Justifier la réponse.

4) Soit (F, d') un autre espace métrique et $h : E \to F$ une application continue. Montrer que si A est une partie connexe par arcs de E alors $h(A)$ est une partie connexe par arcs de F.

B. Exercice [6 points] Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la partie P formée de la réunion du rectangle $R = [0,1] \times [-\varepsilon, 0]$ et des segments verticaux $S_n = \{2^{-n}\} \times]0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$.

1) Représenter graphiquement la partie P pour $\varepsilon = 1/4$.

2) Déterminer l'intérieur P° et l'adhérence $\overline{P}$ de P. On justifiera les résultats.

3) Comparer du point de vue de l'inclusion P, $\overline{P}$, P°, $\overline{P^\circ}$, $(\overline{P})^\circ$.

4) P est-elle compacte ? Est-elle connexe par arcs ? On justifiera les réponses.

5) Existe-t-il une application continue $f : P \to \mathbb{R}$ strictement positive sur les segments S_n et strictement négative sur le rectangle R ?

6) Soit P' la partie définie de la même manière que P, obtenue en remplaçant 2^{-n} par $(2^{-n})^2 = 4^{-n}$ et ε par une autre valeur $\varepsilon' > 0$. Trouver un homéomorphisme explicite $\varphi : P \to P'$ (en justifiant la propriété d'homéomorphisme).

C. Exercice [5 points] Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Si A, B sont des parties de E, on désigne par $A + B$ l'ensemble des points de la forme $x + y$ avec $x \in A$, $y \in B$.

1) Si l'une des parties A, B (disons A) est un ouvert, montrer que $A + B$ est un ouvert.

2) On suppose que C est une partie convexe de E. Montrer que $\overline{C}$ est convexe (Indication : considérer une suite de segments $[x_n, y_n]$ avec $x = \lim x_n \in \overline{C}$ et $y = \lim y_n \in \overline{C}$, x_n, $y_n \in C$).

3) On suppose que C est une partie convexe de E d'intérieur non vide et soit $B(a, r)$ une boule ouverte contenue dans C. Pour tout $x \in C$ et tout $\varepsilon \in]0,1[$, montrer que la boule $B((1-\varepsilon)x + \varepsilon a, \varepsilon r)$ est contenue dans C (faire un dessin on pourra travailler dans $E = \mathbb{R}^2$ si on le souhaite).

4) Déduire de 3) que $\overline{C^\circ}$ contient C, puis que $\overline{C^\circ} = \overline{C}$. Montrer aussi que C° est convexe.

5) Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}^2$ (non convexe !) telle que $\overline{A} = \mathbb{R}^2$ mais $\overline{A^\circ} = \emptyset$.

D. Problème [7 points]. On désigne par $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des applications continues $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

On considère l'application $\Psi : E \to E$ définie par

$$\Psi(f) = f_1, \qquad f_1(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On admettra (c'est évident d'après les propriétés de l'intégrale) que Ψ est une application linéaire de E dans E.

1) On note u_0 la fonction constante égale à 1. Calculer $u_1 = \Psi(u_0)$ et par récurrence $u_n = \Psi^n(u_0)$ où Ψ^n désigne l'itérée n-ième $\Psi \circ \Psi \circ \ldots \circ \Psi$.

2) Si $f_1 = \Psi(f)$, montrer que l'on a $|f_1(x)| \leq C(x-a)$ où $C = \|f\|$. Montrer que Ψ est continue et déterminer la norme $|||\Psi|||$.

3) On pose $f_n = \Psi^n(f)$. En utilisant 1), donner une majoration de $|f_n(x)|$ en fonction de $C = \|f\|$, et déterminer la norme $|||\Psi^n|||$.

4) On note $S = C^1([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe C^1 sur $[a,b]$ (c'est-à-dire continues et ayant une dérivée continue sur $[a,b]$). On prendra ici $[a,b] = [-1,1]$. Montrer que

$$g_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$$

définit une fonction $g_n \in C^1([-1,1],\mathbb{R})$. Déterminer sa limite $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ et montrer que la limite est uniforme (Indication : étudier les variations de la différence $g_n - g$ sur $[0,1]$).
Le sous-espace $S = C^1([-1,1],\mathbb{R})$ est-il fermé dans $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ pour la norme uniforme $\|\ \ \|$? Est-il complet ?

5) Montrer que Ψ est une bijection de $E = C([a,b],\mathbb{R})$ sur le sous-espace $S_0 \subset S$ des fonctions $h \in S$ telles que $h(0) = 0$, et déterminer l'application linéaire inverse $\Psi^{-1} : S_0 \to C([a,b],\mathbb{R})$.

6) On pose $h_n(x) = (x-a)^n$, $n \geq 1$. Calculer $\Psi^{-1}(h_n)$ et comparer les normes $\|h_n\|$ et $\|\Psi^{-1}(h_n)\|$. L'application linéaire $\Psi^{-1} : S_0 \to C([a,b],\mathbb{R})$ est-elle continue si on munit S_0 et $C([a,b],\mathbb{R})$ de la norme uniforme $\|\ \ \|$?

Examen d’anglais de L3 Maths
Semestre 6
Vendredi 22 mai 2015

Durée de l’épreuve : 1 heure
Attention ! Seules les réponses inscrites sur la copie à coins collés pourront être prises en compte.
***Il y a deux sections A et B.** Prière de noter le n° des questions, d’aller à la ligne pour chaque réponse, et de suivre l’ordre chronologique en n’inscrivant que la réponse demandée.*

A) Reading comprehension (20 points)

1. Which of the following was the subtitle for the article *We're all losers to a gadget industry built on planned obsolescence*? (1 pt)

   a) Environmentalists demand new laws to force manufacturers to take responsibility for electronic products
   b) The current model for electronics ownership means technology companies have no incentive to provide better products
   c) Building a circular economy in the US, one smartphone at a time
   d) Yet solutions are possible say greens

Answer the following questions USING YOUR OWN WORDS IN COMPLETE SENTENCES. Do not simply copy from the text.

2. Give three examples which illustrate how consumers lose with their electronic devices. (3 pts)
3. What two reasons do manufacturers give for these drawbacks? (2 pts)
4. Why are existing producer responsibility laws not seen to be beneficial to consumers? (1 pt)
5. Explain what is meant by the ‘cloud offloading model’ (2 pts)
6. How might this model benefit the environment? (3 pts)
7. Why might consumers not like renting hardware? (2 pts)
8. What change in attitude towards ownership of electronic devices is predicted? (1 pt)
9. How might change in ownership practices become possible? (1 pt)

Find words in the text which mean the same as the following (1 pt each). The paragraph numbers indicate where the word is found:

10. to find a solution to something (paras 4 – 6)
11. to help or encourage to improve (paras 10 – 12)
12. items sold together (paras 10 – 12)
13. a problem or difficulty to overcome (paras 13 – 15)

We're all losers to a gadget industry built on planned obsolescence

1. It’s hard to deny that the smartphone has in part changed the world in favour of consumers. It helps us avoid expensive SMS costs thanks to online messaging apps, undercut taxi and hotel companies with the likes of Uber and Airbnb, and generally serves as a remote control to the sharing economy.
2. But when you shift the focus from what our devices help us access to how we access the devices themselves, the picture is less rosy.
3. Once we own a new device, we often can’t replace its batteries or take it to an independent repair shop for a simple fix. In fact, proprietary screws on Apple products often prevent us from opening Apple devices at all. It’s standard practice for companies to plan obsolescence into their products — including by introducing software upgrades that aren’t

compatible with existing hardware — and they simultaneously profit from the fact that the average laptop has a high likelihood of breaking within 3-4 years.

4. Equally, while the smartphone is a device that's intended to be taken everywhere — the pub, the loo, on a run — it is fragile and desirable enough to be rendered useless with just a few drops of water or an opportunistic thief. All this leads collaborative economy expert Rachel Botsman to ask: why is it consumers who take on all the risk?
5. "It's almost unbelievable that consumers haven't stood up and said the planned obsolescence of the gadget industry is absolutely obscene and not serving them," says Botsman. "But it's because no one has yet cracked a subscription model to electronics that takes the responsibility away from the consumer and puts it on the company to provide better products."
6. Consumers aren't the only losers here, the environment is too. Due to a lack of clear economic incentives and methods, globally only 12% of smartphone upgrades involve older devices being sold or traded for the new one. This means ecologically damaging devices end up languishing in drawers and eventually landfills.
7. There are, of course, reasons behind the status quo. Manufacturers claim that consumers place a premium on elegant devices, which means manufacturing slimmer (and thus, more breakable) screens. In addition, putting in batteries that aren't removable is often a risk-mitigation tactic by manufacturers who want to avoid consumers breaking their devices while trying to change the battery.
8. Extended producer responsibility laws — which oblige producers to take some responsibility for the afterlife of their products— exist at the EU level, but according to Stéphane Arditi, policy manager for products and waste for the European Environmental Bureau (EEB), the "finer details" of enforcement are left to the national level. This means that schemes vary widely across national supply chains and manufacturers, often confusing consumers.
9. While manufacturers such as Apple have introduced buyback schemes for iPads and iPhones in the UK and US — and smaller companies such as Gazelle in the US and Mazuma in the UK offer consumers a third-party trade-in service— these projects are voluntary on the part of consumers. In other words, phone manufacturers remain the clear beneficiaries of this ownership equation.
10. "If we look at what we can do to change the situation, it's a matter of us trying to set rules that say, for example, batteries should be removable whether by end user or repair shop," says Arditi. "But we also need to think about a new business model: if it was identified that changing some select parts of the computer could boost the performance without getting rid of the screens and plastic casing, a manufacturer would still get business from upgrading the device."
11. A recent report by the Green Alliance presented six circular economy models for gadgets and electronics ownership. Dustin Benton, the main author of the study, says the model that's most conducive to rental or leasing is the cloud offloading model.
12. From the consumer's perspective, this would involve paying for a bundled service package that provides a device, software, 3G, wifi and a minimum battery life. If any part of those agreed service commitments weren't met, ie the hardware was damaged, the provider would replace it. In addition, "offloading tasks to the cloud means older hardware can be used, including secondhand devices".
13. Benton adds that, in practice, this mass redistribution model would mean that manufacturers could refurbish phones no longer wanted by premium, developed-world consumers and resell them in developing and emerging markets. Though Apple has not confirmed this, the Green Alliance report notes this is likely already happening with secondhand Apple products in India.
14. "I'm not sure yet whether the market has tipped into designing devices to be sufficiently robust for second hand use," Benton says. "But what we've seen from other markets like automobiles is that where companies have a business incentive to keep valuable things in use for a long period of time, they do so and that's obviously good for the environment."

15. Even if the business model and legislation catches up, there is one more hurdle: consumer attitudes towards these precious objects. Our phones, laptops, and tablets can contain the most intimate details of our life and work, and many consumers are reluctant not to fully own their device.

16. However, from a software perspective, renting a laptop instead of owning one is increasingly feasible. With companies and services such as Dropbox, iCloud, Netflix and Spotify, many people don't actually need to store anything on their computer or devices locally. In theory, all someone needs is their various logins to make one device look identical to the next. Botsman predicts this broader shift in how we use and view our devices will be a boon to a rental or subscription model of the future.

17. "We're still in an age where we're so enchanted by the object itself that there's an aspiration to own it and a stigma to rent it," Botsman says. "But that's going to change really fast as we start to give up our relationship to these physical objects and accept they are just vessels or carrying devices to access the cloud."

http://www.theguardian.com/sustainable-business/2015/mar/23/were-are-all-losers-to-gadget-industry-built-on-planned-obsolescence

*the *Green Alliance*: A UK organisation that aims to promote sustainable development by ensuring that the environment is at the heart of decision-making

B) Grammar and register (20 points)

Write questions corresponding to the underlined part of each statement (2 points each).

1. <u>Propriety screws</u> on Apple products often prevent us from opening Apple devices.
2. <u>Due to a lack of clear economic incentives and methods</u>, globally only 12% of smartphone upgrades involve older devices being sold or traded for the new one.
3. Manufacturers such as Apple have introduced <u>buyback schemes for iPads and iPhones in the UK and US</u>
4. The model that's most conducive to rental or leasing is <u>the cloud offloading model</u>.
5. Manufacturers could refurbish phones no longer wanted by premium, developed-world consumers and resell them <u>in developing and emerging markets.</u>

There are 12 mistakes in the following paragraph. Copy them onto your answer sheet and then write the correction next to each error (0.5 point each). Where is the stress/accent in the underlined word in the first line? (1 point)

In the <u>developped</u> world, a new device sales have stagnated as consumer have begun to resist the two years upgrade cycles that have sustained the industry. Eight per cent of news sales are likely to be cannibalised by reuse by 2018, and the second-hand market is already worth 3$ billions by year in the US. Perhaps worse, the idea that consumers are being duped into upgrading early has begun to take hold: France has passed a law last month to limit planned obsolescence, EU has considered the merits of a total ban on built-in defects design to end the product's life, and a german study showed that some consumer goods are breaking sooner today than they did a decade ago.

Extract from: http://greenallianceblog.org.uk/2015/04/02/building-a-circular-economy-one-smartphone-at-a-time/

Find three different examples of less formal register in the first two paragraphs of the article *We're all losers to a gadget industry built on planned obsolescence* and show how you would make them more formal (3 points).

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER — Année 2014-2015

Licence 3 Parcours A

CALCUL DIFFÉRENTIEL

Examen du mercredi 20 mai 2015

Durée : 3 heures. Documents et calculatrices interdits.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation de la copie.

Les questions peuvent être traitées en admettant les résultats des questions précédentes.
Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ sont munis de la norme euclidienne canonique notée $||.||$.

Question de cours

Soient E, F des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E. Que signifie qu'une application $f : U \to F$ est deux fois différentiable en un point $a \in U$? Décrire la nature de la différentielle seconde de f en a (aucune preuve n'est demandée).

Exercice 1

On considère l'application $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $v(x,y,z) = x^2 + y^2$.

1. Donner les matrices dans les bases canoniques de la différentielle $dv_{(x,y,z)}$ et de la différentielle seconde $d^2v_{(x,y,z)}$ de v en un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

On considère l'ensemble $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ et } x^2 - y^2 + z = 0\}$.

2. Montrer que C est une sous-variété de classe C^1, compacte et de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

3. Montrer que v atteint un maximum et un minimum sur C. Déterminer ces valeurs extrémales et les points de C qui réalisent ces extrema.

Exercice 2

Soient a, b deux point distincts de $\mathbb{R}^2$.
On considère les espaces suivants :
- l'espace vectoriel $E = C^1([0,1], \mathbb{R}^2)$ des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ de classe C^1, muni de la norme $||\alpha||_{C^1} = \sup_{t\in[0,1]} ||\alpha(t)|| + \sup_{t\in[0,1]} ||\alpha'(t)||$. On pourra noter $||\alpha||_{C^1} = ||\alpha||$ en évitant la confusion entre les différentes normes.
- l'espace affine $\mathcal{F}$ des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 et valant a en 0, b en 1. Un élément de $\mathcal{F}$ est un arc paramétré $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dont les extrémités sont $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) = b$. On notera $\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) : t \to (x_\alpha(t), y_\alpha(t))$.
- la direction vectorielle $F = C^1_0([0,1], \mathbb{R}^2)$ de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 et nulles en 0 et 1.

On considère l'application :

$$\begin{aligned} L : E &\to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \int_0^1 ||\alpha'(t)||\, dt \end{aligned}$$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 ||\beta'(t)||^2\,dt = o_0(||\beta||_{C^1})$ lorsque $\beta \to 0$ dans E.

2. Montrer que L est différentiable en tout point $\alpha \in E$ qui est un arc régulier, c'est-à-dire en tout $\alpha \in E$ dont la dérivée α' ne s'annule pas sur $[0,1]$. Déterminer $dL_\alpha(\beta)$ pour tout $\beta \in E$.

3. Montrer que si un arc paramétré régulier $\alpha \in \mathcal{F}$ est un minimum (global) de L sur $\mathcal{F}$, alors la différentielle de L doit être nulle en restriction au sous-espace vectoriel F de E. *Indication : se ramener à la dimension 1.*
Remarque : c'est une généralisation à la dimension infinie du théorème sur les extrema liés vu en cours. L'espace affine $\mathcal{F}$ joue le rôle de sous-variété de E et F est l'espace tangent à $\mathcal{F}$ en tout point de $\mathcal{F}$.

4. Soit $\alpha \in \mathcal{F}$ un arc paramétré de classe C^2, minimisant L sur $\mathcal{F}$ et paramétré à vitesse constante en norme, c'est-à-dire tel que $t \mapsto ||\alpha'(t)||$ est constant sur $[0,1]$.

a. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\forall \beta \in F$, $\displaystyle\int_0^1 (x'_\alpha x'_\beta + y'_\alpha y'_\beta) = 0$.

b. En déduire que $\forall \beta \in F$, $\displaystyle\int_0^1 (x''_\alpha x_\beta + y''_\alpha y_\beta) = 0$.

c. Montrer que si $x''_\alpha(t_0)$ est non nul en un point $t_0 \in]0,1[$, alors il existe $\beta \in F$ telle que $\displaystyle\int_0^1 (x''_\alpha x_\beta + y''_\alpha y_\beta) > 0$. *Indication : on construira une application β ad hoc. Un graphe suffira, sans justification précise.*

d. En déduire que $\alpha'' = 0$.

5. Montrer qu'il existe dans $\mathcal{F}$ un unique arc paramétré de classe C^2 minimisant L dans $\mathcal{F}$ et paramétré à vitesse constante en norme. Caractériser géométriquement cet arc.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle autonome sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ suivante :

$$(E) \qquad \begin{cases} x'(t) = -2x(t) + y^3(t) \\ y'(t) = -2y(t) + x^3(t) \end{cases}$$

1. Montrer que cette équation différentielle vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Soit $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $V(x,y) = x^2 + y^2$.
Soit $(x,y) : I \to \mathbb{R}^2$ une solution maximale de E, définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 et vérifiant $(x(0), y(0)) \in B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid V(x,y) \leq 1\}$.
On note $V(t) = V(x(t), y(t))$ pour tout $t \in I$.

2. Montrer que pour tout $t \in I$, on a $V'(t) = -2V(t)(2 - x(t)y(t))$. En déduire que si de plus $(x(t), y(t)) \in B$, alors $V'(t) \leq 0$.

3. En considérant $\sup\{t \in I \cap \mathbb{R}^+ \mid (x(t), y(t)) \in B\}$, montrer que $(x(t), y(t)) \in B$ pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$.

4. En déduire que $V'(t) \leq -2V(t)$ pour tout $t \in I \cap \mathbb{R}^+$.

5. En déduire que $(0,0)$ est un point d'équilibre stable de (E).

Examen de la première session

20 mai 2015- 4 heures

Aucun document autorisé.

1. Question de cours. Soit $(E, \| \ \|_E)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une application. Quand dit-on que f est différentiable en a ? Montrer sans utiliser le cours que si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ différentiable sur E, où E est un espace vectoriel normé de dimension finie. et soit $g : E \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in E, \ g(x) = \sin\big(2\pi(f(3x) + f(x)^2)\big).$$
   (a) Montrer que g est différentiable sur E et calculer sa différentielle en un point $a \in E$.
   (b) On suppose que $E = M_n(\mathbb{R})$ et $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \ f(A) = \mathrm{Trace}(A)$. Pour $n = 1$, donner une expression simple de g. En déduire $dg(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de $dg(I_n)$.

3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3),$$
ainsi que
$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x + y + z = 0 \text{ et } \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = 3\}.$$
   (a) Montrer que Γ est un compact de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $f_{|\Gamma}$ admet un minimum strictement négatif ainsi qu'un maximum strictement positif.
   (b) Y a-t-il des extrema de $f_{|\Gamma}$ sur la droite $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ x = y = z\}$? En déduire **sans calcul** qu'il existe au moins six extrema de $f_{|\Gamma}$.
   (c) Déterminer tous les points critiques de $f_{|\Gamma}$.
   (d) Quelle est la nature de ces points critiques ? Que valent $\sup f_{|\Gamma}$ et $\inf f_{|\Gamma}$?

4. Soit $A \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière paramétrée par une abscisse curviligne $s \in \mathbb{R}$, ne passant jamais par A. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note $\Delta(s)$ la droite affine normale à la courbe en $f(s)$ et incluse dans le plan osculateur affine de la courbe en $f(s)$. On suppose que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $A \in \Delta(s)$. On notera $\{\tau(s), \nu(s), \beta(s)\}$ le repère de Frenet, avec $\tau(s) = f'(s)$.
   (a) Trouver une courbe satisfaisant ces hypothèses.

(b) Déterminer deux vecteurs directeurs naturels de la droite $\Delta(s)$. En déduire qu'on peut exprimer la condition "$A \in \Delta(s)$" sous forme d'annulation d'un certain produit vectoriel.

(c) En dérivant cette dernière relation, montrer que la torsion de la courbe f est nulle.

(d) Déduire de la dérivée de la question précédente l'expression de la courbure $K(s)$ en fonction de $\langle \overrightarrow{Af(s)}, \nu(s)\rangle$. En déduire que la courbure est constante.

(e) Donner toutes les solutions du problème.

5. On considère le système différentiel (E)

$$\left\{ \begin{array}{rcc} x'(t) & = & x + 2y + 3z + t \\ y'(t) & = & y + 2z + 1 \\ z'(t) & = & z + 1 \end{array} \right.$$

(a) Sur quel intervalle de temps les solutions maximales de (E_0) sont-elles définies ?

(b) Exprimer le système sous forme $X'(t) = AX(t) + B(t)$, avec $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ et $A \in M_3(\mathbb{R})$ et $B \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

(c) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer A en fonction de I_3, J et J^2.

(d) Calculer J^3. En déduire $\exp(tJ)$ et $\exp(tJ^2)$.

(e) On rappelle que $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$ si M et N commutent. Calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

(f) Résoudre le système homogène $X'(t) = AX(t)$.

(g) Soit $(x, y, z)(t)$ une solution de (E) avec condition initiale $X(t_0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $x(t)$.

Examen du 22 mai 2015

3 heures

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de documents, calculatrices ou de téléphones portables est interdite.
Le barème est à titre indicatif.

* *
*

Question de cours (2 points)

1. Donnez la définition d'une similitude affine d'un espace affine euclidien.
   Quels sont ses éléments caractéristiques ?
2. Décrire géométriquement la transformation du plan complexe donnée par $z \mapsto 2iz - 2$.

* *
*

***Exercice 1* (6 points)**. — Soit P un plan affine euclidien. Soit A et B deux points distincts de P. On considère $\varphi : P \to P$ définie par $\varphi(M) = MA + MB$.

1. Montrer que pour tout $M \in [A, B]$, $\varphi(M) = AB$.
2. Soit p la projection orthogonale sur la droite (AB). Soit $M \in P$ et $N = p(M)$.
   Montrer que $\varphi(M) \geqslant \varphi(N)$. Quand a t-on égalité ?
3. Montrer que pour tout $M \in P$, $\varphi(M) \geqslant AB$ et qu'on a égalité si et seulement si $M \in [A, B]$.
4. Soit $d \geqslant AB$ et $\mathcal{E}_d = \{M \in P;\ \varphi(M) \leqslant d\}$ Montrer que $\mathcal{E}_d$ est un ensemble convexe.
5. Soit $D \in [A, B]$ et $M \in P$. Montrer que si $N \in [D, M]$, alors $\varphi(N) \leqslant \varphi(M)$.
6. Soit C un point de P non aligné avec A, B et $\psi : P \to P$ définie par $\psi(M) = AM + BM + CM$. Soit M un point de P de coordonnées barycentriques (α, β, γ) dans le repère affine (A, B, C).
   Représentez sur un dessin la position de M selon le signe de ses coordonnées barycentriques (il y a 7 parties du plan).
7. On suppose que M n'appartient pas à l'intérieur du triangle ABC. Alors au moins une de ses coordonnées barycentriques est négative : supposons $\alpha \leqslant 0$. Soit M' le projeté orthogonal de M sur la droite (BC). Montrer que $\psi(M') \leqslant \psi(M)$.
8. En déduire que le minimum de la fonction ψ est atteint à l'intérieur (au sens large) du triangle ABC.

* *
*

***Exercice 2* (4 points)**. — Soit P un plan affine euclidien et f une application de P dans P.

1. Montrer que l'image d'un cercle par une similitude affine est un cercle.
2. On suppose à partir de maintenant que f est une application affine bijective telle que l'image par f de tout cercle de P est un cercle.
   (a) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[A, B]$. Montrer que $[f(A), f(B)]$ est un diamètre de $f(\mathcal{C})$ (*On pourra considérer l'image par f des droites passant par A (resp. par B) et tangentes au cercle $\mathcal{C}$ et utiliser les propriétés d'une application bijective et affine.*

(b) Montrer que l'image par f d'un cercle de centre O est un cercle de centre $f(O)$.

(c) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. Montrer qu'il existe une homothétie ou une translation g telle que $(g \circ f)(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

(d) Soit $\overrightarrow{P}$ la direction de P. Montrer que si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}$, $\|\overrightarrow{g \circ f}(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\|$ (si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ on pourra considérer le point M défini par $\overrightarrow{OM} = \frac{R}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$).

(e) Déduire des questions précédentes que f est une similitude.

* *
*

***Exercice 3* (5 points).** — Soient P un plan affine euclidien, $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et M, A, B trois points distincts de $\mathcal{C}$. On rappelle le théorème de l'angle inscrit : $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \mod \pi$.

1. Soit $\mathcal{D}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en A et T un point de $\mathcal{D}$ différent de A.
   Montrer que $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \mod \pi$.
2. En déduire que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \mod \pi$.
3. On fixe pour la suite deux points distincts A, B de P et $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère les lignes de niveau $L(\alpha) = \{M \in P;\ M \notin \{A, B\} \text{ et } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \mod \pi\} \cup \{A, B\}$.
   (a) Montrer que si $\alpha = 0 \mod \pi$ alors $L(\alpha)$ est la droite (AB).
   (b) On suppose que $\alpha \neq 0 \mod \pi$. Soit $T \in P$ tel que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha \mod \pi$. On note O l'intersection de la droite perpendiculaire à (AT) passant par A et de la médiatrice de $[AB]$. Montrer alors que $L(\alpha)$ est le cercle de centre O passant par A (et par B).

* *
*

***Exercice 4* (5 points).** — Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati d'un espace affine euclidien de dimension 3 et A_1, B_1, C_1, D_1 les projetés orthogonaux des sommets A, B, C, D sur les faces opposées. Les droites $(AA_1), (BB_1), (CC_1), (DD_1)$ sont appelées hauteurs du tétraèdre.
On note P le plan passant par A et orthogonal à la droite (CD).

1. Montrer que la droite (AA_1) est incluse dans le plan P.
2. Montrer que le point B appartient au plan P si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
3. Montrer l'équivalence des deux propriétés
   i) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
   ii) Les droites (AA_1) et (BB_1) sont sécantes.
4. On suppose que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales et que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.
   (a) Montrer que A_1 est l'orthocentre du triangle BCD.
   (b) Montrer que les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.
   (c) Montrer que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes.

EXAMEN GGMAT36e

21 mai 2015

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer les inégalités de Cauchy.

2. Enoncer le théorème de Montel.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$. En intégrant e^{2iaz-z^2} le long du rectangle de sommets 0, R, $R+ia$, ia, et en faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que l'on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2ax)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2}.$$

(On admettra la formule $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$.)

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière vérifiant $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on note $g(z) = f(1/z)$.

1. Montrer que la singularité de g au point 0 est nécessairement un pôle. En déduire l'existence d'une fonction polynôme P tel que la fonction $h : z \mapsto f(1/z) - P(1/z)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2. Montrer que f est une fonction polynôme. Indication : on regardera le comportement de $f - P$.

Exercice 4

1. Montrer que la formule
$$F(z) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{2^k}\right)$$
définit une fonction entière.

2. Pourquoi F est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Quel est le rayon de convergence ?

3. Donner une formule récursive pour les coefficients du développement en série entière en remarquant que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = (1-z)F(z/2)$.

T.S.V.P.

Problème
Soit D le disque unité ouvert $D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$ et C le cercle unité : $C = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}$.

1. **(Démonstration du lemme de Schwarz)** Soit h une fonction holomorphe sur D, telle que $h(0) = 0$ et $|h(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$. En considérant $g : z \mapsto h(z)/z$ de $D^* = D \backslash \{0\}$ dans $\mathbb{C}$ et en utilisant le principe du maximum, montrer les inégalités $|h(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D^*$ et $|h'(0)| \leq 1$. Montrer que s'il existe $z \in D^*$ tel que $|h(z)| = |z|$ ou si $|h'(0)| = 1$, alors il existe $\lambda \in C$ tel que pour tout $z \in D$, $h(z) = \lambda z$.

2. Pour $a \in D$, on considère l'application homographique Φ_a :
$$\Phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$
Montrer que Φ_a est partout définie sur $\overline{D}$, que $\Phi_a(C) \subset C$, puis que Φ_a est une bijection de D sur lui-même, de réciproque Φ_{-a}.

3. Soit f une fonction holomorphe de D dans lui-même. Quelle est l'image de 0 par $h = \Phi_{f(a)} \circ f \circ (\Phi_a)^{-1}$? En déduire que pour tout z de D,
$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|$$
puis
$$|f'(a)| \leq \frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$
(lemme de Schwarz-Pick).

4. Soit E une fonction continue de $\overline{D}$ dans $\mathbb{C}$ et holomorphe sur D. On dira que E est unitaire si $|E(z)| = 1$ pour tout $z \in C$.
   (a) Montrer qu'une fonction unitaire n'a qu'un nombre fini de zéros.
   (b) Montrer qu'une fonction unitaire sans zéro est une constante.
   (c) Montrer qu'une fonction unitaire ayant pour zéros $a_1, \ldots, a_n$, (chacun étant répété avec son ordre de multiplicité) s'écrit
   $$E = c\prod_{j=1}^{n}\Phi_{a_j},$$
   où $c \in C$ est une constante.

5. Soit f holomorphe bornée sur D, non identiquement nulle et $M = \sup\{|f(z)| \ ; \ z \in D\}$. Soit $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$ sur D.
   (a) Montrer que si $E : \overline{D} \to \mathbb{C}$ est une fonction unitaire telle que f/E se prolonge en une fonction holomorphe sur D, alors
   $$\forall z \in D, \ |f(z)| \leq M|E(z)|.$$
   (b) Dans la suite, on suppose que f a une infinité de zéros, et on note $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ la suite des zéros de f dans D, chacun étant répété avec son ordre de multiplicité. Montrer que
   $$\forall n \geq 1, \ |f(0)| \leq M|a_1||a_2|\cdots|a_n|.$$
   (c) En déduire que si $f(0) \neq 0$, la série $\sum_{n\geq 1}(1-|a_n|)$ converge.
   (d) Montrer que ce dernier résultat reste vrai si $f(0) = 0$.

Examen

Questions de cours.
– Donner la définition de tribu et de mesure.
– Énoncer le théorème de convergence monotone.
– Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
– Énoncer le théorème de Fubini-Lebesgue.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes en justifiant et en faisant référence précisément aux théorèmes que vous employez :

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{t}{\tan^2 t}\,dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t+e^{3t}}\,dt.$$

Exercice 2. Soit $p \in]1,+\infty[$ et q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. On se donne $f \in L^p([0,+\infty],\mathbb{R})$ et F définie par $F(t)=\int 0^t f(x)dx$.

1. Montrer que F est bien définie.
2. Énoncer l'inégalité de Hölder.
3. Montrer que $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{-1/q}F(t)=0$.
4. Montrer que $\lim\limits_{t\to +\infty} t^{-1/q}F(t)=0$ (*Indication : on pourra utiliser que* $F(t)=F(A)+(F(t)-F(A))$).

Exercice 3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ impaire et intégrable.

1. Montrer que $t\mapsto \frac{\hat{f}(t)}{t}$ est intégrable sur $[\frac{1}{n},n]$.
2. Montrer que $\hat{f}(t)=-2i\int_0^{+\infty}\sin(tx)f(x)dx$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\hat{f}(t)}{t}dt=-2i\int_0^{+\infty}\phi_n(x)f(x)dx$ où
$$\phi_n(x)=\int_{x/n}^{nx}\frac{\sin(u)}{u}du.$$
4. On rappelle que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}du=\frac{\pi}{2}$. Montrer que ϕ_n est bornée sur $]0,+\infty[$ et démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{\hat{f}(t)}{t}dt=-i\pi\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

Problème

A – Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on définit la fonction $Af : [0,1] \to \mathbb{C}$ par $Af(1) = 0$ et pour tout $x \in [0,1[$ par :

$$Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt.$$

1. Montrer que pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $Af(x)$ est bien définie pour $x \in [0,1[$ et que : $\lim\limits_{x \to 1^-} Af(x) = 0$.
2. Pour $x \in [0,1[$, montrer que $Af(x) = \sqrt{1-x} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}} du$.
3. En déduire que Af appartient à $\mathcal{C}^0([0,1])$ et que $A : f \mapsto Af$ est un opérateur de $\mathcal{C}^0([0,1])$ dans lui même dont on déterminera la norme.
4. On suppose dans cette question que $f(1) \neq 0$. Donner un équivalent de $Af(x)$ au voisinage de 1. Af est-elle dérivable en 1 ?
5. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que Af est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
   (b) On suppose de plus que $f(1) = 0$, montrer que Af est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

B – La formule d'inversion.

1. Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Montrer que :

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi.$$

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on définit la fonction Vf de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$V(f)(x) = \int_x^1 f(t)\, dt.$$

2. Montrer que $V : f \mapsto Vf$ est un opérateur de $\mathcal{C}^0([0,1])$ dans lui même et calculer sa norme.
3. Montrer l'égalité d'opérateurs de $\mathcal{C}^0([0,1])$: $A \circ A = \pi V$ (*indication : on pourra utiliser* **B.1.**).
4. En déduire que l'opérateur A est injectif sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.
5. (a) Déterminer l'image $\mathrm{Im}(V)$ de l'opérateur V de $\mathcal{C}^0([0,1])$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(A) = A^{-1}\left(\mathcal{C}^1([0,1])\right)$.
   (c) Montrer que toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $g(1) = 0$ appartient à $\mathrm{Im}(A)$.
6. Soit $g \in \mathrm{Im}(A)$. Montrer que l'unique fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $Af = g$ est donnée par $f = -\dfrac{1}{\pi}(Ag)'$.

Examen du Jeudi 21 mai 2015

Calcul intégral

Durée : 3 heures

La clarté, la concision et la précision des réponses données seront des facteurs importants d'appréciation des copies. On justifiera chaque réponse donnée. Documents et calculatrices interdits.

Questions de cours

Soient $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une application bornée.

1. Soit σ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. Définir les sommes de Darboux inférieures et supérieures pour f relativement à σ.

2. On suppose en outre que l'application f est réglée. Que peut-on dire de la borne supérieure de l'ensemble des sommes de Darboux inférieures pour f ?

Exercice 1

Déterminer, si elle existe, la limite, quand n tend vers $+\infty$ des sommes suivantes :

1.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(n+1)^2} \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right);$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{(n+1)^3} \cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right).$$

Exercice 2

On considère l'ensemble $K = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leqslant 1 \,\}$. Calculer la valeur de
$$\int_K \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Problème

Le volume de la boule unité

L'objectif de ce problème est de calculer le volume de la boule unité dans $\mathbf{R}^m$. Dans ce problème, la lettre m désigne un entier strictement positif. Pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, on note

$$\mathbf{B}^m(r) = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m \;\middle|\; \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} \leqslant r \right\}.$$

On pose en outre $\mathbf{B}^m = \mathbf{B}^m(1)$.

Partie I

Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \mathrm{d}x\,.$$

1. (a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a la relation :

$$I_n = I_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n-2} \cos(x)^2 \mathrm{d}x\,.$$

(b) À l'aide d'une intégration par partie, en déduire, pour $n \geqslant 2$, la relation

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

2. (a) Calculer I_0 et I_1.

(b) Démontrer que, pour tout $p \in \mathbf{N}$, on a les relations

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Partie II

Calcul du volume de la boule

1. (a) On suppose que $m \geqslant 2$. Démontrer qu'il existe des applications continues f_{m-1} et g_{m-1} de $\mathbf{B}^{m-1}$ dans $\mathbf{R}$, dont on donnera une expression explicite, telles que

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m = \{\, (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m \mid {} & (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbf{B}^{m-1} \\ & \text{et } f_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-1}) \leqslant x_m \leqslant g_{m-1}(x_1, \dots, x_{m-1}) \,\}. \end{aligned}$$

(b) Démontrer par récurrence que la fonction indicatrice de $\mathbf{B}^m$ donnée par $\mathbf{1}_{\mathbf{B}^m}(x) = 1$ si $x \in \mathbf{B}^m$ et $\mathbf{1}_{\mathbf{B}^m}(x) = 0$ sinon est intégrable au sens de Riemann.

On note $\mathrm{Vol}(X)$ *le volume d'une partie cubable* X *de* $\mathbf{R}^m$*, c'est-à-dire l'intégrale de sa fonction indicatrice. On pose* $\mathscr{V}_m = \mathrm{Vol}(\mathbf{B}_m)$.

2. Donner la valeur de $\mathscr{V}_1$. En utilisant les coordonnées polaires dans $\mathbf{R}^2$, donner la valeur de $\mathscr{V}_2$.

3. Démontrer que

$$\mathrm{Vol}(\mathbf{B}^m(r)) = r^m\,\mathrm{Vol}(\mathbf{B}^m).$$

4. (a) On suppose $m \geqslant 2$. Démontrer la formule

$$\mathscr{V}_m = 2\int_0^1 \mathrm{Vol}\left(\mathbf{B}^{m-1}\left(\sqrt{1-x_m^2}\right)\right)\mathrm{d}x_m\,.$$

(b) En déduire que

$$\mathscr{V}_m = 2\mathscr{V}_{m-1}\int_0^1 \sqrt{1-x_m^2}^{\,m-1}\mathrm{d}x_m\,.$$

5. (a) Démontrer l'égalité

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}^{\,m-1}\mathrm{d}t \;=\int_0^{\pi/2} \sin(x)^m\mathrm{d}x\,.$$

(b) Démontrer, pour tout entier strictement positif p, les relations

$$\mathscr{V}_{2p} = \frac{\pi^p}{p!} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{V}_{2p+1} = \frac{\pi^p 2^{2p+1} p!}{(2p+1)!}.$$

Examen du 19 mai 2015, de 14h à 17h.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables (netbooks) déconnectés du réseau autorisés.

Ce sujet comporte 2 pages. Barème donné à titre indicatif et non contractuel.

1. Méthode de la puissance et de Newton (9 points)

Soit P un polynôme unitaire de degré $d > 0$ à coefficients réels (ou complexes)

$$P = x^d + p_{d-1}x^{d-1} + ... + p_1 x + p_0$$

On suppose que P admet une seule racine de module maximal, que l'on notera z. On souhaite trouver une approximation de z par une méthode combinant la méthode de la puissance et de Newton. Par exemple pour fixer les idées et tester :

$$P = x^7 - 11x^4 + 5x - 55, \quad d = 7$$

(1) On construit une matrice compagnon M de P (commande `M:=tran(companion(P))` de Xcas) définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & ... & -p_{d-2} & -p_{d-1} \end{pmatrix}$$

on admettra que le polynôme caractéristique de M est P. Expliquer pourquoi la méthode de la puissance appliquée à M permet de déterminer la racine z de P.

(2) En utilisant la structure particulière de la matrice M, expliquer comment on peut calculer efficacement $v_{n+1} = Mv_n$ à partir de la liste l des coefficients de P par ordre croissant (`l:=revlist(symb2poly(P,x))`) en $O(d)$ opérations.

(3) Étant donné un petit réel $\varepsilon > 0$, quel test d'arrêt vous parait le plus judicieux pour stopper le calcul des v_n ? Pourra-t-on certifier que l'estimation de la valeur propre obtenue sera proche à ε près de z ?

(4) Programmer l'algorithme en passant en paramètre la liste `l` et le petit réel `eps` (on pourra utiliser `v[1..d-1]` qui extrait les éléments de `v` d'indice `1` à `d-1` inclus, `dotprod(l,v)` effectue le produit scalaire de `l` et `v` en tronquant le vecteur le plus long lorsqu'ils ne sont pas de taille égale, et les instructions `append` et `normalize`)

(5) Dans les questions suivantes, sauf la dernière, on travaille sur l'exemple. Donner une estimation z_4 de z pour l'exemple pour ε=`1e-4` et z_8 pour ε=`1e-8`. Combien d'itérations sont-elles nécessaires pour obtenir cette estimation ? Pouvait-on s'y attendre ?

(6) Afin d'accélérer le calcul, on se propose d'utiliser la suite itérative u_n de la méthode de Newton en partant de $u_0 = z_4$. Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle précision peut-on espérer en effectuant 2 itérations ?

(7) Calculer u_2. Proposer un raisonnement pour majorer l'erreur $|u_2 - z|$ et calculer ce majorant.

(8) Si on souhaite généraliser la méthode ci-dessus à un polynôme unitaire quelconque (sans faire l'hypothèse de l'existence d'une unique racine de module maximal), quels sont les obstacles prévisibles ? Comment peut-on les contourner ?

2. Interpolation, intégration (11 points)

On souhaite expérimenter une méthode d'intégration où on approche la fonction à intégrer f sur $[-1,1]$ par son polynôme d'interpolation P aux n points d'abscisses $x_1,...,x_n$ les racines du n-ième polynôme de Tchebychev $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. On pose donc :

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j f(x_j) = \int_{-1}^{1} P(t)\,dt$$

On va d'abord calculer les ω_j puis expérimenter.

(1) Déterminer x_1,x_2,x_3 pour $n=3$. En posant $f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2), f_3 = f(x_3)$, déterminer la valeur de P avec un logiciel de calcul formel, puis $\int_{-1}^{1} P(t)\,dt$, factoriser le résultat et en déduire $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ pour $n=3$. Que pensez-vous de cette méthode pour calculer les ω_j lorsque j est grand ?

(2) Rappeler pourquoi l'ordre de la méthode est au moins $n-1$, donner la valeur de $I(1), I(x), ..., I(x^{n-1})$, et en déduire un système linéaire vérifié par les ω_j.

(3) On rappelle qu'une matrice de Vandermonde est inversible si tous ces arguments sont distincts. En déduire que le système précédent permet de déterminer les ω_j.

(4) Faire le calcul par cette méthode pour $n=3$ et vérifier les résultats de la première question.

(5) Calculer une valeur approchée des ω_j pour $n=15$. Déterminer le conditionnement de la matrice du système. Que peut-on dire de la précision de la valeur des ω_j calculés en résolvant le système ?

(6) Quel est l'ordre de la méthode pour $n=3$? Est-il meilleur pour $n=4$?

(7) On se place maintenant sur une subdivision $[\alpha,\beta]$ où on transporte la méthode

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j f(t_j), \quad t_j = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2} x_j$$

Donner une majoration de l'erreur sur une subdivision, puis sur $[a,b]$ si on le découpe en N subdivisions (de taille $h = (b-a)/N$)

(8) Écrire une fonction `I(f,a,b,N)` appliquant la méthode précédente pour $n=3$.

(9) Appliquer la méthode précédente pour approcher $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ à `1e-5` près lorsque $n=3$: on déterminera une valeur de N qui assure la majoration de l'erreur.

(10) Comparer avec la valeur approchée de l'intégrale renvoyée par le logiciel, la majoration de l'erreur vous parait-elle fine ou grossière ? Si la majoration est grossière, pourrait-on l'améliorer ?

Corrigé de l'examen de première session

Questions de cours.
– Donner la définition de tribu et de mesure.
– Énoncer le théorème de convergence monotone.
– Énoncer le théorème de dérivation sous le signe somme.
– Énoncer le théorème de Fubini-Lebesgue.
Corrigé : voir le cours.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes en justifiant et en faisant référence précisément aux théorèmes que vous employez :

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\,dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t+e^{3t}}\,dt.$$

Corrigé : Après le changement de variable $t = xu$ dans les deux intégrales on trouve :

$$\int_1^3 \frac{x^2u^2}{u\tan^2(xu)}\,du \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{u^2}{xu+e^{3xu}}\,du.$$

On peut dominer chacune des deux familles de fonctions sous l'intégrale par une fonction intégrable et on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui donne comme limite

$$\int_1^3 \frac{1}{u}\,du \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 u^2\,du,$$

soit

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}\,dt = \ln(3) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t+e^{3t}}\,dt = \frac{1}{3}.$$

Exercice 2. Soit $p \in]1,+\infty[$ et q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. On se donne $f \in L^p([0,+\infty],\mathbb{R})$ et F définie par $F(t) = \int_0^t f(x)dx$.

1. Montrer que F est bien définie.
2. Énoncer l'inégalité de Hölder.
3. Montrer que $\lim_{t\to 0^+} t^{-1/q}F(t) = 0$.
4. Montrer que $\lim_{t\to +\infty} t^{-1/q}F(t) = 0$ (*Indication : on pourra utiliser que* $F(t) = F(A) + (F(t) - F(A))$).

Corrigé :

1. la fonction f est L^p sur $\mathbb{R}_+$ donc aussi L^p sur $[0,t]$ et comme la mesure de $[0,t]$ est finie, on en déduit que f est L^1 sur $[0,t]$. Donc F est bien définie.
2. Énoncer l'inégalité de Hölder sur $[a,b]$: soit f et g deux fonctions mesurables sur $[a,b]$ et p et q deux réels supérieurs ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alors
$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$
3. En prenant $g(t)=1$ pour tout t et en appliquant l'inégalité de Hölder on trouve
$$\int_0^t |f(u)|du \leqslant \left(\int_0^t |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t 1^q du\right)^{\frac{1}{q}}.$$
ce qui permet d'écrire que
$$|F(t)| \leqslant \int_0^t |f(u)|du \leqslant \left(\int_0^t |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{q}}$$
d'où
$$t^{-1/q}|F(t)| \leqslant \left(\int_0^t |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}}.$$
Or le terme de droite tend vers 0 quand $t \to 0$ car f est L^p sur $\mathbb{R}_+$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. la fonction f est L^p sur $\mathbb{R}_+$ donc il existe A tel que
$$\left(\int_A^{+\infty} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$
Alors pour $t > A$ on a
$$|F(t)-F(A)| \leqslant \int_A^t |f(u)|du \leqslant \left(\int_A^t |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}} (t-A)^{1/q},$$
et ainsi
$$\begin{aligned} t^{-1/q}|F(t)-F(A)| &\leqslant (t-A)^{-1/q}|F(t)-F(A)| \\ &\leqslant \left(\int_A^t |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left(\int_A^{+\infty} |f(u)|^p du\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

D'autre part pour t assez grand $t^{-1/q}|F(A)| < \varepsilon$. En combinant les deux on trouve que pour t assez grand

$$t^{-1/q}|F(t)| < 2\varepsilon.$$

On a donc démontré que la limite est égale à 0.

Exercice 3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ impaire et intégrable.

1. Montrer que $t \mapsto \frac{\hat{f}(t)}{t}$ est intégrable sur $[\frac{1}{n}, n]$.
2. Montrer que $\hat{f}(t) = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, i \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(tx)f(x)dx$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\hat{f}(t)}{t}dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i \int_0^{+\infty} \phi_n(x)f(x)dx$ où
$$\phi_n(x) = \int_{x/n}^{nx} \frac{\sin(u)}{u}du.$$
4. On rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du = \frac{\pi}{2}$. Montrer que ϕ_n est bornée sur $]0, +\infty[$ et démontrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\hat{f}(t)}{t}dt = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Corrigé :

1. Comme la fonction f est L^1 alors la fonction $\hat{f}$ est bien définie, mesurable bornée et continue donc la fonction $t \mapsto \frac{\hat{f}(t)}{t}$ est mesurable (comme produit de fonctions mesurables) et continue sur $[\frac{1}{n}, n]$ donc intégrable sur le même intervalle.
2. $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\cos(tx) - i\sin(tx))f(x)dx$. Or, f étant impaire, $x \mapsto \cos(tx)f(x)$ est impaire et $x \mapsto \sin(tx)f(x)$ est paire donc
$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} -2i\sin(tx)f(x)dx$$
ce qui donne immédiatement le résultat attendu.
3.
$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\hat{f}(t)}{t}dt &= \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} -2i\sin(tx)f(x)dxdt \\ &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin(tx)}{t} f(x)dxdt\end{aligned}$$

La fonction sous l'intégrable double est intégrable sur $[\frac{1}{n}, n] \times \mathbb{R}$ donc on peut appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue et on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\hat{f}(t)}{t} dt &= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\sin(tx)}{t} f(x) dt dx \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\sin(tx)}{t} dt dx \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \int_{\frac{x}{n}}^{nx} \frac{\sin(u)}{u} du dx \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \phi_n(x) dx
\end{aligned}$$

4. Si on note $\phi(a) = \int_0^a \frac{\sin(u)}{u} du$ alors $\phi_n(x) = \phi(nx) - \phi(\frac{x}{n})$. Or ϕ est une fonction bornée donc $||\phi_n||_\infty \leqslant 2||\phi||_\infty$. Donc $\phi_n(x)f(x)$ est dominée par une fonction intégrable et sa limite simple est $\frac{\pi}{2} f(x)$. Le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{\hat{f}(t)}{t} dt = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\pi}{2} f(x) dx = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}_+} f(x) dx$$

Problème

A – Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on définit la fonction $Af : [0,1] \to \mathbb{C}$ par $Af(1) = 0$ et pour tout $x \in [0, 1[$ par :

$$Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt.$$

1. Montrer que pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, $Af(x)$ est bien définie pour $x \in [0,1[$ et que : $\lim\limits_{x\to 1^-} Af(x) = 0$.
2. Pour $x \in [0,1[$, montrer que $Af(x) = \sqrt{1-x} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}} du$.
3. En déduire que Af appartient à $\mathcal{C}^0([0,1])$ et que $A : f \mapsto Af$ est un opérateur de $\mathcal{C}^0([0,1])$ dans lui même dont on déterminera la norme.
4. On suppose dans cette question que $f(1) \neq 0$. Donner un équivalent de $Af(x)$ au voisinage de 1. Af est-elle dérivable en 1 ?
5. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que Af est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.
   (b) On suppose de plus que $f(1) = 0$, montrer que Af est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

B – La formule d'inversion.

1. Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Montrer que :

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi.$$

Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on définit la fonction Vf de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$V(f)(x) = \int_x^1 f(t)\,dt.$$

2. Montrer que $V : f \mapsto Vf$ est un opérateur de $\mathcal{C}^0([0,1])$ dans lui même et calculer sa norme.
3. Montrer l'égalité d'opérateurs de $\mathcal{C}^0([0,1])$: $A \circ A = \pi V$ (*indication : on pourra utiliser* **B.1.**).
4. En déduire que l'opérateur A est injectif sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.
5. (a) Déterminer l'image $\operatorname{Im}(V)$ de l'opérateur V de $\mathcal{C}^0([0,1])$.
   (b) En déduire que $\operatorname{Im}(A) = A^{-1}\left(\mathcal{C}^1([0,1])\right)$.
   (c) Montrer que toute fonction $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $g(1) = 0$ appartient à $\operatorname{Im}(A)$.
6. Soit $g \in \operatorname{Im}(A)$. Montrer que l'unique fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $Af = g$ est donnée par $f = -\frac{1}{\pi}(Ag)'$.

Corrigé : il y avait une erreur de frappe dans le sujet à la question B.5.c : il fallait lire "Montrer que toute fonction $g \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $g(1) = 0$ appartient à $\operatorname{Im}(A)$."

A

1. Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et $x \in [0,1[$. La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}$ est continue sur $]x,1]$ et pour tout $t \in]x,1]$, on a :

$$\left|\frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{t-x}}$$

donc l'intégrale $\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$ est convergente et on a :

$$\left|\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \sqrt{1-x}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{x\to 1}\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt = 0$$

2. Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et $x \in [0,1[$, le changement de variable $t = x + (1-x)u$, $dt = (1-x)\,du$ nous donne :

$$Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}du$$

3. Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on définit la fonction Bf par :

$$\forall x \in [0,1],\ Bf(x) = \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}du$$

   La fonction :

$$\varphi : (x,u) \in [0,1] \times]0,1] \mapsto \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}$$

   est continue avec $|\varphi(x,u)| \leqslant \dfrac{\|f\|_\infty}{\sqrt{u}}$ pour tout $(x,u) \in [0,1] \times]0,1]$, la fonction $u \mapsto \dfrac{\|f\|_\infty}{\sqrt{u}}$ étant continue et intégrable sur $]0,1]$. Il en résulte que la fonction Bf est continue sur $[0,1]$.
   Comme $Af(x) = \sqrt{1-x}Bf(x)$ pour tout $x \in [0,1[$, on en déduit que Af est continue sur $[0,1[$.
   En **I.A.1**. on a prouvé que $\lim\limits_{x \to 1} Af(x) = 0 = Af(1)$, ce qui signifie que la fonction Af est continue en 1.
   La fonction Af est donc dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.
   De la linéarité de l'intégrale, on déduit que l'application A est linéaire de $\mathcal{C}^0([0,1])$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.
   Des inégalités $|Af(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty \sqrt{1-x} \leqslant 2\|f\|_\infty$ pour tout $x \in [0,1]$, on déduit en que $\|Af\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$ et que l'application linéaire A est continue avec $|||A||| \leqslant 2$.
   Pour $f = 1$, on a $Af(x) = 2\sqrt{1-x}$ et $\|Af\|_\infty = 2$, donc $|||A||| = 2$.

4.

   Pour $x \in [0,1[$, on a :

$$\frac{Af(x)}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}du = Bf(x)$$

   La fonction continue :

$$\varphi : (x,u) \in [0,1] \times]0,1] \mapsto \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}$$

   étant telle que :

$$\lim_{x \to 1^-} \varphi(x,u) = \frac{f(1)}{\sqrt{u}}$$

pour tout $u \in \left]0,1\right]$ et $\left|\varphi\left(x,u\right)\right| \leqslant \dfrac{\left\|f\right\|_\infty}{\sqrt{u}}$ pour tout $\left(x,u\right) \in \left[0,1\right]\times\left]0,1\right]$, la fonction continue $u \mapsto \dfrac{\left\|f\right\|_\infty}{\sqrt{u}}$ étant intégrable sur $\left]0,1\right]$. Il en résulte que :

$$\lim_{x\to1^-} \frac{Af\left(x\right)}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{f\left(1\right)}{\sqrt{u}} du = 2f\left(1\right) \neq 0$$

ce qui signifie que :

$$Af\left(x\right) \underset{x\to1^-}{\sim} 2f\left(1\right)\sqrt{1-x}$$

Pour $x \in \left[0,1\right[$, on a :

$$\left|\frac{Af\left(1\right)-Af\left(x\right)}{1-x}\right| = \frac{\left|Af\left(x\right)\right|}{1-x} \underset{x\to1^-}{\sim} \frac{2\left|f\left(1\right)\right|}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to1^-}{\to} +\infty$$

donc Af n'est pas dérivable en 1.

5.

(a) Pour $f \in \mathcal{C}^0\left(\left[0,1\right]\right)$ la fonction :

$$\varphi : \left(x,u\right) \in \left[0,1\right]\times\left]0,1\right] \mapsto \frac{f\left(x+\left(1-x\right)u\right)}{\sqrt{u}}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\varphi\left(x,u\right)\right| = \left|\frac{\left(1-u\right)f'\left(x+\left(1-x\right)u\right)}{\sqrt{u}}\right| \leqslant \left\|f'\right\|_\infty \frac{1-u}{\sqrt{u}}$$

pour tout $\left(x,u\right) \in \left[0,1\right]\times\left]0,1\right]$, la fonction continue $u \mapsto \left\|f'\right\|_\infty \dfrac{1-u}{\sqrt{u}}$ étant intégrable sur $\left]0,1\right]$. Il en résulte que la fonction Bf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,1\right]$ avec :

$$\left(Bf\right)'\left(x\right) = \int_0^1 \frac{\left(1-u\right)f'\left(x+\left(1-x\right)u\right)}{\sqrt{u}} du$$

donc Af est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,1\right[$ avec :

$$\begin{aligned}\left(Af\right)'\left(x\right) &= \sqrt{1-x}\left(Bf\right)'\left(x\right) - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}Bf\left(x\right)\\ &= \sqrt{1-x}\left(Bf\right)'\left(x\right) - \frac{1}{2\left(1-x\right)}Af\left(x\right)\end{aligned}$$

(b) On sait déjà que Af est continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

Comme Bf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec :

$$Bf(1) = f(1)\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2f(1) = 0$$

on a :

$$\frac{Bf(x)}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x}\frac{Bf(1)-Bf(x)}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\to} 0\cdot (Bf)'(1) = 0$$

donc :

$$\lim_{x\to 1^-}(Af)'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{1-x}\,(Bf)'(x) - \frac{1}{2\sqrt{1-x}}Bf(x)\right) = 0$$

et avec le théorème des accroissements finis, on déduit que Af est dérivable en 1 de dérivée nulle.

Puis avec :

$$\lim_{x\to 1^-}(Af)'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{1-x}\,(Bf)'(x) + \frac{1}{2}\frac{Af(1)-Af(x)}{1-x}\right) = 0$$

on déduit que $(Af)'$ est continue en 1.

En conclusion, Af est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

B

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$ est continue sur $]a,b[$ et pour $a < \alpha < \beta < b$, le changement de variable $t = a + u(b-a)$ nous donne :

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_{\frac{\alpha-a}{b-a}}^{\frac{\beta-a}{b-a}} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$$

avec, pour $u = \sin^2(\theta) \in]0,1[$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \int \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta)\left(1-\sin^2(\theta)\right)}} = 2\theta = 2\arcsin(u)$$

ce qui nous donne :

$$\int_\alpha^\beta \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = 2\left(\arcsin\left(\frac{\beta-a}{b-a}\right) - \arcsin\left(\frac{\alpha-a}{b-a}\right)\right) \underset{(\alpha,\beta)\to(a,b)}{\to} \pi$$

ce qui signifie que les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$ sont convergentes avec :

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi$$

2. Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, la fonction $-V(f)$ est la primitive de f nulle en 1, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et en particulier dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.
   De la linéarité de l'intégrale, on déduit que l'application V est linéaire de $\mathcal{C}^0([0,1])$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.
   Des inégalités $|Vf(x)| \leqslant \|f\|_\infty (1-x) \leqslant \|f\|_\infty$ pour tout $x \in [0,1]$, on en déduit que $\|Vf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ et que l'application linéaire V est continue avec $|||V||| \leqslant 2$.
   Pour $f = 1$, on a $Vf(x) = 1 - x$ et $\|Vf\|_\infty = 1$, donc $|||V||| = 1$.
3. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on a :

$$A \circ A(f)(1) = A(A(f))(1) = 0 = \pi V(f)(1)$$

   et pour $x \in [0,1[$, en utilisant le théorème de Fubini sur un triangle, on a :

$$\begin{aligned} A \circ A(f)(x) = A(A(f))(x) &= \int_x^1 \frac{Af(t)}{\sqrt{t-x}} dt = \iint_{0<x<t<u\leqslant 1} \frac{f(u)}{\sqrt{t-x}\sqrt{u-t}} du dt \\ &= \int_x^1 \left(\int_x^u \frac{f(u)}{\sqrt{t-x}\sqrt{u-t}} dt \right) du \end{aligned}$$

   avec, pour $0 \leqslant x < u < 1$:

$$\int_x^u \frac{dt}{\sqrt{u-t}\sqrt{t-x}} = \pi$$

   (d'après **I.B.1.**) ce qui nous donne :

$$A \circ A(f)(x) = \pi \int_x^1 f(u) du = \pi V(f)(x)$$

4. Si $f \in \ker(A)$, on a alors $\pi V(f) = A \circ A(f) = 0$ et en dérivant $V(f)$, on en déduit que $f = 0$. On a donc $\ker(A) = \{0\}$, ce qui signifie que A est injectif.
5.
   (a) Par définition toute fonction $g = V(f) \in \mathrm{Im}(V)$ est dans $\mathcal{C}^1([0,1])$ avec $g(1) = 0$.
   Réciproquement, pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^1([0,1])$ telle que $g(1) = 0$, la fonction $f = -g'$ est dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ et $V(f) = g$.
   On a donc :

$$\mathrm{Im}(V) = \left\{ g \in \mathcal{C}^1([0,1]) \mid g(1) = 0 \right\}$$

   (b) Si $g = A(f) \in \mathrm{Im}(A)$, on a alors $A(g) = A \circ A(f) = \pi V(f) = \pi V(\pi f) \in \mathcal{C}^1([0,1])$, soit $g \in A^{-1}\left(\mathcal{C}^1([0,1])\right)$.
   Réciproquement, si $g \in A^{-1}\left(\mathcal{C}^1([0,1])\right)$, on a alors $A(g) \in \mathcal{C}^1([0,1])$

et $Ag(1) = 0$ (définition de A), soit $A(g) \in \mathrm{Im}(V)$ et il existe $h \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $A(g) = V(h) = \dfrac{1}{\pi} A \circ A(h)$, donc $g - \dfrac{1}{\pi} A(h) \in \ker(A) = \{0\}$ et $g = A\left(\dfrac{1}{\pi} h\right) \in \mathrm{Im}(A)$.
On a donc :

$$\mathrm{Im}(A) = A^{-1}\left(\mathcal{C}^1([0,1])\right)$$

(c) Si $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ est telle que $g(1) = 0$, on a alors $A(g) \in \mathcal{C}^1([0,1])$ (question **I.A.5.**), soit $g \in A^{-1}\left(\mathcal{C}^1([0,1])\right) = \mathrm{Im}(A)$.

6. Comme A est injectif, pour toute fonction $g \in \mathrm{Im}(A)$ il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que $Af = g$.
De $A(g) = A \circ A(f) = \pi V(f)$, on déduit que $A(g) \in \mathrm{Im}(V)$, donc $A(g) = V\left(-(Ag)'\right)$ (question **I.B.5.**), soit $\pi V(f) = V\left(-(Ag)'\right)$ et par dérivation $\pi f = -(Ag)'$, soit $f = -\dfrac{1}{\pi}(Ag)'$.

Corrigé de l'examen du Jeudi 21 mai 2015

Calcul intégral

Questions de cours

1. On écrit $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ et on pose, pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$m_i = \inf_{t \in [a_{i-1}, a_i]} (f(t)) \qquad \text{et} \qquad M_i = \sup_{t \in [a_{i-1}, a_i]} (f(t)),$$

alors la somme de Darboux inférieure (resp. supérieure) pour f relativement à σ est définie par

$$D_-(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i (a_i - a_{i-1}) \qquad \left(\text{resp. } D_+(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i (a_i - a_{i-1}) \right).$$

2. Si f est réglée, elle est intégrable au sens de Riemann et

$$\sup_\sigma (D_-(f, \sigma)) = \int_a^b f(t) \mathrm{d}t\,,$$

où σ décrit l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Exercice 1

1. La somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(n+1)^2} \cos(\frac{k}{n+1}\pi)$ est une somme de Riemann pour l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x \cos(\pi x)$ relativement à la subdivision $(0, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{n+1}{n+1})$. Comme l'application est continue, et donc réglée, la somme converge vers $\int_0^1 t \cos(\pi t) \mathrm{d}t$ qu'on calcule à l'aide de l'intégration par partie :

$$\int_0^1 t \cos(\pi t) \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} [t \sin(\pi t)]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin(\pi t) \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi^2} [\cos(\pi t)]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}.$$

2. De même la somme considérée dans cette question est une somme de Riemann pour l'application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^2 \cos(\pi x)$ donc cette somme converge vers

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 \cos(\pi t) \mathrm{d}t &= \frac{1}{\pi} [t^2 \sin(\pi t)]_0^1 - \frac{1}{\pi} \int_0^1 2t \sin(\pi t) \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi^2} [t \cos(\pi t)]_0^1 - \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \cos(\pi t) \mathrm{d}t = -\frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^3} [\sin(\pi t)]_0^1 = -\frac{2}{\pi^2}. \end{aligned}$$

(Les plus malins ont noté que l'application f de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x(x-1) \cos(\pi x)$ vérifie $f(1-x) = -f(x)$ et donc $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = 0$ ce qui donne l'égalité entre les intégrales des questions **1.** et **2.**).

Exercice 2

On utilise le changement de variable des coordonnées sphériques $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ qui donne une bijection de $]0, 1] \times [0, \pi/2]$ sur $K - \{(0, 0)\}$. Il en résulte que

$$\int_K \sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} \times \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Problème

Partie I

1. (a) Comme $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n-2}(1-\cos(x)^2)\mathrm{d}x = I_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n-2}\cos(x)^2 \mathrm{d}x\,.$$

(b) On utilisant l'intégration par partie pour les applications $u : x \mapsto \frac{1}{n-1}\sin(x)^{n-1}$ et $v : x \mapsto \cos(x)$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n-2}\cos(x) \times \cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}[\sin(x)^{n-1}\cos(x)]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \mathrm{d}x\,.$$

Mais comme $n \geqslant 2$, $\sin(0)^{n-1} = 0$ et le premier terme donne 0. En combinant avec la question précédente, on obtient la relation $I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1}I_n$ qui se réécrit $\frac{n}{n-1}I_n = I_{n-2}$ ou encore $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

2. (a) On a $I_0 = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x = \pi/2$ et $I_1 = \int_0^{\pi/2}\sin(x)\mathrm{d}x = -[\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$.

(b) *Pour éviter les calculs avec les points de suspension, nous allons démontrer le résultat par récurrence sur p.* Pour $p = 0$, on a les relations

$$I_{2\times 0} = \frac{\pi}{2} = \frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}(0!)^2} \times \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad I_{2\times 0+1} = 1 = \frac{2^{2\times 0}(0!)^2}{(2\times 0+1)!}$$

Supposons le résultat démontré pour $p-1 \geqslant 0$. Les calculs suivants démontrent le résultat pour p

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \left(\frac{(2(p-1))!}{2^{2p-2}(p-1)!^2}\right) \times \frac{\pi}{2} = \frac{2p}{2p} \times \frac{2p-1}{2p} \times \frac{(2p-2)!}{2^{2p-2}(p-1)!^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!^2} \times \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \left(\frac{2^{2p-2}(p-1)!^2}{(2p-1)!}\right) = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p}{2p} \times \frac{2^{2p-2}(p-1)!^2}{(2p-1)!} = \frac{2^{2p}p!^2}{(2p+1)!}.$$

Partie II

1. (a) Soit g_{m-1} l'application de $\mathbf{B}^{m-1}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$(x_1, \ldots, x_{m-1}) \mapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2}.$$

L'application g_{m-1} est continue comme composée d'une application continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ par une application polynomiale de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}_+$. On pose également $f_{m-1} = -g_{m-1}$ qui est aussi une application continue. On peut alors écrire les égalités

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^m &= \left\{ (x_1,\dots,x_m)\in\mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^m x_i^2 \leqslant 1 \right\}\\
&= \left\{ (x_1,\dots,x_m)\in\mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 \leqslant 1 \text{ et } x_m^2 \leqslant 1-\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2 \right\}\\
&= \{\, (x_1,\dots,x_m)\in\mathbf{R}^m \mid (x_1,\dots,x_{m-1})\in\mathbf{B}^{m-1}\\
&\qquad \text{et } f_{m-1}(x_1,\dots,x_{m-1})\leqslant x_m \leqslant g_{m-1}(x_1,\dots,x_{m-1})\,\}.
\end{aligned}$$

(b) Pour $m=1$ la boule $\mathbf{B}^1$ est l'intervalle $[-1,1]$ et la restriction de sa fonction indicatrice à tout intervalle compact est en escalier. Cette fonction est donc intégrable au sens de Riemann. Si le résultat est vrai pour $m-1$, il résulte de la question **(a)** qu'il est vrai pour m. Par récurrence, le résultat vaut pour tout $m\in\mathbf{N}$.

2. Pour $m=1$ et $m=2$ ces volumes sont donnés par

$$\mathscr{V}_1=\int_{-1}^1 \mathrm{d}t\;=2 \qquad\text{et}\qquad \mathscr{V}_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\;=2\pi\times\frac{1}{2}=\pi.$$

3. On considére le changement de variable $f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$ donné par $\boldsymbol{x}\mapsto r\boldsymbol{x}$. On a

$$\det\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant m}}\right)=r^m.$$

Le formule du changement de variables implique donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathbf{B}^m(r)) &= \int_{\mathbf{R}^m}\mathbf{1}_{\mathbf{B}^m(r)}(y_1,\dots,y_m)\mathrm{d}y_1\,\dots\mathrm{d}y_m\\
&= \int_{\mathbf{R}^m}\mathbf{1}_{\mathbf{B}^m(r)}(rx_1,\dots,rx_m)r^m\mathrm{d}x_1\,\dots\mathrm{d}x_m\\
&= r^m\int_{\mathbf{R}^m}\mathbf{1}_{\mathbf{B}^m}(x_1,\dots,x_m)\mathrm{d}x_1\,\dots\mathrm{d}x_m\\
&= r^m\,\mathrm{Vol}(\mathbf{B}^m).
\end{aligned}$$

4. (a) Si on fixe $x_m\in[0,1]$, l'application de $\mathbf{R}^{m-1}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$(x_1,\dots,x_{m-1})\mapsto\mathbf{1}_{\mathbf{B}^m}(x_1,\dots,x_{m-1},x_m)$$

coïncide avec la fonction indicatrice de la boule $\mathbf{B}^{m-1}(\sqrt{1-x_m^2})$. Le théorème de Fubini donne donc l'égalité :

$$\mathscr{V}_m=\int_{-1}^1\mathrm{Vol}(\mathbf{B}^{m-1}(\sqrt{1-x_m^2}))\mathrm{d}x_m\;=2\int_0^1\mathrm{Vol}(\mathbf{B}^{m-1}(\sqrt{1-x_m^2}))\mathrm{d}x_m\,,$$

la seconde égalité s'obtenant par parité de l'intégrande en x_m.

(b) Il résulte des questions **3.** et **(a)** que

$$\mathscr{V}_m=2\mathscr{V}_{m-1}\int_0^1\sqrt{1-x_m^2}^{\,m-1}\mathrm{d}x_m\,.$$

5. (a) On fait le changement de variables $t=\cos(x)$, qui nous donne l'égalité

$$\int_0^1\sqrt{1-t^2}^{\,m-1}\mathrm{d}t\;=\int_{\pi/2}^0\sin(x)^{m-1}\times(-\sin(x))\mathrm{d}x\;=\int_0^{\pi/2}\sin(x)^m\mathrm{d}x\,.$$

On peut noter qu'on obtient la relation $\mathscr{V}_m = 2I_m \mathscr{V}_{m-1}$ pour tout entier $m \geqslant 2$.

(b) On va calculer par récurrence la valeur de $\mathscr{V}_m$ pour $m \geqslant 1$. On a $\mathscr{V}_1 = 2 = \frac{\pi^0 2^{2\times 0+1} 0!}{(2\times 0+1)!}$. Supposons maintenant que $m \geqslant 2$ et que $\mathscr{V}_{m-1}$ est donné par les formules de l'énoncé. Si m est pair, on pose $p = m/2$, et $\mathscr{V}_m$ est donné par les relations

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_{2p} &= 2I_{2p}\mathscr{V}_{2p-1} \\
&= 2 \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi^{p-1}2^{2p-1}(p-1)!}{(2p-1)!} \\
&= \frac{(2p)!}{(2p-1)!} \times \frac{1}{2} \times \frac{(p-1)!}{p!} \times \frac{\pi^p}{p!} \\
&= \frac{\pi^p}{p!}
\end{aligned}$$

Si m est impair, on pose $p = (m-1)/2$ et on obtient les égalités

$$\mathscr{V}_{2p+1} = 2I_{2p+1}\mathscr{V}_{2p} = 2 \times \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \times \frac{\pi^p}{p!} = \frac{\pi^p 2^{2p+1} p!}{(2p+1)!}.$$

Algèbre L3A - Session de juin

Durée : 4h

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Problème A. Soit $A := \mathbb{C}[X,Y]$ et $f = X^2 + Y^2 - 1$, $g = X^2 + Y^2$ des éléments de A.

A1. Démontrer que $A/(fg) \simeq A/(f) \times A/(g)$.

A2. L'anneau $A/(g)$ est-il intègre ? Justifiez votre réponse.

A3. Montrer que $X + iY$ est inversible dans $A/(f)$.

A4. Soit $\varphi : \mathbb{C}[U,T] \to A/(f)$ l'homomorphisme d'anneau défini par $\varphi(p(U,T)) = p(X + iY, X - iY)$. Montrer que φ est surjectif et calculer son noyau.

A5. Trouver l'ensemble des idéaux maximaux de A contenant f.

Problème B. Soit G un groupe fini, p un nombre premier et S un p-sous-groupe de Sylow de G. On rappelle que $Z(G)$ est le centre de G.

B1. Montrer que $Z(G)S$ est un sous-groupe de G contenant $Z(G)$.

B2. Démontrer que $(Z(G)S)/Z(G)$ est un p-sous-groupe de Sylow de $G/Z(G)$.

On suppose maintenant que $G/Z(G)$ est un p-groupe.

B3. Montrer que $Z(G)S = G$.

B4. Montrer que S est l'unique p-Sylow de G.

B5. Montrer que $S \cap Z(G)$ est l'unique p-Sylow de $Z(G)$.

B6. Montrer que $Z(G) \simeq (S \cap Z(G)) \times A$, où A est un groupe abélien. (On pourra utiliser le fait que $Z(G)$ est abélien et le lemme chinois).

B7. Démontrer que $G \simeq S \times A$.

Problème C. Soit A un anneau commutatif.

On pose $\mathrm{Nil}(A) = \{a \in A \mid \text{ il existe } m \geq 1, a^m = 0\}$.

C1. Montrer que $\mathrm{Nil}(A)$ est un idéal de A. (On pourra admettre que la formule du binôme de Newton est valable dans tout anneau commutatif)

C2. Montrer que pour tout $u \in A^\times$ et tout $a \in \mathrm{Nil}(A)$, on a $u - a \in A^\times$.

Indication : Traiter d'abord le cas $u = 1$. Dans ce cas, considérer $1 + a + \ldots + a^{n-1}$ pour n bien choisi.

C3. Montrer que $\mathrm{Nil}(A/\mathrm{Nil}(A)) = \{\overline{0}\}$.

C4. On se propose de calculer $R[X]^\times$ pour tout anneau commutatif R.

(a) Soit $P = r_nX^n + \ldots + r_1X + r_0 \in R[X]$ avec $r_0 \in R^\times$, et $r_1, \ldots, r_n \in \mathrm{Nil}(R)$. Montrer que $P \in R[X]^\times$.

(b) Soit $P = r_nX^n + \ldots + r_1X + r_0 \in R[X]^\times$, et soit $Q = s_mX^m + \ldots + s_1X + s_0 \in R[X]$ tel que $PQ = 1$.

(i) Montrer que $r_0 \in R^\times$, que $r_ns_m = 0$, puis que $r_ns_{m-1} + s_{n-1}b_m = 0$.

(ii) Montrer par récurrence que $r_n^{i+1}r_{m-i} = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.

(iii) En déduire que $r_n \in \mathrm{Nil}(R)$ et que $P - r_nX^n \in R[X]^\times$.

(iv) Montrer que $r_1, \ldots, r_n \in \mathrm{Nil}(R)$.

(c) Résumer le résultat obtenu.

Problème D. Soit k un corps, V un k-espace vectoriel et G un groupe. Soit $G \times V \to V$ une action de G sur V, qu'on suppose linéaire dans le sens que $g \cdot (v_1 + v_2) = g \cdot v_1 + g \cdot v_2$ pour tous $g \in G$, $v_1, v_2 \in V$ et $g \cdot (\lambda v) = \lambda(g \cdot v)$ pour tous $\lambda \in k$, $v \in V$ et $g \in G$.

D1. Montrer que l'ensemble V^G des points fixes de V sous l'action de G est un sous-espace vectoriel de V.

D2. Montrer que l'image de l'homomorphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathcal{S}(V)$$

induit par l'action ci-dessus est incluse dans le sous-groupe $GL(V) \subset \mathcal{S}(V)$.

Dans ce qui suit, on note encore $\rho : G \to GL(V)$ l'homomorphisme correspondant. On suppose également que G est fini d'ordre n et que $n \cdot 1_k \neq 0_k$.

D3. Montrer que l'endomorphisme $p_G : V \to V$ défini par

$$p_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$$

satisfait $p_G^2 = p_G$ et que son image est V^G.

D4. En déduire que si V est de dimension finie, on a $\dim(V^G) = \mathrm{tr}(p_G)$.

Soit maintenant X un ensemble fini sur lequel G agit et soit $V = \mathcal{F}(X, k)$ l'ensemble des fonctions de X dans k. Pour tout $g \in G$ et tout $f \in V$, on note $g \cdot f$ la fonction définie par $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ pour tout $x \in X$.

D5. Montrer que l'application $G \times V \to V$ définie dessus est une action linéaire.

D6. Pour tout $x \in X$, on note $e_x : X \to k$ la fonction définie par $e_x(x) = 1$ et $e_x(y) = 0$ si $y \neq x$. Montrer que $\{e_x \mid x \in X\}$ est une base de V.

D7. Montrer que pour tout $g \in G$ on a $\mathrm{tr}(\rho(g)) = |Fix(g)|$ où on a posé $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$.

D8. Montrer que $f \in V^G$ si et seulement si f est constante sur les orbites de X sous l'action de G. En déduire que $\dim_k(V^G) = |\Omega|$ où Ω est l'ensemble des orbites de X sous l'action de G.

D9. Démontrer la formule de Burnside : si G est un groupe fini agissant sur un ensemble fini X, et si Ω est l'ensemble des orbites de X sous l'action de G, alors on a

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Examen du 16 juin 2015

4 heures

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction.
L'utilisation de documents, calculatrices ou de téléphones portables est interdite.

* *
*

Question de cours

Rappeler la définition d'une partie génératrice S d'un groupe G.

1. Donner une partie génératrice finie de $\mathbf{Z}$.
   Quel est le sous-groupe de $\mathbf{Z}$ engendré par la partie $S = \{2, 3\}$? Et par $S = \{2, 4\}$?
2. Soit $\mathbb{H}_8$ l'ensemble des huit matrices complexes suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

   Vérifier que $\mathbb{H}_8$ est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (pour la multiplication).
   Montrer que $\mathbb{H}_8$ est engendré par les éléments $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

* *
*

I. Exercice (Vrai-Faux)

On prendra soin de justifier chaque réponse ou bien, le cas échéant, de donner un contre-exemple.

1. Les groupes $(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}, +)$ et $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ sont isomorphes.
2. Les groupes $(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}, +)$ et $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, +) \times (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, +)$ sont isomorphes.
3. Soit G l'ensemble $\mathbb{Q}$ muni de la loi de composition interne
$$* \ : \ \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \ (a, b) \mapsto a * b = a + b + ab.$$
   G est un groupe.
4. Soit H l'ensemble $\mathbb{Q}\backslash\{-1\}$ munit de la même loi $*$
   H est un groupe.

II. Exercice

1. Soit G un groupe fini (noté multiplicativement) et soit p un nombre premier. On suppose que, pour tout $g \in G$ on a $g^p = e$ où $e \in G$ est l'élément neutre.
   (a) Montrer que si $p = 2$ (pour tout $g \in G$ on a $g^2 = e$) alors G est commutatif.
   (b) On suppose que G est commutatif. Montrer que G est isomorphe au groupe $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$.
   Cette question est plus difficile et pourra être admise par la suite.
   (c) On suppose G non commutatif. Montrer que $|G| \geqslant p^2$.
2. Dans cette question on suppose que G est un groupe quelconque à 6 éléments.
   (a) Montrer que si G contient un élément d'ordre 6 alors G est isomorphe à $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.
   (b) Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 3 (noté σ) et un élément d'ordre 2 (noté τ).
   On pourra utiliser la question (1).
   (c) Montrer que $G = \{e, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$.
   (d) On suppose que G est commutatif. Montrer que G est isomorphe à $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.
   (e) On suppose que G n'est pas commutatif. Montrer que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$.
   Déduire alors que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

III. Exercice

Soit $\mathcal{A}$ un anneau. On dit qu'un élément $a \in \mathcal{A}$ est un élément *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $a^k = 0$. Dans ce cas l'indice de nilpotence de a est l'entier p tel que $a^p = 0$ et $a^{p-1} \neq 0$.

1. Quels sont les éléments nilpotents d'un anneau intègre ?
2. Déterminer les éléments nilpotents de l'anneau $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.
3. Déterminer les éléments nilpotents de l'anneau $\mathcal{A} = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.
4. Dans cette question $\mathcal{A}$ est un anneau quelconque.
   (a) Si a et b sont deux éléments nilpotents de $\mathcal{A}$ qui commutent entre eux, montrer que $a+b$ et ab sont aussi nilpotents. Que peut-on dire des indices correspondants si a et b sont respectivement d'indices p et q ?
   (b) Soit $x \in \mathcal{A}$. En développant $(1-x)^p$ montrer que si $1-x$ est nilpotent alors x est inversible.
   Montrer alors que $1 - x^{-1}$ est un élément nilpotent.
5. Soit $\mathcal{A} = M_n(\mathbf{C})$ l'anneau des matrices à coefficients complexes. Montrer que l'élément
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{C})$$
   est nilpotent. Quel est son indice de nilpotence ?
   Donner des exemples d'éléments nilpotents d'indices $1, 2, 3$ et n dans $M_n(\mathbf{C})$.
6. Dans cette question on cherche une caractérisation des éléments nilpotents de $\mathcal{A} = M_n(\mathbf{C})$.
   (a) Soient $M \in \mathcal{A}$ nilpotente et λ une valeur propre de M. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, λ^k est une valeur propre de M^k. Montrer alors que 0 est la seule valeur propre de M.
   (b) En déduire que si M est nilpotente alors son polynôme caractéristique satisfait $\chi_M(X) = (-1)^n X^n$.
   (c) Réciproquement, on suppose que $M \in \mathcal{A}$ vérifie $\chi_M(X) = (-1)^n X^n$. Montrer que M est nilpotent.

* *
*

IV. Exercice

On considère la matrice suivante
$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \qquad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de M est $\chi_M = -(X-2-m)(X+1-m)^2$.
2. Quel est le polynôme minimal de M ? M est-elle diagonalisable ?
3. Déduire de (1) les valeurs de m pour lesquelles M est inversible.
   Quelle est la matrice inverse de M lorsqu'elle existe ? (on ne fera pas de calculs)
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a
   $$M^n = \alpha_n M + \beta_n I_3, \qquad \text{avec } \alpha_n, \beta_n \in \mathbf{Q}.$$
   Calculer α_n et β_n en fonction de n.
   (*On pourra calculer le reste de la division de X^n par $(X-2-m)(X+1-m)$*)

Université Joseph Fourier **Topologie L3A**
Licence Sciences et Technologies **Année 2014–2015**

Examen du 16 juin 2015

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits. Les deux exercices et le problème sont indépendants. Durée : 4 heures. Barème indicatif : 2 - 6 - 6 - 8.

Question de cours
Si (E, τ) est un espace topologique, définir ce qu'est une partie connexe A de E. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties connexes de E, sous quelles conditions peut-on affirmer que l'union $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ est elle-même connexe ? (On ne demande pas de justifier la réponse.) Si A est une partie connexe de E qui intersecte une partie B de E ainsi que son complémentaire $B^c = E \setminus B$, montrer que A intersecte la frontière de B.

Exercice 1. (*Ensembles connexes par arcs polygonaux*)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel. Si $x, y \in E$, on note

$$[x, y] \,=\, \{(1-t)x + ty \,|\, t \in [0, 1]\} \,\subset\, E$$

le segment reliant les points x et y. Soit $A \subset E$ une partie non vide de E. Étant donnés deux points $a, b \in A$, on note $a \sim b$ s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une collection finie $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de points de A tels que $x_0 = a$, $x_n = b$, et $[x_{i-1}, x_i] \subset A$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On dit alors que les points a et b sont reliés par un arc polygonal dans A.

a) Vérifier que la relation $\sim$ ainsi définie est une relation d'équivalence sur A. On dit que A est connexe par arcs polygonaux si $a \sim b$ pour tous les points $a, b \in A$.

b) Pour tout $a \in A$, on note

$$C(a) \,=\, \{b \in A \,|\, b \sim a\}\ .$$

Vérifier que l'ensemble $C(a)$ est connexe par arcs, et donc (par un résultat du cours) connexe. Montrer sur des exemples que $C(a)$ n'est pas nécessairement une partie ouverte ni une partie fermée de A.

c) On suppose à présent que A est une partie ouverte (non vide) de E. Montrer que, pour tout $a \in A$, l'ensemble $C(a)$ défini ci-dessus est à la fois ouvert et fermé dans A.

d) En déduire que, si A est une partie ouverte de E, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes : i) A est connexe; ii) A est connexe par arcs; iii) A est connexe par arcs polygonaux.

Exercice 2. (*Prolongement des applications uniformément continues*)
Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques, A une partie (supposée non vide) de E_1, et $f : A \to E_2$ une application continue.

a) Définir la propriété suivante : "f est uniformément continue sur A".

b) On considère la fonction $\omega : [0,\infty[\to [0,\infty]$ définie par

$$\omega(r) \,=\, \sup\Big\{d_2(f(x),f(y))\,\Big|\, x,y \in A\,,\ d_1(x,y) \le r\Big\}\,, \qquad r \ge 0\,.$$

Vérifier que ω est croissante (au sens large) et que $\omega(0) = 0$. Montrer que $\omega(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$ si et seulement si f est uniformément continue sur A.

c) Avec les notations de la question précédente, vérifier que

$$d_2(f(x),f(y)) \,\le\, \omega(d_1(x,y))\,, \qquad \forall\, x,y \in A\,.$$

On suppose dans toute la suite que l'espace (E_2,d_2) est complet, et que l'application $f : A \to E_2$ est uniformément continue.

d) Si $x \in \overline{A}$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans A qui converge vers x, montrer que la suite image $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E_2 vers une valeur y qui ne dépend que de x (et non du choix de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x). On note $y = F(x)$.

e) Vérifier que l'application $F : \overline{A} \to E_2$ construite dans la question précédente est uniformément continue sur $\overline{A}$, et que F prolonge f (c'est-à-dire que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$).

f) On suppose ici que $(E_1,\|\cdot\|)$ et $(E_2,\|\cdot\|')$ sont deux espaces vectoriels normés (sur le même corps), et que A est un sous-espace dense de E_1. Montrer que toute application linéaire continue $f : A \to E_2$ se prolonge en une application linéaire continue $F : E_1 \to E_2$, et que les normes de ces deux applications sont égales : $|||F||| = |||f|||$.

Problème. (*Applications continues propres*)

Définitions :

1) On dit qu'une suite dans un espace métrique (E,d) *s'échappe à l'infini* si toute partie compacte de E ne contient qu'un nombre fini d'éléments de cette suite.

2) Si (E_1,d_1), (E_2,d_2) sont deux espaces métriques, on dit qu'une application $f : E_1 \to E_2$ est *propre* si, pour tout compact $K \subset E_2$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compacte dans E_1. On dit que f est *fermée* si, pour tout fermé $A \subset E_1$, l'image directe $f(A)$ est fermée dans E_2.

Dans toute la suite, on suppose que (E_1,d_1) et (E_2,d_2) sont deux espaces métriques, et que $f : E_1 \to E_2$ est une application continue.

Première partie :

a) Si $f : E_1 \to E_2$ est propre et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans E_1 qui s'échappe à l'infini, montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ s'échappe à l'infini dans E_2.

b) Inversement, si f n'est pas propre, montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E_1 qui s'échappe à l'infini, telle que la suite image $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'échappe pas à l'infini dans E_2.

c) Soit (E_3,d_3) un troisième espace métrique, et $g : E_2 \to E_3$ une application continue.

- Si f est surjective et $g \circ f$ est propre, montrer que g est propre.
- Si g est injective et $g \circ f$ est propre, montrer que f est propre.

Dans ces résultats, les hypothèses de surjectivité (sur f) et d'injectivité (sur g) sont-elles nécessaires ?

Seconde partie :
On suppose désormais que l'espace E_2 est localement compact, c'est-à-dire que tout point $y \in E_2$ possède un voisinage compact. Le but de cette partie est de montrer que f est propre si et seulement si f est fermée et si l'image inverse par f de tout singleton est une partie compacte de E_1.

d) Si f est propre, montrer que f est fermée. *Indication :* Soit A une partie fermée de E_1 et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $f(A)$ qui converge vers $y \in E_2$. En utilisant l'existence d'un voisinage compact de y et l'hypothèse sur f, montrer que $y \in f(A)$ et conclure.

e) Inversement, on suppose désormais que f est fermée et que l'image inverse par f de tout singleton de E_2 est une partie compacte de E_1. Soit $K \subset E_2$ un compact non vide, et $\{V_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ un recouvrement ouvert de $f^{-1}(K)$, c'est-à-dire que

$$f^{-1}(K) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \ ,$$

où Λ est un ensemble d'indices quelconque et V_λ est un ouvert de E_1 pour tout $\lambda \in \Lambda$. Pour tout $y \in K$, montrer qu'il existe un ensemble fini $\Lambda_y \subset \Lambda$ tel que

$$f^{-1}(\{y\}) \subset W_y := \bigcup_{\lambda\in\Lambda_y} V_\lambda \ .$$

f) Pour tout $y \in K$, notons $\Omega_y = E_2 \setminus f(E_1 \setminus W_y)$. Vérifier que Ω_y est un ouvert de E_2 qui contient le point y, et que $f^{-1}(\Omega_y) \subset W_y$.

g) Montrer qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ et des points $y_1, \ldots, y_N \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_{y_i} \ .$$

En déduire que $f^{-1}(K) \subset \cup_{\lambda\in\Lambda'} V_\lambda$ où $\Lambda' = \Lambda_{y_1} \cup \ldots \cup \Lambda_{y_N}$ est un sous-ensemble fini de Λ. En conclure que $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de E_1, et que f est donc propre.

L3B – Topologie **Examen du lundi 15 juin 2015** **8h30-12h30**

Documents, calculatrices, téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

O. Questions de cours et applications [5 points]. Tous les espaces considérés ici sont des espaces vectoriels normés.

1) Rappeler la définition des parties compactes en termes de suites extraites. Expliciter une démonstration directe du fait qu'un rectangle fermé $[a,b]\times[c,d]$ de $\mathbb{R}^2$ est compact. En déduire alors le fait que dans $\mathbb{R}^2$ une partie fermée et bornée est compacte.

2 Montrer par un argument explicite que la propriété 1) est fausse dans l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites bornées muni de la norme $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

3) Donner un exemple d'espace vectoriel normé qui n'est pas un espace de Banach (on rappelle qu'un espace de Banach est par définition un espace normé complet). On justifiera la réponse.

4) Soit $(E, \|\bullet\|)$ un espace de Banach. Montrer que si on a une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ d'éléments $u_n \in E$ tels que la série à termes réels positifs $\sum_{n\geq n_0} \|u_n\|$ soit convergente dans $\mathbb{R}_+$, alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est convergente dans $(E, \|\bullet\|)$.

Exercice I [6 points]. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne uselle, et on considère les parties

$$F = B(0,1)\cap\mathbb{Q}^2, \qquad G = B(0,2)\cap(\mathbb{R}^2\smallsetminus\mathbb{Q}^2)$$

où $B(m,r)$ désigne la boule ouverte de centre $m=(x,y)$ et de rayon r.
1) Déterminer F°, $\overline{F}$, G°, $\overline{G}$, $(F\cup G)^\circ$, $\overline{F\cup G}$, en justifiant les résultats.
2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I\to\mathbb{Q}$ une application continue. Montrer que u est constante. La partie F est-elle connexe par arcs ?
3) Montrer que le complémentaire $\mathbb{R}\smallsetminus\Delta$ d'une partie dénombrable Δ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire que $\mathbb{R}\smallsetminus\Delta$ rencontre tout intervalle ouvert non vide $]a,b[$ de $\mathbb{R}$).
4) Soit $m_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\smallsetminus\mathbb{Q}^2$ un point fixé. En considérant le cardinal de l'ensemble des droites (m_0m) passant par un autre point $m=(x,y)\in\mathbb{Q}^2$, montrer que l'ensemble des pentes $a\in\mathbb{R}$ telles que la droite $y-y_0=a(x-x_0)$ ne contienne aucun point de $\mathbb{Q}^2$ est dense dans $\mathbb{R}$.
5) En déduire que G est connexe par arcs (un dessin et un raisonnement géométrique pourront aider !). Existe-t-il une application continue $h : G\to\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}$?

Exercice II [4 points]. Avec la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$, on considère les espaces métriques suivants :

$$E_1=\mathbb{R}^2, \quad E_2=[-1,1]\times[-1,1], \quad E_3=]-1,1[\times]-1,1[, \quad E_4=]-1,1[\times\{0\}, \quad E_5=\mathbb{Q}\times\mathbb{R}.$$

1) Dire quelles sont les paires (E_i,E_j) pour lesquelles E_i n'est pas homéomorphe à E_j en justifiant précisément la non existence d'un homéomorphisme.

2) Pour les paires (E_i,E_j) où E_i est homéomorphe à E_j, donner un homéomorphisme explicite entre E_i et E_j.

Exercice III [8 points + bonus]. On considère l'espace vectoriel $E = C([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

1) Vérifier que, comme cela est affirmé, $\|\bullet\|_1$ est bien une norme sur E.

2) On considère l'application linéaire $\Phi : E \to E$ telle que $\Phi(f) = g$ avec $g(x) = f(\sqrt{x}\,)$. À l'aide d'un changement de variable adéquat, trouver une majoration de $\|\Phi(f)\|_1$ et en déduire une majoration de $|||\Phi|||$.

3) On pose $e_n(x) = x^n$. Calculer $\|e_n\|_1$ et $\|\Phi(e_n)\|_1$. En déduire la valeur précise de $|||\Phi|||$.

4) Peut-on avoir l'égalité $\|\Phi(f)\|_1 = |||\Phi|||\ \|f\|_1$ pour f non nulle ? Déduire directement de ce résultat (sans appliquer le théorème de Riesz !) que la sphère unité $S = S(0,1)$ de E n'est pas compacte.

5) Montrer que $\Phi : E \to E$ est une application linéaire bijective et déterminer $\Psi = \Phi^{-1}$. On pose maintenant $g_n(x) = (1-\sqrt{x}\,)^n$. Calculer $\|g_n\|_1$ et $\|\Psi(g_n)\|_1$. L'application linéaire $\Psi = \Phi^{-1}$ est-elle continue ?

6) Pour $n \geq 1$, on considère la fonction $x \mapsto u_n(x) = \frac{1}{n}x^n$ sur $[0,1]$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_1$ est convergente et calculer sa somme.

7) Montrer d'autre part que la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, vers une somme $\sigma(x)$ que l'on identifiera [Indication : appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$].

8) On suppose que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge vers une limite f dans l'espace normé $(E, \|\bullet\|_1)$. Montrer que f doit coïncider avec σ sur $[0,1[$. Est-ce possible ? L'espace $(E, \|\bullet\|_1)$ est-il complet ?

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER **Année 2014-2015**
Licence 3 Parcours A

CALCUL DIFFÉRENTIEL

Examen du lundi 15 juin 2015

Deuxième Session

Durée : 3 heures. Documents et calculatrices interdits.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation de la copie.

Question de cours

1. a. Donner la définition d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ par submersion.

b. Donner la définition de l'espace tangent (vectoriel) à la sous-variété en un point.

c. Caractériser l'espace tangent en un point à une sous-variété définie par une submersion et montrer cette caractérisation.

2. Quelle application contractante peut-on utiliser pour montrer à l'aide du théorème du point fixe de Banach-Picard qu'une équation différentielle linéaire

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

avec $A : I \to L(\mathbb{R}^n)$, $b : I \to \mathbb{R}^n$ définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, a ses solutions maximales définies sur I entier ? (aucune preuve n'est demandée)

Exercice 1

On note $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ l'ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices réelles $n \times n$ de déterminant strictement positif.
On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rl} \phi : \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ M & \mapsto \ln(\det M) \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est de classe C^∞.

2. Montrer qu'en tout $M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, la différentielle de ϕ est définie par $d_M(\phi)(H) = \mathrm{tr}(M^{-1}H)$ où tr désigne la trace.

3. Déterminer $d^2\phi_M(H, H')$ pour tout $M \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, $H, H' \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit $P_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexes de degré n possédant une racine simple z_0. On note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n, que l'on munit d'une norme. On considère l'application ϕ suivante :

$$\begin{aligned} \phi \,:\, \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (P, z) \quad &\mapsto P(z) \end{aligned}$$

1. Montrer que ϕ est de classe C^∞.

2. À l'aide du théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe un voisinage U de P_0 dans $\mathbb{C}_n[X]$ et une application $R : U \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ telle que $R(P)$ est une racine de P pour tout $P \in U$ et $R(P_0) = z_0$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle scalaire

$$(E_c) \qquad u'(t) = u(t)^2$$

sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Montrer que cette équation différentielle vérifie les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2. Montrer (soigneusement) que si $u_0 > 0$, la solution maximale de (E_c) vérifiant la condition de Cauchy $u(0) = u_0$ est la fonction $u :]-\infty, \frac{1}{u_0}[\to \mathbb{R}$ définie par $u(t) = -\frac{1}{t - \frac{1}{u_0}}$.

3. Soit $I = [a, b[\subset \mathbb{R}$. Soit $g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $u'(t) = g(t, u(t))$. Montrer que si $v : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifie :

$$\begin{cases} v(a) \geq u(a) \\ \forall t \in]a, b[, \;\; v'(t) \geq g(t, v(t)) \end{cases}$$

alors $\forall t \in [a, b[, \;\; v(t) \geq u(t)$.

4. On considère l'équation différentielle autonome sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ suivante :

$$(E) \qquad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y^2(t) \\ y'(t) = y(t) + 2x^2(t) \end{cases}$$

Soit $(x, y) : J \to \mathbb{R}^2$ une solution maximale de E, définie sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ contenant 0 et vérifiant $(x(0), y(0)) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$. On note $u(t) = x(t) + y(t)$ pour tout $t \in J$.

5. Montrer que $u'(t) \geq u^2(t)$ pour tout $t \in J \cap \mathbb{R}_+$.

6. En déduire que J est un intervalle borné à droite, c'est-à-dire de la forme $J =]c, d[$, $d < +\infty$.

Examen de la seconde session

18 juin 2015- 4 heures

Aucun document autorisé. Le sujet est composé de sorte qu'il n'y a aucun calcul long ou d'explication longue pour obtenir la note maximale. Merci en retour d'être concis.

1. Question de cours. Énoncer le théorème d'inversion locale pour une application de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est une application linéaire surjective, le théorème s'applique-t-il toujours au point $0 \in \mathbb{R}^n$? Si non, donner un contre-exemple.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rcl} f : M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 + \lambda Trace(A)A. \end{array}$$

   (a) Question préliminaire. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $H \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$aH = bTrace(H)I_n.$$

   Donner une équation linéaire scalaire satisfaite par $Trace(H)$. En déduire que si (a, b) n'appartient pas à une droite qu'on explicitera, alors $H = 0_n$.

   (b) Pour $n = 1$, montrer que f est différentiable en 1 et donner sa différentielle.

   (c) Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle en $A \in M_n(\mathbb{R})$.

   (d) On suppose que $\lambda \geq 0$. En utilisant le résultat de la question (2a), montrer que f est inversible au voisinage de I_n.

   (e) Montrer que pour $\lambda = -1$ et $n \in \{1, 2\}$, f n'est pas inversible au voisinage de I_n. *Indication : traiter d'abord le cas $n = 1$. Pour $n = 2$, on pourra chercher des matrices diagonales ayant mêmes images par f.*

   (f) Pour $\lambda = 0$, montrer que $df(I_n)$ est inversible et calculer son inverse. En déduire un développement limité de $g = f^{(-1)}$ d'ordre 1 au voisinage de $f(I_n)$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par longueur d'arc s, C^2 et birégulière telle que sa courbure K et sa torsion T vérifient

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall s \in \mathbb{R},\ T(s) = aK(s).$$

   On rappelle que $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ est le repère de Frenet en $f(s)$.

   (a) Uniquement pour cette question, on suppose que $a = 0$. Trouver toutes les courbes satisfaisant le problème.

   (b) Montrer que $\beta = a\tau + u$, où $u \in \mathbb{R}^3$ est vecteur constant non nul. Que vaut $\|u\|$?

(c) Montrer (facilement !) que ν est orthogonal à u.

(d) Déduire de (3b) une expression de ν' en fonction de a, K, τ et u.

(e) Que vaut $\langle \nu', u\rangle$? Déduire de la question (3d) que $\langle \tau, u\rangle$ est constant. Qu'est-ce que cette condition signifie géométriquement pour la courbe f ?

4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application C^∞, F la primitive de $v \mapsto \sqrt{1 + (g'(v))^2}$ s'annulant en 0, et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'application

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(u, v) = (u, v, g(v)).$$

(a) Montrer que f est deux fois différentiable.

(b) Montrer que la surface paramétrée est régulière en tout point (u, v).

(c) Donner une équation du plan tangent affine $T(u, v)$ en $f(u, v)$.

(d) Soient $a \geq 1$, $b \geq 1$. Déterminer l'aire algébrique $A(a, b)$ de la surface $f([1, a] \times [1, b])$ en fonction de a, b et F.

(e) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal unitaire en tout point de la surface.

(f) Démontrer qu'au moins l'une des courbures principales est constante. *Indication : il n'y a quasiment aucun calcul à faire.*

(g) On suppose, uniquement dans cette question, que g est une application affine. Donner toutes les courbures principales. *Indication : il n'y a quasiment aucun calcul à faire.*

(h) On considère la courbe paramétrée $h : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t, t)$. Montrer qu'elle est régulière. À quelle condition sur g est-elle birégulière ?

(i) Si h est birégulière en t, donner une équation du plan osculateur affine de la courbe $h(\mathbb{R})$ en $h(t)$. Quand ce plan est-il parallèle au plan tangent de la surface en un point quelconque de S ?

5. On considère le système différentiel (E)

$$\begin{cases} x'(t) &= x + y + t \\ y'(t) &= 2y + 1 \end{cases}$$

(a) Sur quel intervalle de temps les solutions maximales de (E_0) sont-elles définies ?

(b) Exprimer le système sous forme $X'(t) = AX(t) + B(t)$, avec $X \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ et $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $B \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

(c) Déterminer les valeurs propres $\lambda \leq \mu$ de A, ainsi que les sous-espaces propres E_λ et E_μ associés à λ et μ.

(d) Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et Δ une matrice diagonale de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A = P^{-1}\Delta P$.

(e) Calculer $e^{(t-t_0)A}$ pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, puis toutes les solutions du système homogène.

(f) Déterminer les solutions de (E) telles que $x(t_0) = 1$ et $y(t_0) = 0$.

EXAMEN GGMAT36e

16 juin 2015

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer le théorème de Mittag-Leffler.
2. Enoncer le théorème de la représentation conforme de Riemann.

Exercice 2 On se donne des nombres complexes $a_0, \ldots, a_n$ avec $a_n = 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n$. Dans tout l'exercice, $R > 0$ est choisi suffisamment grand pour que le disque ouvert $D(0, R)$ contienne tous les zéros de P. On note γ_R un lacet parcourant le cercle de centre 0 et de rayon R dans le sens positif, et

$$F_R(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_R} \frac{e^{wz}}{P(w)} \mathrm{d}w.$$

1. Soit $m(R) = \inf\{|P(w)| \ ; \ w \in C(0, R)\}$, où $C(0, R)$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon R. Montrer que $m(R) > 0$.
2. Montrer que pour tout complexe w de module R et tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^{wz}| \leq e^{R|z|}$.
3. Montrer que F_R est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et exprimer les dérivées successives $F_R^{(k)}(z)$ à l'aide d'une intégrale.
4. En déduire que $a_0 F_R + a_1 F_R' + \ldots + a_n F_R^{(n)} = 0$.
5. Montrer que F_R ne dépend pas de R. Indication : on pourra utiliser le théorème des résidus ou la théorie de Cauchy globale. On notera donc $F = F_R$.
6. Soit $n \geq 2$. Déduire de 5. que $F(0) = \ldots = F^{(n-2)}(0) = 0$ et que $F^{(n-1)}(0) = 1$.

   Indication : on pourra faire tendre R vers l'infini.
7. Dans le cas où P a n racines simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, donner une autre expression de $F(z)$ à l'aide de la formule des résidus (on explicitera la valeur des résidus).

Exercice 3

Soit D un domaine (c.à.d. un ouvert connexe) borné de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\bar{D}$ et holomorphe sur D. On suppose également que f ne possède pas de zéro.

1. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|f(z)| = c$ pour tout $z \in \partial D$. Montrer que f est constante sur D.

T.S.V.P.

2. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que l'assertion dans 1. est fausse si l'on enlève l'hypothèse que f ne possède pas de zéro.

3. Pourquoi l'assertion de 1. n'est pas en contradiction avec l'exemple

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}, \quad f(x+iy) = e^{ix} \quad ?$$

Exercice 4

Soit D le disque unité ouvert $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ et $\mathbb{H}^\infty(D)$ l'ensemble des fonctions $f : D \to \mathbb{C}$ qui sont holomorphes et *bornées*. On fixe également une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D non nuls et deux à deux distincts. Enfin, si f est holomorphe sur D, on note $Z(f)$ l'ensemble de ses zéros. Le but de cet exercice est d'établir l'équivalence des deux propriétés suivantes:

$$\text{Il existe une fonction } f \text{ dans } \mathbb{H}^\infty(D) \text{ telle que } Z(f) = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{P1}$$

$$\text{La série } \sum (1 - |a_n|) \text{ est convergente.} \tag{P2}$$

1. Pour $a \in D$, on considère l'application homographique $\Phi_a : \bar{D} \to \mathbb{C}$, $\Phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
   (a) Montrer que Φ_a est continue sur $\bar{D}$ et holomorphe sur D.
   (b) Montrer que $|\Phi_a(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial D$.
   (c) Montrer que $|\Phi_a(z)| \leq 1$ pour tout $z \in D$.

2. On suppose que (P1) soit vérifiée par une certaine fonction $f \in \mathbb{H}^\infty(D)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une fonction f_N holomorphe sur D telle que $f(z) = (z-a_0)(z-a_1)...(z-a_n)f_N(z)$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_N(z) = \prod_{n=0}^{N} \Phi_{a_n}(z)$.
      i. Montrer que la fonction f/B_N est bien définie et holomorphe sur D.
      ii. On note $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)|;\ z \in D\}$. Déduire de i. que pour tout $r \in [0,1[$,

$$\frac{|f(0)|}{|B_N(0)|} \leq \frac{\|f\|_\infty}{\inf\{|B_N(z)|;\ |z| = r\}}.$$

   (c) En utilisant 2.(b) et 1.(b), montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \prod_{n=0}^{N} |a_n| \geq \delta.$$

   (d) En utilisant un théorème du cours, montrer que (P2) est vérifiée.

3. On suppose que (P2) est vérifiée.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $b_n : \bar{D} \to \mathbb{C}$ par $b_n(z) = -\frac{|a_n|}{a_n}\Phi_{a_n}(z)$. Montrer qu'on a

$$1 - b_n(z) = \frac{1-|a_n|}{1-\bar{a_n}z}\left(1 + \frac{|a_n|}{a_n}z\right),$$

   et en déduire que si $z \in D$, alors

$$|1 - b_n(z)| \leq 2\frac{1-|a_n|}{1-|z|}.$$

   (b) Déterminer $Z(b_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que (P1) est vérifiée en utilisant un produit infini.

Examen

Questions de cours.
– Énoncer le théorème de convergence dominée.
– Énoncer le théorème d'intégration par parties.
– Énoncer le théorème de Fubini-Tonelli.
– Citer deux exemples d'espaces de fonctions denses dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p < +\infty$.

Exercice 1. 1. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{x}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{-1/x^n}\right)dt.$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, bornée avec une limite à droite en 0. calculer les limites
$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-tx}f(x)dx \qquad et \qquad \lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{tf(x)}{1+t^2x^2}dx.$$

Exercice 2. Soit $f :]0,1[^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ pour } (x,y) \neq (0,0).$$

1. Montrer que f est borélienne et calculer les intégrales suivantes
$$I = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy, \qquad J = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx.$$
2. f est elle intégrable sur $]0,1[^2$. Justifier.

Exercice 3. On note $*$ la convolution. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne bornée. Pour $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on définit $T_h(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(x)f(x)dx$.

1. Vérifier que si $h(x) = \mathrm{e}^{i\alpha x}$ alors pour f et g dans $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ on a $T_h(f*g) = T_h(f)T_h(g)$.
2. On suppose dans toute la suite que h est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout f et g dans $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ on a $T_h(f*g) = T_h(f)T_h(g)$. Montrer que si A et B sont des boréliens de $\mathbb{R}$ alors
$$\int_{A\times B} h(x+y)dxdy = \int_{A\times B} h(x)h(y)dxdy.$$
En déduire que $h(x,y) = h(x)h(y)$ p.p.
3. On définit $H(t) = \int_0^t h(x)dx$. Montrer que H est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour tous s,t dans $\mathbb{R}$
$$H(s)H(t) = \int_0^s (H(x+t) - H(x))dx.$$
4. Montrer que H est C^∞, que $H' = h$ p.p. et que
$$H'(s+t) = H'(s)H'(t).$$
5. Si H' n'est pas identiquement nulle prouver que $H'(0) = 1$ et que pour tout x $|H'(x)| = 1$.
6. Montrer que $H''(x) = H''(0)H'(x)$ et en déduire une propriété de h.
7. Que peut on en déduire quant à la transformée de Fourier ?

Problème. Soit $I =]a,b[$ et $\bar{I}$ son adhérence. On note $\mathcal{D}(I)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans I.

1. Montrer que $\mathbb{L}^2(I) \subset \mathbb{L}^1(I)$ et que : $\forall f \in \mathbb{L}^2(I)\,,\ \|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$
2. Soient $f \in \mathbb{L}^2(I)$. On note $F : \bar{I} \to \mathbb{R}$ sa primitive généralisée en a définie par :

$$\forall x \in \bar{I},\ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\bar{I}$ avec $\|F\|_\infty \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$ et que $F = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout sur I.

3. Soit $f \in \mathbb{L}^2(I)$. Montrer que

$$(f = 0\ p.p.) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)\,,\ \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt = 0\right)$$
$$(\exists c \in \mathbb{R} \mid f = c\ p.p.) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)\,,\ \int_a^b f(t)\,\varphi'(t)\,dt = 0\right)$$

Dans la suite, si on se donne $f, g \in \mathbb{L}^2(I)$ et F, G leurs primitives généralisées en a, on suppose démontrée la formule d'intégration par parties

$$\int_a^x F(t)\,g(t)\,dt = F(x)\,G(x) - \int_a^x f(t)\,G(t)\,dt$$

et on désigne par $\mathbb{H}^1(I)$ l'espace des (classes de) fonctions $f \in \mathbb{L}^2(I)$ pour lesquelles il existe un réel α et une fonction $g \in \mathbb{L}^2(I)$ tels que :

$$f(x) = \alpha + \int_a^x g(t)\,dt\ \ (p.p.) \tag{1}$$

4. Montrer que pour $f \in \mathbb{H}^1(I)$, le couple (α, g) vérifiant (1) est unique. On note $g = f'$ et on dit que g est la dérivée généralisée de f.
5. Montrer que tout élément $f \in \mathbb{H}^1(I)$ admet un unique représentant continu sur $\bar{I}$. On identifiera f à ce représentant encore noté f.
6. Montrer que $f \in \mathbb{H}^1(I)$ si, et seulement si, $f \in \mathbb{L}^2(I)$ et il existe une unique fonction $g \in \mathbb{L}^2(I)$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)\,,\ \int_a^b f(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\int_a^b g(t)\,\varphi(t)\,dt \tag{2}$$

On précisera le lien entre g et la dérivée généralisée de f.

7. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}(|t| + t)$ est dans $\mathbb{H}^1(]-1,1[)$ et que $f' \notin \mathbb{H}^1(]-1,1[)$.
8. Montrer que $f \in \mathbb{H}^1(I)$ si, et seulement si, $f \in \mathbb{L}^2(I)$ et il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(I)\,,\ \left|\int_a^b f(t)\,\varphi'(t)\,dt\right| \leqslant \beta\,\|\varphi\|_2 \tag{3}$$

Examen du 16 juin 2015 (deuxième session)

Calcul intégral

Durée : 3 heures

La clarté, la concision et la précision des réponses données seront des facteurs importants d'appréciation des copies. On justifiera chaque réponse donnée. Documents et calculatrices interdits.

Questions de cours

Soit X un espace métrique pour une distance d. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$ et soit $\gamma : [a, b] \to X$ une application continue.

1. Donner la définition de la longueur $l(\gamma)$ du chemin γ en termes de subdivisions de l'intervalle $[a, b]$.

2. On suppose maintenant que X est un espace vectoriel normé et que γ est de classe $\mathscr{C}^1$, Donner une expression de $l(\gamma)$ à l'aide d'une intégrale utilisant la dérivée de γ.

Exercice

Soient f et g les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \mathrm{d}t$$

pour $x \in \mathbf{R}$.

1. Démontrer que les applications f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

2. À l'aide d'un changement de variables, donner une expression simple pour la dérivée de l'application $x \mapsto f(x)^2 + g(x)$.

3. (a) Démontrer que $0 < g(x) < e^{-x^2}$ pour $x \in \mathbf{R}$.

(b) Déduire des questions précédentes la valeur de $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Problème

Transformée de Laplace

Rappelons que $\mathbf{R}_+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$. La lettre $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des applications réglées de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telles qu'il existe un entier $m \in \mathbf{N}$ et $C \in \mathbf{R}_+^*$ de sorte que

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad |f(x)| \leqslant Cx^m.$$

1. **(a)** Démontrer que $\mathscr{P}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications réglées de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$.

(b) Démontrer que si $f, g \in \mathscr{P}$, alors l'application produit fg appartient également à $\mathscr{P}$.

2. **(a)** Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ dont la dérivée f' appartient à $\mathscr{P}$. Démontrer que l'application f appartient également à $\mathscr{P}$.

(b) Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telle que la dérivée k-ème $f^{(k)}$ appartient à $\mathscr{P}$. Que peut-on dire de f ?

On notera $\mathscr{P}^{(k)}$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^k$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f^{(k)} \in \mathscr{P}$.

(c) Démontrer que $\mathscr{P}^{(k)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}$.

3. Soit f un élément de $\mathscr{P}$ et soit $\varepsilon > 0$. Dans cette question, on note g l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $g : t \mapsto f(t)e^{-\varepsilon t}$.

(a) Donner la limite de $g(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

(b) Démontrer que l'application g est bornée.

(c) Démontrer qu'il existe un nombre réel $C > 0$, tel que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$|f(t)| < Ce^{\varepsilon t}.$$

4. Soit f un élément de $\mathscr{P}$.

(a) Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$ démontrer que l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}|f(t)|\mathrm{d}t$$

est convergente.

(b) Soit I un intervalle compact contenu dans $\mathbf{R}_+^*$. Démontrer que l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\mathrm{d}t\,,$$

dépendant du paramètre x, est uniformément convergente sur I.

Pour tout $f \in \mathscr{P}$, on note $\mathscr{L}(f)$ l'application de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$.

5. Démontrer que l'application qui à f associe $\mathscr{L}(f)$ est linéaire.

6. (a) Déterminer l'application $\mathscr{L}(1)$, où 1 désigne l'application constante sur $\mathbf{R}_+$ de valeur 1.

(b) On note $X : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ l'application $t \mapsto t$. Déterminer $\mathscr{L}(X)$ et $\mathscr{L}(X^2)$.

(c) Déterminer $\mathscr{L}(\cos)$ et $\mathscr{L}(\sin)$.

7. Soit f un élément de $\mathscr{P}$.

(a) Démontrer que $\mathscr{L}(f)$ est continue.

(b) Démontrer que $\mathscr{L}(f)$ est dérivable et la relation

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \qquad \mathscr{L}(f)'(x) = -\mathscr{L}(Xf)(x).$$

(c) Démontrer que $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et calculer sa dérivée k-ème $\mathscr{L}(f)^{(k)}$ en termes de $\mathscr{L}(X^k f)$.

(d) Soit n un entier strictement positif. Déduire de la question précédente une expression simple pour $\mathscr{L}(X^n)$.

8. (a) On suppose que $f \in \mathscr{P}^{(1)}$. Démontrer que

$$\mathscr{L}(f')(x) = x\mathscr{L}(f)(x) - f(0)$$

pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$.

(b) On suppose que $f \in \mathscr{P}^{(2)}$. Donner l'expression de $\mathscr{L}(f'')$ en termes de $\mathscr{L}(f)$, $f(0)$ et $f'(0)$.