Université Joseph Fourier	2013-2014
Licence 3	Parcours A

Algèbre

Examen du 06/01/2014

Documents, calculatrices et portables interdits. Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1 (Une preuve alternative partielle des théorèmes de Sylow). [Environ 7 points]
Dans tout cet exercice, p désigne un nombre premier, $m \geqslant 1$ un entier, et $q \geqslant 1$ un entier premier avec p. Soit G un groupe d'ordre $p^m q$. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties de G de cardinal p^m, $\mathcal{S}$ l'ensemble des p-Sylow de G, et $\mathcal{T}$ l'ensemble des translatés à gauche des p-Sylow de G, c'est-à-dire des parties de la forme $T = aS$ avec $a \in G$ et $S \in \mathcal{S}$.

1. Vérifier que $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{E}$, et que $\mathcal{T}$ est aussi l'ensemble des translatés à droite des p-Sylow de G, c'est-à-dire des parties de la forme $T = Sa$ avec $a \in G$ et $S \in \mathcal{S}$.
2. Vérifier pour tout entier $n \geqslant 0$, l'égalité suivante de polynômes dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$:
$$(X + \dot{1})^{p^n} = X^{p^n} + \dot{1}.$$
3. Quel est le cardinal de $\mathcal{E}$? Déduire de la question précédente que $\#(\mathcal{E}) \equiv q\ [p]$.
4. Vérifier que l'application $G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définie par $(g, A) \mapsto gA$ définit une opération du groupe G sur $\mathcal{E}$.
   Pour tout $A \in \mathcal{E}$, on notera $\omega(A)$ l'orbite de A et $\mathrm{Stab}(A)$ le stabilisateur de A pour cette action.
5. Quelle relation y-a-t-il entre les cardinaux de $\omega(A)$, de $\mathrm{Stab}(A)$ et de G ?
6. Montrer que pour tout $S \in \mathcal{S}$, et pour tout $a \in G$, $\mathrm{Stab}(Sa) = S$.
7. Soit $A \in \mathcal{E}$. Montrer que pour tout $a \in A$, $\mathrm{Stab(A)} \subset Aa^{-1}$. En déduire que $\#(\mathrm{Stab(A)}) \leqslant p^m$, et que $\#(\mathrm{Stab(A)}) = p^m$ si et seulement si $A \in \mathcal{T}$ (utiliser les questions précédentes).
8. Soit $A \in \mathcal{E}$. Déduire de ce qui précède que :
   – si $A \in \mathcal{T}$, alors $\#(\omega(A)) = q$,
   – si $A \notin \mathcal{T}$, alors p divise $\#(\omega(A))$.
9. Montrer qu'on peut choisir un système de représentants $\mathcal{R}$ (c'est-à-dire une partie de $\mathcal{E}$ contenant exactement un point de chaque orbite) tel que $\mathcal{R} \cap \mathcal{T} = \mathcal{S}$. À l'aide de l'équation aux classes et des questions précédentes, en déduire que $\#(\mathcal{E}) \equiv q\#(\mathcal{S})\ [p]$.
10. Retrouver ainsi certaines conclusions des théorèmes de Sylow.

Suite au dos

Exercice 2 (Centre de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ et du groupe $GL(E)$). [Environ 4 points]
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale. Par définition, pour tout $x \in E$, de composantes $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $e_i^*(x) = \xi_i$.

Pour i et j dans $i \in [\![1, n]\!]$, on note $f_{i,j}$ l'endomorphisme de E défini par $f_{i,j}(x) = e_j^*(x)e_i$.

1. Que vaut $f_{i,j}(e_k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$? Quelle est la matrice de $f_{i,j}$ dans la base $\mathcal{B}$?
2. Déterminer $f_{i,j}^2$ et en déduire un polynôme de degré 2 annulant $f_{i,j}$. Trouver les valeurs propres de $f_{i,j}$, en indiquant la multiplicité et les sous-espaces propres associés. À quelle condition l'endomorphisme $f_{i,j}$ est-il diagonalisable ?
3. Montrer que $f_{i,j}$ peut s'écrire comme différence de deux endomorphismes inversibles de E.
4. Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que tout sous-espace propre de v est stable par u et réciproquement.
5. Soit u dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que u commute avec tous les endomorphismes inversibles de E : pour tout $v \in GL(E)$, $u \circ v = v \circ u$.
   (a) Montrer que u commute avec tous les endomorphismes $f_{i,j}$.
   (b) Avec la question 4, en déduire que $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de u.
   (c) Avec la question 4, montrer que les valeurs propres associées sont toutes égales.
6. Quels sont les éléments de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent avec tout élément de $\mathcal{L}(E)$? Quel est le centre de $GL(E)$?

Exercice 3 (Décomposition polaire d'un automorphisme d'un espace euclidien). [Environ 4 points]
Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E. Un endomorphisme autoadjoint s de E est dit défini positif si et seulement si $\langle x, s(x) \rangle > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. On note $O(E)$ le groupe orthogonal de E, et $\mathcal{S}_{++}(E)$ l'ensemble des automorphismes autoadjoints définis positifs de E.

Soit $u \in GL(E)$. On cherche à montrer qu'on peut décomposer d'une façon et d'une seule u sous la forme $v \circ s$, avec $v \in O(E)$ et $s \in \mathcal{S}_{++}(E)$.

1. Montrer que $u^* \circ u \in \mathcal{S}_{++}(E)$. En déduire que $u^* \circ u$ est diagonalisable en base orthonormée et que ses valeurs propres sont strictement positives.
2. On commence par montrer l'unicité. On suppose que $u = v \circ s$, avec $v \in O(E)$ et $s \in \mathcal{S}_{++}(E)$.
   (a) Montrer que $s^2 = u^* \circ u$.
   (b) Soit F un sous-espace propre de $u^* \circ u$, associé à une valeur propre λ. Montrer que F est stable par s, que l'endomorphisme induit s_F est diagonalisable, et montrer finalement que $s_F = \sqrt{\lambda}\mathrm{Id}_F$.
   (c) En déduire l'unicité de s, puis celle de v.
3. On montre maintenant l'existence. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée dans laquelle la matrice de $u^* \circ u$ est diagonale, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) On note s l'endomorphisme dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est diagonale, de coefficients diagonaux $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$. Montrer que $s \in \mathcal{S}_{++}(E)$ et que $s^2 = u^* \circ u$.
   (b) En déduire que $u \circ s^{-1} \in O(E)$ et l'existence de la décomposition annoncée.

Suite et fin page 3

Exercice 4 (Résultant de deux polynômes). [Environ 7 points]
Dans tout cet exercice, K désigne un corps. Pour tout $n \geqslant 1$, $E_n = K_{n-1}[X]$ désigne l'espace des polynômes de degré $\leqslant n-1$, à coefficients dans K, et $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^{n-1})$ la base canonique de E_n. On fixe deux poynômes

$$A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } B = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k,$$

de degrés respectifs p et q (autrement dit, $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$). On note D le PGCD de A et de B (on choisit le représentant unitaire).

1. Montrer que les polynômes $A, XA, \dots, X^{q-1}A, B, XB, \dots, X^{p-1}B$ sont dans $E_{p+q} \cap DK[X]$.
2. On appelle résultant de A et B la quantité

$$R(A,B) = \det_{\mathcal{B}_{p+q}} (A, XA, \dots, X^{q-1}A, B, XB, \dots, X^{p-1}B).$$

   Montrer que si $D \neq 1$, la famille $(A, XA, \dots, X^{q-1}A, B, XB, \dots, X^{p-1}B)$ est liée. Indication : utiliser la question précédente.
3. Montrer que si $D = 1$, alors la famille $(A, XA, \dots, X^{q-1}A, B, XB, \dots, X^{p-1}B)$ est libre. Indication : on pourra utiliser le théorème de Gauss.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur $R(A,B)$ pour que A et B soient premiers entre eux.
5. Pour tout polynôme $M \in K[X]$, on note $f_{M,B}$ l'application qui à un polynôme $P \in E_q$ associe le reste de la division euclidienne de PM par B. Montrer que $f_{M,B} \in \mathcal{L}(E_q)$.
6. Montrer que l'application $\Phi_B : M \mapsto f_{M,B}$ est un morphisme d'anneaux de $K[X]$ dans $\mathcal{L}(E_q)$. En déduire que $f_{M,B} = M(f_{X,B})$.
7. Écrire la matrice de $f_{X,B}$ dans la base $\mathcal{B}_q$ et vérifier que le polynôme caractéristique de $f_{X,B}$ est $\chi_{f_{X,B}} = b_q^{-1} B$.
8. Lorsque B est scindé de racines $\beta_1, \dots, \beta_q$, montrer qu'il existe une base de E_q dans laquelle la matrice de $f_{X,B}$ est triangulaire supérieure et préciser les éléments diagonaux de cette matrice. En déduire que pour tout $M \in K[X]$,

$$\chi_{f_{M,B}} = \prod_{j=1}^{q} (X - M(\beta_j)).$$

9. Pour $k \in [\![0, q-1]\!]$, on note $R_k = f_{A,B}(X^k)$. Montrer que

$$R(A,B) = \det_{\mathcal{B}_{p+q}} (R_0, R_1, \dots, R_{q-1}, B, XB, \dots, X^{p-1}B) = \det f_{A,B} \times b_q^p.$$

10. En déduire que si A est scindé de racines $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et si B est scindé de racines $\beta_1, \dots, \beta_q$, alors

$$R(A,B) = b_q^p \prod_{j=1}^{q} A(\beta_j) = a_p^q b_q^p \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} (\beta_j - \alpha_i) = (-1)^{pq} a_p^q \prod_{i=1}^{p} B(\alpha_i).$$

Université Joseph Fourier

Licence 3 Mathématiques, Parcours B
Algèbre

Examen final

Mardi 7 Janvier 2014

Durée de l'épreuve: 4h

Tout document et appareil électronique (calculatrice, téléphone portable) est interdit.

Barème indicatif: Cours: /2, Ex 1: /5, Ex 2: /7, Ex 3: /2, Ex 4: /7

Question de cours. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Enoncer le théorème de décomposition des noyaux.
2. Soit f un endomorphisme de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme minimal μ_f de f pour que f soit diagonalisable.
3. Le démontrer en utilisant le théorème de décomposition des noyaux.

Exercice 1. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. Soit G un groupe fini et $\gamma \in G$ un élément d'ordre p.

1. Montrer que pour tout $1 \leq \ell \leq p-1$, γ est dans le sous-groupe $\langle \gamma^\ell \rangle$ engendré par γ^ℓ.
2. Soit H un sous-groupe de G. On rappelle que pour $g \in G$, on note $gH = \{g.h,\ h \in H\}$.

(a) Montrer que s'il existe deux entiers $0 \leq \ell < m \leq p-1$ tels que l'intersection $\gamma^\ell H \cap \gamma^m H$ est non vide alors γ est dans H.

(b) En déduire que si γ n'est pas dans H, alors $\sharp(G/H) \geq p$.

3. On suppose maintenant que $G = \mathcal{S}_p$ est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$. Soit H un sous-groupe de G tel que $\sharp H > (p-1)!$ et tel que $H \neq G$.

   (a) En utilisant le théorème de Lagrange, déduire des questions précédentes que H contient tous les p-cycles.

   (b) Soit $(a_1 a_2 \ldots a_p)$ un p-cycle. En calculant le produit $(a_1 a_2 a_3) \circ (a_1 a_2 \ldots a_p)$, justifier que tout 3-cycle est produit de deux p-cycles.

   (c) Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_p$ est engendré par les 3-cycles.

   (d) En déduire que $H = \mathcal{A}_p$.

Exercice 2. On considère $A = \mathbb{Z}[i] = \{x + iy,\ x, y \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, .)$. En déduire qu'il est intègre.

2. (Cette question est indépendante du reste de l'exercice). Soit Φ l'application de $\mathbb{Z}[X]$ dans $\mathbb{C}$ qui à $P \in \mathbb{Z}[X]$ associe $P(i)$.

   (a) Montrer que Φ est un morphisme d'anneaux.

   (b) Quelle est l'image de Φ? Justifier

   (c) Quel est le noyau de Φ? Justifier

   (d) En déduire que A est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$.

3. Faire un dessin représentant les éléments de A dans le plan complexe. Puis, justifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $z_0 \in A$ tel que $|z - z_0| < 1$.

4. Soient $a, b \in A$, $b \neq 0$. Montrer qu'il existe $q \in A$ et $r \in A$ tels que $a = bq + r$ et $|r| < |b|$. (On pourra poser $z = \frac{a}{b}$.)

5. Montrer que les éléments inversibles de A sont 1, -1, i et $-i$.

6. Soit I un idéal non nul de A.

(a) Montrer que l'ensemble $\{|z|^2,\ z \in I, z \neq 0\}$ a une borne inférieure $b > 0$, et qu'il existe $z_0 \in I$ avec $|z_0|^2 = b$.

(b) Montrer que z_0 engendre I.

(c) En déduire que A est un anneau principal.

On s'intéresse maintenant à comprendre les éléments irréductibles de A.

7. Montrer que si $a \in A$ est tel que $|a|^2$ est un nombre premier, alors a est irréductible dans A.

8. Montrer que si $a = x + iy \in A$ est irréductible dans A alors x et y sont premiers entre eux.

9. Soit $p \geq 1$ un nombre premier.

   (a) Montrer que si $p = (x + iy)(x' + iy')$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{Z}$ et $x + iy$ irréductible dans A, alors $p = x^2 + y^2$.

   (b) En déduire que si $p \geq 2$ est premier et que $p \equiv 3 \bmod 4$ alors p est irréductible dans A.

10. Décomposer 30 en produits d'irréductibles dans A.

Exercice 3. Soit α un paramètre réel, et A_α la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les dimensions des sous-espaces propres de A en fonction du paramètre α.

2. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle diagonalisable? Justifier.

3. Donner le polynôme minimal de A en fonction du paramètre α.

4. On suppose que $\alpha = -2$. Trouver une matrice P telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Dans tout cet exercice, $w \in \mathcal{L}(E)$ désigne un endomorphisme de rang 1.

1. Donner les dimensions de $\operatorname{Im} w$ et $\operatorname{Ker} w$.
2. Montrer que si $\operatorname{Im} w$ n'est pas inclus dans $\operatorname{Ker} w$, alors on a $\operatorname{Im} w \oplus \operatorname{Ker} w = E$.
3. On suppose dans cette question que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} w$.
   (a) Montrer que w est nilpotent.
   (b) Quel est son indice de nilpotence?
4. On suppose dans cette question que $\operatorname{Im} w \oplus \operatorname{Ker} w = E$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im} w$ est un sous-espace propre de w.
   (b) En déduire que w est diagonalisable.
5. En considérant le polynôme caractéristique χ_w de w, montrer l'équivalence

$$w \text{ nilpotent} \Leftrightarrow \operatorname{tr}(w) = 0.$$

On suppose maintenant qu'il existe $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $w = u \circ v - v \circ u$.

6. Justifier que w est nilpotent.
7. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que le rang de $w \circ u^k$ est ≤ 1.
   (b) En déduire que $w \circ u^k$ est nilpotent.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Im} w$, $u^k(x) \in \operatorname{Ker} w$.
8. Soit $x \in \operatorname{Im} w$. On note $F = \operatorname{vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$.
   (a) Montrer que F est stable par u.
   (b) Déduire des questions précédentes que $\dim_k F \leq n - 1$.
   (c) En déduire que le polynôme caractéristique χ_u de u n'est pas irréductible.

Examen du 7 janvier 2014

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits. L'exercice et les deux problèmes sont indépendants. Durée de l'épreuve : 4 heures.

Question de cours
Définir, de deux façons équivalentes, ce qu'est une partie compacte d'un espace métrique (E,d). Montrer qu'une telle partie est nécessairement fermée et bornée, mais que la réciproque n'est pas vraie en général.

Exercice (*Application linéaire définie par un noyau intégral*)
Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ muni de la norme uniforme, notée $\|\cdot\|_\infty$. Soit également $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $f \in E$, on définit une application $Lf : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$(Lf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\ , \qquad x \in [0,1]\ .$$

a) Pour tout $\epsilon > 0$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $f \in E$ et pour tous les points $x_1, x_2 \in [0,1]$ tels que $|x_1 - x_2| \le \delta$, on ait l'inégalité

$$|(Lf)(x_1) - (Lf)(x_2)| \le \epsilon \|f\|_\infty\ .$$

En déduire que, pour tout $f \in E$, on a $Lf \in E$.

b) Vérifier que l'application linéaire $L : E \to E$ définie ci-dessus est bornée, et que sa norme dans $\mathcal{L}_c(E)$ est donnée par

$$|\!|\!|L|\!|\!| = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\,\mathrm{d}y\ .$$

c) Soit $B = \bar{B}(0,1)$ la boule unité fermée dans E. En utilisant la première question et un résultat du cours, vérifier que l'image de B par L est une partie relativement compacte de l'espace E.

d) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans B telle que

$$\int_0^1 f_n(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\ , \qquad \text{pour tout } \phi \in E\ .$$

Montrer que la suite $(Lf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro dans E. *Indication :* On vérifiera d'abord que la suite de fonctions $(Lf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers zéro sur $[0,1]$. Puis on étudiera les valeurs d'adhérence de cette suite dans E, et on montrera la convergence uniforme en argumentant par contradiction.

Problème 1 (*Distance à un sous-espace fermé*)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé. On considère l'application $d : E \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ défine par

$$d(x) \;=\; \mathrm{dist}(x, M) \;=\; \inf_{y \in M} \|x - y\| \;, \qquad x \in E \;.$$

Première partie :

a) Si $x \in E$, montrer que $d(x) = 0$ si et seulement si $x \in M$.

b) Vérifier que $d(x - y) = d(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $y \in M$.

c) Montrer que $|d(x) - d(y)| \le \|x - y\|$ pour tous les $x, y \in E$. En déduire que l'application d est continue sur E.

d) Vérifier que $d(x + y) \le d(x) + d(y)$ et $d(\lambda x) = |\lambda| d(x)$ pour tous les $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Seconde partie : On considère sur E la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$x \mathcal{R} y \;\Leftrightarrow\; x - y \in M \;,$$

et on note $\mathcal{E} = E/\mathcal{R}$ l'espace quotient. Si $x \in E$, la classe d'équivalence de x selon $\mathcal{R}$ est donc le sous-espace affine $[x] = x + M$. On note enfin $p : E \to \mathcal{E}$ l'application définie par $p(x) = [x]$ pour tout $x \in E$.

e) Montrer que $\mathcal{E}$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et que l'application $N : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ définie par $N([x]) = d(x)$ pour tout $x \in E$ est une norme sur $\mathcal{E}$.

f) Vérifier que l'application $p : (E, \|\cdot\|) \to (\mathcal{E}, N)$ est linéaire et continue.

g) Soit τ la topologie quotient sur $\mathcal{E}$ définie par

$$\tau \;=\; \Big\{ V \subset \mathcal{E} \;\Big|\; p^{-1}(V) \text{ est un ouvert de } E \Big\} \;.$$

Montrer que τ coïncide avec la topologie associée à la norme N.

h) Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, montrer qu'il en va de même de $(\mathcal{E}, N)$.

Problème 2 (*Topologie de la convergence uniforme sur les compacts*)
Soit $E = C(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le but de ce problème est de munir E d'une topologie associée à la notion de convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$.

Première partie : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application $p_n : E \to \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ définie par

$$p_n(f) \;=\; \sup_{|x| \le n} |f(x)| \;, \qquad f \in E \;.$$

On définit aussi l'ensemble $V_n = \{f \in E \,|\, p_n(f) < 1/n\}$. On remarque que $V_{n+1} \subset V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que, pour tous les $f, g \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $p_n(f + g) \le p_n(f) + p_n(g)$ et $p_n(\lambda f) = |\lambda| p_n(f)$. On dit que p_n est une *semi-norme* sur E. L'application p_n est-elle une norme sur E ?

b) On définit une famille τ de parties de E en posant

$$\tau \;=\; \Big\{ A \subset E \,\Big|\, \text{pour tout } f \in A\,,\ \text{il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } f + V_n \subset A \Big\}\;,$$

où $f + V_n = \{f + g \,|\, g \in V_n\}$. Montrer que la famille τ est stable par intersection finie, et en déduire que τ est une topologie sur E. Vérifier en outre que τ est invariante par translation dans E : si $A \in \tau$ et $f \in E$, alors $f + A \in \tau$.

c) Montrer que $V_n \in \tau$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que la famille $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de voisinages de l'origine pour la topologie τ.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'espace de Banach des fonctions continues $f : [-n, n] \to \mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. On considère aussi l'application linéaire $\pi_n : E \to E_n$ définie par $\pi_n(f) = f|_{[-n,n]}$ (la restriction de la fonction f au segment $[-n, n]$). Vérifier que l'application π_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

e) Montrer que τ est la topologie la moins fine sur E qui rende continue chacune des applications $\pi_n : E \to E_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

f) Vérifier qu'une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro dans (E, τ) si et seulement si cette suite de fonctions converge vers zéro uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Seconde partie : Pour tous les $f, g \in E$, on définit

$$d(f, g) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)}\;.$$

g) Montrer que l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est une distance sur E. Observer en outre que d est invariante par translation : $d(f + h, g + h) = d(f, g)$ pour tous les $f, g, h \in E$.

h) On note $B_d(0, r) \subset E$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ pour la distance d. Pour tout $r > 0$, vérifier que $V_n \subset B_d(0, r)$ si $n \in \mathbb{N}^*$ est suffisamment grand. Inversement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $B_d(0, r) \subset V_n$ si $r > 0$ est suffisamment petit.

i) En déduire que la topologie τ définie dans la première partie coïncide avec la topologie τ_d associée à la distance d.

j) Montrer que (E, d) est un espace métrique complet.

L3B – Topologie Examen du lundi 6 janvier 2014 13h00-17h00

Documents, calculatrices, téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Questions de cours [6 points].

A) Soit (E, d) un espace métrique.

1) Rappeler la définition d'un espace connexe ; on donnera au moins deux formulations équivalentes.

2) On dit que deux points $x, y \in E$ sont liés par une ε-chaîne dans E s'il existe une suite finie de points $x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y$ de E tel que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour $0 \leq i < N$, et on écrit dans ce cas $x\mathcal{R}_\varepsilon y$. Montrer que $\mathcal{R}_\varepsilon$ est une relation d'équivalence et que les classes d'équivalence sont des ouverts.

3) Montrer que si E est connexe, alors E est bien enchaîné, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, deux points quelconques peuvent être reliés par une ε-chaîne. Donner un exemple montrant que la réciproque est fausse.

4) Montrer qu'un espace métrique compact E est connexe si et seulement s'il est bien enchaîné.

5) (exercice) Soient E, F des espaces métriques et $u : E \to F$ une application uniformément continue. Si A est une partie bien enchaînée de E, montrer que $u(A)$ est bien enchaînée.

B) Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé. Énoncer et démontrer le théorème du point fixe.

Exercice 1 [7 points]. On considère l'espace $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des applications continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées $s = (s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ muni de la norme $\|s\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |s_k|$.

1) Montrer que $\|\,.\,\|$ est une norme sur ℓ^∞ et que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

sont des normes sur $\mathcal{C}$.

2) Soit $a \in \,]0,1[$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère la fonction $f_{a,\varepsilon} \in \mathcal{C}$ telle que $f_{a,\varepsilon}(x) = \max(1 - |x-a|/\varepsilon, 0)$. Représenter le graphe de $f_{a,\varepsilon}$ et calculer les normes $\|f_{a,\varepsilon}\|_1$ et $\|f_{a,\varepsilon}\|_\infty$ lorsque $\varepsilon < \varepsilon_0(a)$ suffisamment petit (on précisera). Les normes $\|\,.\,\|_1$ et $\|\,.\,\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

3) Sur l'intervalle $[0,1]$, on considère la suite de fonctions continues $f_n(x) = \min(n, 1/\sqrt{x})$ (prolongées par $f_n(0) = n$ en $x = 0$). Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_1)$. L'espace normé $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_1)$ est-il complet ? L'espace normé $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_\infty)$ est-il complet ?

4) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[0,1]$. Montrer que l'application $u : \mathcal{C} \to \ell^\infty$ qui à $f \in \mathcal{C}$ associe la suite $s = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une application linéaire continue de $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_\infty)$ vers $(\ell^\infty, \|\,.\,\|)$, et déterminer la norme de $u : f \mapsto u(f) = s$. L'application linéaire u est-elle continue de $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_1)$ vers $(\ell^\infty, \|\,.\,\|)$?

5) On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[0,1]$. Montrer que l'application linéaire u est alors une isométrie de $(\mathcal{C}, \|\,.\,\|_\infty)$ dans $(\ell^\infty, \|\,.\,\|)$, c'est-à-dire que $\|u(f)\| = \|f\|_\infty$ pour tout $f \in \mathcal{C}$. En déduire dans ce cas que u est injective et que $u(\mathcal{C})$ est un sous-espace fermé de $(\ell^\infty, \|\,.\,\|)$. Peut-on avoir $u(\mathcal{C}) = \ell^\infty$?

6) On suppose que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas dense dans $[0,1]$, et on choisit un intervalle ouvert non vide $]c, d[$ qui ne contient aucun point x_n. Montrer que u n'est pas injective dans ce cas.

Exercice 2 [3 points]. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne. On définit :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } |x| < y \leq 2 - x^2\}.$$

Dessiner A. Déterminer l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ et l'adhérence $\overline{A}$. L'ensemble A est-il ouvert, fermé, compact, connexe par arcs ? Justifier vos réponses.

Exercice 3 [8 points]. **Les parties A et B sont indépendantes**

A) Une suite $u_n : \mathbb{R} \to [0, 1]$ d'applications continues, $n \geq 1$ étant donnée, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\, 2^{-n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) Étudier la convergence de la série donnant f, et montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$. Montrer également que $f(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$.

A partir d'ici, on choisit pour fonction $u_1 : \mathbb{R} \to [0, 1]$ la fonction périodique de période 1 telle que

$$u_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/4 \\ 4x - 1 & \text{si} \quad 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ 4(1 - x) & \text{si} \quad 3/4 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u_n(x) = u_1(10^{n-1} x).$$

2) Représenter graphiquement la fonction u_1 sur l'intervalle $[0, 3]$.

3) Montrer que u_n est lipschitzienne pour une certaine constante de Lipschitz que l'on précisera.

4) Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \in \{0, 1\}$ une suite de chiffres binaires et $\alpha = \sum_{p=1}^{+\infty} 5 a_p 10^{-p}$. Calculer la partie fractionnaire β de $10^{n-1}\alpha$ et en déduire que l'on a $\beta \in [0, 1/10]$ si $a_n = 0$ et $\beta \in [5/10, 6/10]$ si $a_n = 1$. Calculer $u_n(\alpha)$ et en déduire que la restriction $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est surjective.

5) On définit $\gamma : [0, 1] \to [0, 1]^2$ par $\gamma(x) = (g_1(x), g_2(x))$ avec

$$g_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n-1}(x)\, 2^{-n}, \quad g_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{2n}(x)\, 2^{-n}.$$

Montrer que γ est une courbe continue qui réalise une surjection de l'intervalle $[0, 1]$ sur le carré $[0, 1]^2$ (une telle courbe s'appelle une courbe de Peano).

B)

1) On se propose ici d'étudier s'il peut exister une application continue *bijective* $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]^2$. Montrer qu'une telle application serait un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^2$. Pour $c \in \,]0, 1[$ fixé, étudier la connexité de $[0, 1] \setminus \{c\}$ et de son image $\varphi([0, 1] \setminus \{c\}) = [0, 1]^2 \setminus \{\varphi(c)\}$. Conclure.

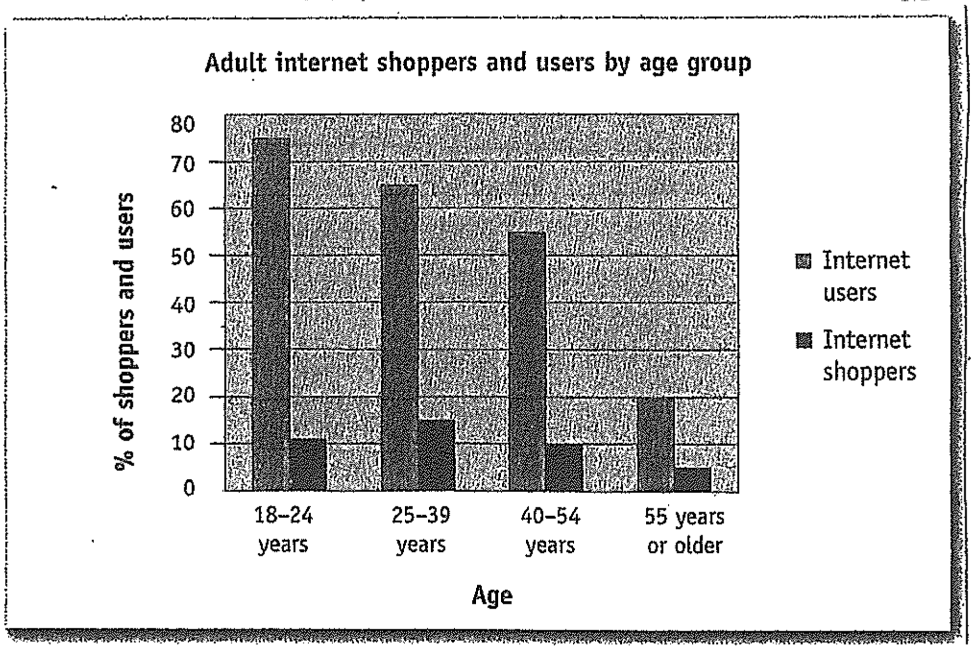
2) On se place maintenant dans l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées $s = (s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ muni de la norme $\|s\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |s_k|$, et dans cet espace on considère "l'hypercube" $C = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ des suites s telles que $0 \leq s_k \leq 1$ pour tout k. L'hypercube C est-il compact ? Peut-il exister une courbe continue surjective $\gamma : [0, 1] \to C$?

EXAMEN D'ANGLAIS L3 MATHS

Durée de l'examen : 1 heure. Nombre de pages : 3
Seules les réponses inscrites sur les copies à coins collés seront prises en compte.
Aucun document, aucun outil technologique n'est autorisé.

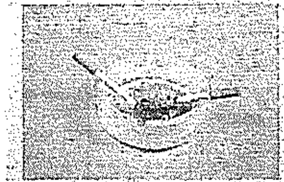
I Graph description (6 points):

Décrire le graphique ci-dessous en 150 mots. Indiquer le nombre total de mots à la fin de votre texte.



II Reading Comprehension (14 points) :

Lire le passage intitulé « The risks of cigarette smoke » et répondre aux questions 15 à 28.



The Risks of Cigarette Smoke

Discovered in the early 1800s and named nicotianine, the oily essence now called nicotine is the main active ingredient of tobacco. Nicotine, however, is only a small component of cigarette smoke, which contains more than 4,700 chemical compounds, including 43 cancer-causing substances. In recent times, scientific research has been providing evidence that years of cigarette smoking vastly increases the risk of developing fatal medical conditions.

In addition to being responsible for more than 85 per cent of lung cancers, smoking is associated with cancers of, amongst others, the mouth, stomach and kidneys, and is thought to cause about 14 per cent of leukemia and cervical cancers. In 1990, smoking caused more than 84,000 deaths, mainly resulting from such problems as pneumonia, bronchitis and influenza. Smoking, it is believed, is responsible for 30 per cent of all deaths from cancer and clearly represents the most important preventable cause of cancer in countries like the United States today.

Passive smoking, the breathing in of the side-stream smoke from the burning of tobacco between puffs or of the smoke exhaled by a smoker, also causes a serious health risk. A report published in 1992 by the US Environmental Protection Agency (EPA) emphasized the health dangers, especially from side-stream smoke. This type of smoke contains more, smaller particles and is therefore more likely to be deposited deep in the lungs. On the basis of this report, the EPA has classified environmental tobacco smoke in the highest risk category for causing cancer.

As an illustration of the health risks, in the case of a married couple where one partner is a smoker and one a non-smoker, the latter is believed to have a 30 per cent higher risk of death from heart disease because of passive smoking. The risk of lung cancer also increases over the years of exposure and the figure jumps to 80 per cent if the spouse has been smoking four packs a day for 20 years. It has been calculated that 17 per cent of cases of lung cancer can be attributed to high levels of exposure to second-hand tobacco smoke during childhood and adolescence.

A more recent study by researchers at the University of California at San Francisco (UCSF) has shown that second-hand cigarette smoke does more harm to non-smokers than to smokers. Leaving aside the philosophical question of whether anyone should have to breathe someone else's cigarette smoke, the report suggests that the smoke experienced by many people in their daily lives is enough to produce substantial adverse effects on a person's heart and lungs.

The report, published in the Journal of the American Medical Association (AMA), was based on the researchers' own earlier research but also includes a review of studies over the past few years. The American Medical Association represents about half of all US doctors and is a strong opponent of smoking. The study suggests that people who smoke cigarettes are continually damaging their cardiovascular system, which adapts in order to compensate for the effects of smoking. It further states that people who do not smoke do not have the benefit of their system adapting to the smoke inhalation. Consequently, the effects of passive smoking are far greater on non-smokers than on smokers.

This report emphasizes that cancer is not caused by a single element in cigarette smoke; harmful effects to health are caused by many components. Carbon monoxide, for example, competes with oxygen in red blood cells and interferes with the blood's ability to deliver life-giving oxygen to the heart. Nicotine and other toxins in cigarette smoke activate small blood cells called platelets, which increases the likelihood of blood clots, thereby affecting blood circulation throughout the body.

The researchers criticize the practice of some scientific consultants who work with the tobacco industry for assuming that cigarette smoke has the same impact on smokers as it does on non-smokers. They argue that those scientists are underestimating the damage done by passive smoking and, in support of their recent findings, cite some previous research which points to passive smoking as the cause for between 30,000 and 60,000 deaths from heart attacks each year in the United States. This means that passive smoking is the third most preventable cause of death after active smoking and alcohol-related diseases.

The study argues that the type of action needed against passive smoking should be similar to that being taken against illegal drugs and AIDS (SIDA). The UCSF researchers maintain that the simplest and most cost-effective action is to establish smoke-free work places, schools and public places.

Questions 15-17

Choose the appropriate letters A–D

15 According to information in the text, leukaemia and pneumonia

A are responsible for 84,000 deaths each year.
B are strongly linked to cigarette smoking.
C are strongly linked to lung cancer.
D result in 30 per cent of deaths per year.

16 According to information in the text, intake of carbon monoxide

A inhibits the flow of oxygen to the heart.
B increases absorption of other smoke particles.
C inhibits red blood cell formation.
D promotes nicotine absorption.

17 According to information in the text, intake of nicotine encourages

A blood circulation through the body.
B activity of other toxins in the blood.
C formation of blood clots.
D an increase of platelets in the blood.

Questions 18–21

Do the following statements reflect the claims of the writer in Reading Passage 2?

YES — *if the statement reflects the claims of the writer*
NO — *if the statement contradicts the claims of the writer*
NOT GIVEN — *if it is impossible to say what the writer thinks about this*

18 Thirty per cent of deaths in the United States are caused by smoking-related diseases.

19 If one partner in a marriage smokes, the other is likely to take up smoking.

20 Teenagers whose parents smoke are at risk of getting lung cancer at some time during their lives.

21 Opponents of smoking financed the UCSF study.

Questions 22-24.

Choose ONE phrase from the list of phrases A–J below to complete each of the following sentences (Questions 22–24).

22 Passive smoking ...

23 Compared with a non-smoker, a smoker ...

24 The American Medical Association ...

A	includes reviews of studies in its reports.
B	argues for stronger action against smoking in public places.
C	is one of the two most preventable causes of death.
D	is more likely to be at risk from passive smoking diseases.
E	is more harmful to non-smokers than to smokers.
F	is less likely to be at risk of contracting lung cancer.
G	is more likely to be at risk of contracting various cancers.
H	opposes smoking and publishes research on the subject.
I	is just as harmful to smokers as it is to non-smokers.
J	reduces the quantity of blood flowing around the body.

Questions 25–28

Classify the following statements as being

A a finding of the UCSF study
B an opinion of the UCSF study
C a finding of the EPA report
D an assumption of consultants to the tobacco industry

NB You may use any letter more than once.

25 Smokers' cardiovascular systems adapt to the intake of environmental smoke.

26 There is a philosophical question as to whether people should have to inhale others' smoke.

27 Smoke-free public places offer the best solution.

28 The intake of side-stream smoke is more harmful than smoke exhaled by a smoker.

Université de Grenoble I **Année 2013-2014**
Institut Fourier **Examen du 22 mai 2014**

L3 de Mathématiques, section A
Calcul différentiel

Durée: 3 heures – il sera tenu particulièrement compte de la rédaction.
Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Question de cours

0.a. Énoncer le théorème des fonctions implicites (dans une version laissée à l'appréciation du candidat, contenant au moins le cas des espaces de dimension finie).

0.b. Le résultat d'existence du théorème étant admis, énoncer et démontrer la formule permettant de calculer les dérivées partielles de la fonction produite par le théorème des fonctions implicites en dimension finie.

Exercice 1

1.a. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Montrer que l'espace $E = C^1([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|f\|_{C^1} = \sup_{x\in[a,b]} \max(|f(x)|, |f'(x)|)$$

est un espace de Banach (on admettra le fait trivial que E est un espace vectoriel).

1.b. On considère l'application

$$\Phi : E \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \int_a^b \exp\big(f(x)f'(x)\big)\, dx.$$

Pour tout $f \in E$ et $h \in E$, montrer que Φ admet des dérivées directionnelles $\partial_h\Phi(f)$ que l'on calculera après en avoir rappelé la définition. Montrer que Φ est différentiable sur E et expliciter sa différentielle.

1.c. L'application Φ est-elle deux fois différentiable ? Si oui, on explicitera sa différentielle seconde.

Exercice 2

On considère sur $\mathbb{R}^3$ la fonction polynôme

$$P(x, y, z) = xy + \frac{1}{8}(z^3 - 3z).$$

2.a. Déterminer la différentielle de P, l'ensemble C des points critiques et l'ensemble $\Lambda = P(C)$ des valeurs critiques. On note

$$E_\lambda = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\ P(x, y, z) = \lambda\big\}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

les ensembles de niveau associés à P. Indiquer une condition suffisante garantissant que E_λ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ au voisinage d'un point fixé $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E_\lambda$.

Lorsque c'est le cas, on précisera dans ce cas la dimension de E_λ et l'espace tangent (vectoriel et affine) en un tel point m_0. Pour quelles valeurs de λ peut-on ainsi conclure que E_λ tout entier est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

2.b. En calculant d^2P en chacun des points critiques m_0, déterminer la nature des points singuliers de E_λ lorsque $\lambda \in \Lambda$ (on pourra soit utiliser un résultat du cours dont on rappellera l'énoncé, soit faire directement un changement de variable ad hoc $(x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$ dans lequel les coordonnées (X, Y) diagonalisent la forme quadratique $(x, y) \mapsto xy$, et où $Z = (z - z_0)u(z)$ dépend seulement de z, avec $u(z_0) \neq 0$).

2.c. On pose $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et on désigne par $S = Q^{-1}(0)$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les points de S en lesquels les différentielles dP et dQ sont linéairement dépendantes, et en déduire les extrema de P sur S.

2.d. Montrer qu'il existe au plus quatre valeurs λ_i, $i = 1, \ldots, 4$ (que l'on précisera) telles que l'intersection de $E_\lambda \cap S$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ lorsque $\lambda \notin \widetilde{\Lambda} = \{\lambda_i\}$, et indiquer la dimension de $E_\lambda \cap S$ dans ces cas-là. Montrer que l'intersection $E_\lambda \cap S$ peut également être réduite à un point pour certaines valeurs exceptionnelles λ_i.

2.e. Déterminer les extrema de la fonction $R(x, y, z) = z$ sur $E_{1/2} \cap S$
(indication : il pourra être utile de s'assurer que l'équation $z^3 + 4z^2 - 3z - 8 = 0$ n'a pas de racines dans $[-1, 1]$).

Exercice 3

On étudie dans $\mathbb{R}^2$ le système différentiel donné par

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(t)x(t) - b(t)y(t) + c(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = b(t)x(t) + a(t)y(t) + d(t) \end{cases}$$

où $a, b, c, d : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions réelles continues définies sur un intervalle de la droite réelle.

3.a. Les solutions d'un tel système sont-elles globales ?

3.b. On suppose ici que les fonctions c et d sont identiquement nulles. Rappeler ce qu'est la matrice résolvante $R(t, t_0)$ du système et expliciter $\det(R(t, t_0))$ en fonction de certaines intégrales des coefficients.

3.c. On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, et on pose $z = x + iy$, $s(t) = a(t) + ib(t)$, $k(t) = c(t) + id(t)$. Montrer que le système différentiel ci-dessus est équivalent à une équation différentielle simple pour des fonctions de variable complexe, et donner une formule explicite pour les solutions de 3.b et pour la matrice résolvante.

3.d. Déterminer la solution du problème de Cauchy de donnée initiale (x_0, y_0) en $t_0 = 0$, pour le système différentiel correspondant aux données $a(t) = \cos(t)$, $b(t) = \sin(t)$, $c(t) = \cos(2t)$, $d(t) = \sin(2t)$.

Université Joseph Fourier - L3 - 2013-2014

Examen - Calcul différentiel

4 heures. Aucun document ni outil électronique autorisé.

Question de cours. Enoncer le théorème d'inversion locale. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^1, non constante au voisinage de 0 mais qui n'a pas d'inverse au voisinage de 0.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz$ et pour $0 < a < b < c$, Γ l'ellipsoïde défini par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1. Montrer que Γ est un compact de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $f_{|\Gamma}$ admet un maximum strictement positif en un point M_0.

3. Déterminer la valeur maximale de $f_{|\Gamma}$.

4. $f_{|\Gamma'}$ a-t-elle un maximum global si Γ' est défini par $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$?

Exercice 2. Soit $k > 0$ une constante et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^1. On suppose de plus que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une application non constante qui ne vérifie pas cette condition, pour aucun $k > 0$.

2. Montrer que f est injective.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est inversible.

4. Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

5. En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application différentiable, telle que $f(0)$ est inversible, et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $g(x) = (f(x))(x)$.

1. Montrer que g est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, et déterminer sa différentielle.

2. Montrer qu'il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tel que $g_{|U} : U \to g(U)$ est un difféomorphisme.

3. On suppose que $n = 1$. La fonction g est-elle toujours inversible sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. Pour tout $\epsilon \geq 0$, on considère le système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -y + \epsilon x^3 \\ y'(t) & = & x + \epsilon y^3 \end{array} \right.$$

1. On suppose dans cette question que $\epsilon = 0$. Résoudre le système.

2. Montrer que pour tout $((x_0, y_0), t_0) \in \mathbb{R}^3$,, il existe une unique solution maximale de condititien initiale $(x, y)(t_0) = (x_0, y_0)$.

3. Soit $u(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Montrer que $u' \leq 2\epsilon u^2$.

4. En déduire que l'intervalle de définition de la solution donnée par la question 2. contient $[t_0, t_0 + (2\epsilon\|(x, y)\|^2(t_0))^{-1}[$.

Problème. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 < a < b$.

(a) Trouver une paramétrisation $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ du cercle C de rayon a et de centre $(b, 0, 0)$ contenu dans le plan (xOz).

(b) On considère Σ la surface formée par la révolution complète de C autour de l'axe (Oz). Donner une paramétrisation $F : (t, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \mapsto F(t, \theta) \in \mathbb{R}^3$ de Σ. On pourra utiliser la notation $\forall \theta \in [0, 2\pi], u_r(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$.

(c) pour tout couple $(t, 0)$, déterminer une équation du plan tangent à Σ en $F(t, 0)$.

(d) Calculer l'aire de Σ.

(e) Déterminer $N(t, \theta)$ le vecteur normal unitaire à Σ en $F(t, \theta)$ associé à F.

(f) En déduire la matrice de la seconde forme fondamentale dans la base $B = (\frac{\partial F}{\partial t}(t, \theta), \frac{\partial F}{\partial \theta}(t, \theta))$, ainsi que la courbure de Gauss.

(g) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la courbe $\gamma_n(t) = (b + a\cos t)u_r(nt) + a\sin(t)\overrightarrow{k}$. Montrer que $\gamma_n([0, 2\pi])$ est une courbe tracée sur Σ.

(h) Montrer que la longueur l_n de cette courbe vérifie $l_n \geq 2\pi n(b - a)$.

(i) Soit $n = 0$. Déterminer pour tout t le plan oscullateur à $\gamma_0(t)$.

Université Joseph Fourier	2013-2014
Licence 3	Parcours B

Géométrie

Corrigé de l'examen du 23/05/2014, 09h-12h

Exercice 1. Soient $A \in \mathcal{E}_1 \setminus \mathcal{E}_2$ et $B \in \mathcal{E}_2 \setminus \mathcal{E}_1$.
Supposons que $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Comme A_1 et A_2 appartiennent à $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, le milieu I de A_1A_2 appartient aussi à $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$. Si $I \in \mathcal{E}_1$, alors, comme $\overrightarrow{A_1A_2} = 2\overrightarrow{A_1I} \in \overrightarrow{\mathcal{E}_1}$, on obtient que $A_2 \in \mathcal{E}_1$, ce qui est faux. De même, on n'a pas $I \in \mathcal{E}_2$, ce qui donne une contradiction avec $I \in \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$.

Exercice 2. 1. Le point A est le barycentre de $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$. Ainsi, il existe un unique point A avec la propriété voulue.

2. Le point M est le centre d'un cercle passant par A, B, C si, et seulement si, $MA = MB = MC$. Si $MB \neq MC$, il n'y a donc pas de solution. Si $MB = MC$, les points A qui sont solution sont exactement ceux qui vérifient $MA = MB$, c'est-à-dire ceux du cercle de centre M et de rayon MB.

Exercice 3. 1. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application donnée par

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y-z\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2}(x+y+z\sqrt{2}) \\ \frac{1}{2}(x\sqrt{2}-y\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

L'application g est linéaire (le vérifier, aucune difficulté mais cela doit apparaître sur la copie !) et, pour tous $M, N \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{f(M)f(N)} = g(\overrightarrow{MN})$. Ainsi, f est affine de partie linéaire $g = \overrightarrow{f}$.

2. Il suffit de vérifier que, pour tout $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\left\|\overrightarrow{f}(X)\right\| = \|X\|$, ce qui est immédiat.

3. Un calcul sans problème montre que $\det \overrightarrow{f} = 1$, donc f est un déplacement de $\mathbb{R}^3$, donc un vissage.

4. L'axe de $\overrightarrow{f}$ est la droite formée des vecteurs $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $\overrightarrow{f}(X) = X$. Un calcul montre que, si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors $\overrightarrow{f}(X) = X$ si, et seulement si, $x = y$ et $z = 0$. Ainsi, l'axe de $\overrightarrow{f}$ est la droite engendrée par $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. L'ensemble des points fixes de la rotation r est une droite $D \subset \mathbb{R}^3$ dirigée par l'axe de $\overrightarrow{f}$, et le vecteur u appartient à l'espace des points fixes de r, donc est colinéaire à v. Ainsi, $f(D) = D$.
Cela montre que, si $M \in \mathbb{R}^3$, $M \in D$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{Mf(M)} = \lambda v$, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} -x+y-z\sqrt{2}-3+\sqrt{2} = 2\lambda, \\ x-y+z\sqrt{2}-1-\sqrt{2} = 2\lambda, \\ x\sqrt{2}-y\sqrt{2}-2z+2+\sqrt{2} = 0, \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x - y + z\sqrt{2} = -1 + \sqrt{2}, \\ x - y - z\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 0, \end{cases}$$

ou encore à

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ z = 1. \end{cases}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme $A \in D$, $r(A) = A$, donc $\overrightarrow{Af(A)} = u$. Comme $f(A) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient que $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. 1. Comme P appartient aux médiatrices de OM et de OA, on a $PO = PM = PA$, ce qui signifie que O, A et M appartiennent à un même cercle de centre P. On raisonne de même avec P', O, A et M'.

2. La question précédente et la relation de Chasles montrent que

$$\begin{aligned} &\widehat{\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PA}} + \widehat{\overrightarrow{P'A'}, \overrightarrow{P'O}} \\ &= 2\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MA}} + 2\widehat{\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{MO}} \\ &= 2\widehat{\overrightarrow{MA'}, \overrightarrow{MA}} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

où la dernière ligne est due au fait que M appartient au cercle de diamètre AA'.

3. La relation de Chasles montre que

$$\begin{aligned} &\widehat{\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OP}} \\ &= \widehat{\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OA'}} + \widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}} + \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}} \\ &= \pi + \widehat{\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OA'}} + \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}}, \end{aligned}$$

car O, A et A' sont alignés.

4. Cela vient du fait que le triangle POA est isocèle de sommet P (idem pour l'autre relation).

5. On déduit de 2, 3 et 4 que

$$\begin{aligned} &\widehat{\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OP}} \\ &= \pi + \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}} + \widehat{\overrightarrow{OP'}, \overrightarrow{OA'}} \\ &= \pi + \tfrac{1}{2}\left(\pi - \widehat{\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PA}}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\pi - \widehat{\overrightarrow{P'A'}, \overrightarrow{P'O}}\right) \\ &= 2\pi - \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{3\pi}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

6. En angles de droites,

$$\begin{aligned} \widehat{IA, IA'} &= \widehat{PA, P'A'} \\ &= \widehat{PA, PO} + \widehat{PO, P'O} + \widehat{P'O, P'A'}, \end{aligned}$$

et comme la somme $\widehat{PA, PO} + \widehat{P'O, P'A'}$ vaut l'angle plat et $\widehat{PO, P'O}$ est un angle droit, l'angle $\widehat{IA, IA'}$ est droit, ce qui montre que I appartient au cercle de diamètre AA', c'est-à-dire $\mathcal{C}$.

7. Comme l'angle $\widehat{OP, OP'}$ est droit, O appartient à Γ. Comme l'angle $\widehat{IP, IP'} = \widehat{IA, IA'}$ est droit, I appartient à Γ. Enfin, comme O, A et A' sont alignés,
$$\begin{aligned}\widehat{PM, P'M} &= \widehat{PM, PO} + \widehat{PO, P'O} + \widehat{P'O, P'M}\\ &= 2\widehat{AM, AO} + \widehat{PO, P'O} + 2\widehat{A'O, A'M}\\ &= \widehat{PO, P'O} + 2\widehat{AM, A'M},\end{aligned}$$
et comme les angles $\widehat{PO, P'O}$ et $\widehat{AM, A'M}$ sont droits, l'angle $\widehat{PM, P'M}$ est droit donc M appartient à Γ.
8. Comme $O \in \Delta$, l'image de $\mathcal{C}$ par s est le cercle de centre $s(O) = O$ et de même rayon que $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}$.
Soit maintenant J le centre de Γ, qui est donc le milieu de PP'. On a
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{AA'} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{AA'}\right)\\ &= -\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OA'}.\end{aligned}$$
Or $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA}$, où H est la projection orthogonale de P sur la droite (OA), c'est-à-dire l'intersection de D et de (OA). De même, $\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OH'} \cdot \overrightarrow{OA'}$, où H' est la projection orthogonale de P' sur la droite (OA'), c'est-à-dire l'intersection de D' et de (OA'). Comme D et D' sont symétriques par rapport à Δ, on a $\overrightarrow{OH'} = -\overrightarrow{OH}$ et, comme $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$, on obtient que $\overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$. Cela montre que les droites (OJ) et (AA') sont orthogonales, donc que $J \in \Delta$. Ainsi, l'image de Γ par s est le cercle de centre $s(J) = J$ et de même rayon que Γ, c'est donc Γ.
9. Comme $OM = OI$ et $JM = JI$, la médiatrice de MI est la droite (OJ), c'est-à-dire Δ, ce qui montre que $s(I) = M$.

Université Joseph Fourier
Année universitaire 2013/2014

L3 - Parcours A

EXAMEN GGMAT36e

21 mai 2014

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

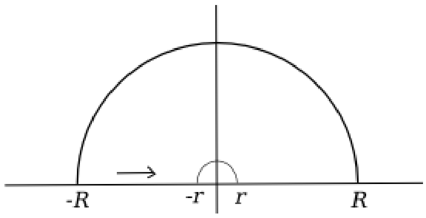
Exercice 1 (Questions de cours)

1. Définir les notions de singularité illusoire, pôle et singularité essentielle.
2. Enoncer le théorème de Mittag-Leffler.

Exercice 2
Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln^2 t}{t^2+1} dt$$

en intégrant le long du chemin indiqué.



Exercice 3
Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe avec $\mathrm{Re}(f(z)) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que f est constante. (Indication : on pourra considérer $e^{-f(z)}$).

Exercice 4
Soit f une fonction holomorphe dans $D(0, R)$, le disque ouvert de centre 0 et de rayon R. Pour $0 \leq r < R$, on pose

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

1. Montrer que $r \mapsto M_f(r)$ est une fonction croissante.
2. Montrer que, si f n'est pas constante, $r \mapsto M_f(r)$ est strictement croissante.
3. On suppose que f est un polynôme de degré n, et on pose $g(z) = z^n f(1/z)$. Ecrire explicitement g pour $f(z) = a_0 + ... + a_n z^n$. Quel est le lien entre $M_f(r)$ et $M_g(1/r)$? En déduire que la fonction $r \mapsto M_f(r)/r^n$ est strictement décroissante, sauf si f est de la forme az^n.
4. On suppose de plus que f est unitaire. Montrer que, si pour tout z de module 1, $|f(z)| \leq 1$, alors $f(z) = z^n$.

T.S.V.P.

Exercice 5 (Fonction zêta de Riemann)
Le but de cet exercice est l'étude de la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \quad \text{dans} \quad \mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re} z > 1\}.$$

1. Montrer que la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$
converge normalement sur tout compact de $\mathcal{U}$. En déduire que $\zeta(z)$ définit une fonction holomorphe dans $\mathcal{U}$.

2. On note $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Montrer que le produit
$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-z}}$$
converge normalement sur tout compact de $\mathcal{U}$. En déduire que
$$\widehat{\zeta}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-z}}$$
définit une fonction holomorphe sur $\mathcal{U}$.

3. Le but de cette partie est de démontrer que $\zeta(z) = \hat{\zeta}(z)$ pour tout $z \in \mathcal{U}$. Soit $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$. On pourra dans la suite utiliser l'égalité
$$\prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i_k=0}^{M} (p_k^{i_k})^{-s} \right) = \sum_{0\le i_1,\dots,i_m \le M} (p_1^{i_1} \dots p_m^{i_m})^{-s}. \tag{1}$$
valable pour tous $m, M \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soit maintenant $N \in \mathbb{N}^*$. Soit p_{m_0} le plus grand nombre premier p_i et M_0 la plus grande des puissances i_k apparaissant dans toutes les décompositions en facteurs premiers des N premiers entiers $1, \dots, N$. Considérons $m \ge m_0$ et $M \ge M_0$. Montrer l'inégalité
$$\sum_{n=1}^{N} n^{-s} \le \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i_k=0}^{M} (p_k^{i_k})^{-s} \right) \le \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s). \tag{2}$$
   (b) En faisant tendre M, puis m et ensuite N vers l'infini dans (2) conclure que $\zeta(s) = \widehat{\zeta}(s)$.
   (c) Montrer que $\zeta(z) = \widehat{\zeta}(z)$ pour tout $z \in \mathcal{U}$.

.

Intégration et théorie de la mesure
Examen

20 mai 2014

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

On demande d'énoncer clairement chaque théorème utilisé et de vérifier les hypothèses.

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne, sommable sur tout intervalle compact $[a, b]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

(1) [Question de cours] Montrer F est continue.

(2) Montrer que si f est continue, F est de classe C^1.

(3) Montrer que si f est continue par morceaux, F est continue et de classe C^1 par morceaux.

(4) Donner un exemple pour lequel F n'est pas de classe C^1 par morceaux.

Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1[$, on pose $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2\pi kt)}{k}$, $S(t) = -\ln(2\sin(\pi t))$.

(1) Soit $t \in]0, 1[$. Montrer que $S_n(t) - S(t) = \int_{1/2}^{t} \frac{\pi \cos((2n + 1)\pi s)}{\sin(\pi s)} ds$. On pourra dériver.

(2) Au moyen d'une intégration par parties, montrer que $S_n(t) \to S(t)$ pour tout $t \in]0, 1[$, et que la convergence est uniforme sur tout intervalle compact $[a, b] \subset]0, 1[$.

(3) Montrer que S_n est une suite de Cauchy de $L^2(0, 1)$.

(4) Montrer que $S \in L^2(0, 1)$ et que $S_n \to S$ dans $L^2(0, 1)$. A-t-on $S_n \to S$ dans $L^1(0, 1)$?

(5) Calculer $\int_0^1 \ln(\sin(\pi t))dt$ et $\int_0^1 (\ln(\sin(\pi t)))^2 dt$.

PROBLÈME

Première partie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}^n$ telles que

$$\int |f_i| d\mu < \infty \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

où les fonctions $f_i : X \to \mathbb{R}$ sont les fonctions coordonnées de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit alors

$$\int f d\mu = \Big(\int f_1 d\mu, \ldots, \int f_n d\mu \Big) \in \mathbb{R}^n.$$

(1) Montrer que $\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel.

(2) Montrer que l'intégrale est une application linéaire de $\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

(3) Montrer que pour toute application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int \varphi(f) d\mu = \varphi\Big(\int f d\mu \Big)$.

Seconde partie. Soit $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^n)$, N une norme sur $\mathbb{R}^n$, et $N(f) : X \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$N(f)(x) = N(f(x)) \ \forall x \in X.$$

(1) Montrer que $N(f)$ est mesurable.

(2) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ indépendante de f telle que $N(f) \leq c(|f_1| + \cdots + |f_n|)$.

(3) Montrer que $N(f)$ est sommable.

Troisième partie. Soit N une norme sur un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On se propose de montrer par récurrence sur n que pour tout $y_0 \in E$, il existe une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$|\varphi(y)| \leq N(y) \ \forall y \in E \text{ et } \varphi(y_0) = N(y_0). \quad (*)$$

(1) Montrer le résultat si $n = 1$.

(2) On suppose que $n \geq 2$. Soit $H \subset E$ un hyperplan contenant y_0 et soit $e \in E \setminus H$. Par récurrence, il existe une application linéaire $\psi : H \to \mathbb{R}$ telle que $|\psi(y)| \leq N(y)$ pour tout $y \in H$ et $\psi(y_0) = N(y_0)$. Montrer que pout tout $(y, y') \in H^2$, on a

$$\psi(y) - \psi(y') \leq N(y - y') \leq N(y + e) + N(y' + e)$$

(3) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $-\psi(y) - N(y + e) \leq \alpha \leq N(y + e) - \psi(y) \ \forall y \in H$.

(4) Pour tout $y \in H$ et $t \in \mathbb{R}$ on pose $\varphi(y + te) = \psi(y) + t\alpha$. Montrer que φ vérifie $(*)$.

Conclusion. Soit $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^n)$ et N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité triangulaire

$$N\Big(\int f d\mu \Big) \leq \int N(f) d\mu.$$

Université Joseph Fourier : Examen
Calcul Intégral B

Mai 22, 2014

Durée : 3 heures. Aucun document n'est autorisée. Rédiger avec soin. Lire toutes les questions avant de commencer. *Pour chaque exercice, on demandera d'énoncer précisément chaque théorème de cours que l'on utilisera.*

Question de cours

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Définir une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

1. Montrer que F est lipschitzienne et en déduire qu'elle est continue.
2. Donner un exemple explicite de f telle que la fonction F correspondante n'est pas dérivable.
3. Donner une condition suffisante sur f pour que F soit dérivable.

Exercice 1 Pour $0 \leq r < 1$, on définit le noyau de Poisson, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}.$$

1. Montrer que pour tout $r \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$P_r(t) = 1 + 2\Re\left(\frac{re^{it}}{1-re^{it}}\right).$$

La notation $\Re$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe.

2. En déduire que pour tout $r \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$P_r(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nt).$$

3. Monter que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\frac{1}{2} \leq r < 1$,

$$t^2 P_r(t) \leq \frac{t^2(1-r^2)}{1-\cos(t)}.$$

4. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{t^2}{1-\cos(t)}$ est prolongeable par continuité en $t = 0$. En déduire que la fonction $t \mapsto t^2 P_r(t)$ converge uniformément vers 0 lorsque $r \to 1^-$.
5. Pour tout $n \geq 1$, montrer que

$$\int_0^\pi t^2 \cos(nt)dt = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$

6. Déduire des questions $(2), (4)$ et (5) que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Citer correctement les théorèmes d'interversion de séries, limites, et d'intégrales utilisés.

Exercice 2 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$

1. Montrer que pour tout entier n

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

2. On considère la subdivision

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_k = \frac{k}{n} < \ldots < x_n = 1 .$$

   Que valent les sommes de Darboux inférieures et supérieures de f relativement a cette subdivision ?

3. En déduire que f est intégrable sur $[0,1]$ et déterminer

$$\int_0^1 f(t)dt$$

   sans utiliser une primitive de f.

Exercice 3 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 alors

$$\left| \int_a^b f(x)\cos(nx)dx \right| \leq \frac{2||f||_\infty}{n} + \frac{(b-a)||f'||_\infty}{n}.$$

2.
En déduire que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier, alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0.$$

(Considère une subdivsion adaptée $a = x_0 < x_1 \dots x_N = b$ à f et appliquer la question précédente à une fonction constante sur constante sur $]x_k, x_{k+1}[$).

3. En considerant $\left|\int_a^b (f(x) - g(x) + g(x)) \cos(nx) dx\right|$ montrer que pour toutes fonctions $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ intègrables,

$$\left|\int_a^b f(x) \cos(nx) dx\right| \leq (b-a)||f-g||_\infty + \left|\int_a^b g(x) \cos(nx) dx\right|.$$

4. En déduire que pour toute fonction f réglée sur $[a, b]$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

Examen du 20 mai 2014, de 13h30 à 16h30.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables déconnectés du réseau autorisés. Ce sujet comporte 2 pages. Barème donné à titre indicatif et non contractuel.

1. Précision (3 points)

On travaille en arithmétique flottante avec 14 chiffres significatifs. On s'intéresse au calcul des solutions de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ à coefficients réels, en particulier lorsque b^2 est grand devant $|ac|$, par exemple pour $x^2+12345678x+1.0=0$.

(1) Donner une valeur approchée des deux solutions de l'exemple en appliquant la formule habituelle $r_\pm = (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})/(2a)$ et discuter leur erreur relative.

(2) Comparer l'erreur relative pour la solution la moins précise avec l'erreur relative de la valeur approchée obtenue en appliquant la formule $r_+r_- = c/a$.

(3) Écrire une fonction prenant a,b,c en arguments et renvoyant deux solutions précises de l'équation (on distinguera deux cas en fonction du signe de b).

2. Méthode de la puissance (7 points)

On souhaite déterminer la racine l de plus grand module d'un polynôme P. Pour cela on applique la méthode de la puissance à la matrice companion de P, matrice M dont le polynôme caractéristique est P (commande `companion()` en Xcas).

(1) Par exemple pour $P(x) = x^3+3x^2+7x+121$, on a $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -121 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.
Prendre un vecteur aléatoire v à coordonnées dans l'intervalle $[0,1]$, lui appliquer 29 et 30 fois la matrice, en déduire une estimation λ de la racine l de P qui est la plus grande en module.

(2) Soit A une matrice symétrique réelle de taille n. On suppose qu'on a déterminé (par la méthode de la puissance) un vecteur normé v tel que $\|(Av-\lambda v\| < \varepsilon$. Soit $(v_1,...,v_n)$ les coordonnées de v dans une base propre orthonormale de A associée aux valeurs propres $(\lambda_1,...,\lambda_n)$. Calculer $\|Av-\lambda v\|$, en déduire que l'une des valeurs propres au moins vérifie $|\lambda_k-\lambda| < \varepsilon$.

(3) Peut-on appliquer le résultat du (2) à M pour déterminer un encadrement de l ?
P est un polynôme, on peut donc en calculant le signe de $P(\lambda-\delta)$ et $P(\lambda+\delta)$ montrer que P admet une racine dans $[\lambda-\delta,\lambda+\delta]$. Appliquer une méthode de dichotomie pour donner un encadrement certifié de la racine correspondante de P à 10^{-8} près. Proposer une autre méthode qui permettrait d'accélérer la convergence vers cette racine.

(4) Le polynôme pourrait avoir un couple (l_+,l_-) de racines complexes conjuguées de module maximal (c'est-à-dire, les autres racines r_i de P vérifient $|r_i| < |l_+| = |l_-|$). C'est le cas par exemple pour $Q(x) = x^3+4x+116$. On notera N la matrice companion de Q. Proposer une modification de la matrice N (avec un shift complexe) permettant de déterminer une estimation d'une des racines de ce couple par la méthode de la puissance et l'appliquer (Remarque : on ne peut plus utiliser d'arguments de signe pour certifier un encadrement d'une racine complexe de Q, mais on peut montrer l'existence d'une racine dans un disque du plan complexe de rayon $|Q/Q'(\lambda))|\times\text{degre}(Q)$).

3. Méthode des trapèzes et polynômes trigonométriques (6 points)

Étant donné une fonction continue $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, on note $I(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$ son intégrale sur $[0,2\pi]$ et $\mathrm{Trap}_N(f)$ la valeur approchée de $I(f)$ par la méthode des trapèzes avec un pas constant $h = 2\pi/N$, où $N>0$ est un entier.

(1) Soit f un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à $N-1$, de la forme

$$f(x) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

avec $c_k \in \mathbb{C}$, $c_{-k} = \overline{c}_k$, $k = -N+1, \ldots, N-1$. Montrer que $\mathrm{Trap}_N(f)$ donne le résultat exact pour l'intégrale $I(f)$.

(2) On considère la fonction $g(x) = \exp(\sin x)$. En utilisant la question 1 et le développement de l'exponentielle en 0, montrer que l'erreur $E(g) = |I(g) - \mathrm{Trap}_N(g)|$ est majorée par $c/N!$, où c est une constante que vous déterminerez.

(3) Déterminez à l'aide de Xcas l'augmentation de la précision avec h quand on divise h par deux (vous pourrez par exemple utiliser votre programme pour la méthode des trapèzes réalisé en TP). Comparez cette précision avec celles obtenues par les méthodes des rectangles à gauche et à droite. Pouvez-vous expliquer les similitudes/différences des résultats obtenus par ces trois méthodes ?

4. Ordres des méthodes de Runge-Kutta (5 points)

On considère une méthode de Runge-Kutta pour résoudre l'équation différentielle $y'(t) = f(y(t), t)$ sur l'intervalle $[0, 1]$, donnée par le tableau de coefficients

$$\begin{array}{c|cccccc}
c_0 = 0 & 0 & & & & \\
c_1 & \lambda_{10} & 0 & & & \\
c_2 & \lambda_{20} & \lambda_{21} & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
c_q & \lambda_{q0} & \lambda_{q1} & \cdots & \lambda_{q\,q-1} & 0 \\
\hline
1 & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{q-1} & \mu_q
\end{array}$$

On a donc $z_{n+1} = z_n + h\Phi(z_n, t_n, h)$ où h est le pas (supposé constant), $z_0 = y(0)$, $t_n = nh$ et

$$\Phi(z, t, h) = \sum_{i=0}^{q} \mu_i f(z_{n,i}, t + hc_i)$$

avec

$$z_{n,0} = z \ \text{ et } \ z_{n,i} = z + h \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{ij} f(z_{n,j}, t + hc_j) \ , \ i = 1, \ldots, q \ .$$

On note p l'ordre de la méthode. On rappelle que $p > 0$.

(1) Supposons que $f(y,t) = f(t)$ soit indépendante de y. On calcule l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ en résolvant l'équation différentielle ci-dessus avec la condition initiale $y(0) = 0$ par la méthode de Runge Kutta RK4. Cela correspond-t-il à une méthode d'intégration numérique connue, si oui laquelle ? Vous justifierez votre réponse.

(2) En utilisant un résultat général du cours sur l'ordre des méthodes à un pas, appliqué à une fonction $f(y,t) = f(t)$ indépendante de y, montrer que pour q quelconque l'on a

$$\sum_{i=0}^{q} \mu_i c_i^l = \frac{1}{l+1} \quad \text{pour} \quad l = 0, \ldots, p-1 \ .$$

(3) En déduire que la méthode d'intégration numérique

$$\int_0^1 g(u)\mathrm{d}u \simeq \sum_{i=0}^{q} \mu_i g(c_i)$$

est d'ordre au moins $p-1$.

(4) On rappelle qu'une méthode d'intégration numérique élémentaire à m points d'interpolation est toujours d'ordre strictement inférieur à $2m$ (voir l'exercice 2 de la feuille 7 de TD/TP). En déduire une majoration de p en fonction de q.

Université Joseph Fourier	2013-2014
Licence 3	Parcours A

Algèbre

Examen du 19/06/2014

Documents, calculatrices et portables interdits. Les exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1 (Tout groupe d'ordre pair possède au moins un élément d'ordre 2). [Environ 1 à 2 points]
Soit G un groupe fini d'ordre pair.

1. Vérifier que la formule $\varepsilon \cdot x = x^{\varepsilon}$ définit une action du groupe $\{-1, 1\}$ sur G.
2. À quelle condition l'orbite d'un élément x de G est-elle réduite à x ?
3. À l'aide de l'équation aux classes, montrer que le nombre d'éléments d'ordre 2 (exactement) dans G est impair.

Exercice 2 (Groupes d'ordre p^2q). [Environ 4 points]
Soient p, q des nombres premiers distincts. On suppose que q ne divise pas $p^2 - 1$ et que p ne divise pas $q - 1$. Soit G un groupe d'ordre p^2q.

1. Montrer que G possède un unique q-Sylow, noté Q.
2. Montrer que G possède un unique p-Sylow, noté P.
3. À l'aide de résultats du cours, expliquer pourquoi P et Q sont commutatifs et sont distingués dans G. Dans la suite, on note
$$PQ = \{g \in G : \exists (p, q) \in P \times Q, g = pq\}.$$
4. Montrer que, pour tout $x \in P$ et tout $y \in Q$, $xy = yx$ [Indication : on pourra calculer $xyx^{-1}y^{-1}$ de deux façons]. En déduire que PQ est un sous-groupe abélien de G.
5. Montrer que $PQ = G$.

Exercice 3 (Construction du corps à p^2 éléments). [Environ 6 points]
Soit $p = 2q + 1$ un nombre premier impair. On note K le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. L'élément neutre pour l'addition et pour la multiplication sont notés 0_K et 1_K.

1. Montrer que les applications $f_2 : x \mapsto x^2$ de K^* dans K^* et $f_q : x \mapsto x^q$ sont des morphismes de groupes.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f_2$, et en déduire que $\operatorname{Im} f_2$ est d'ordre q.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f_2 \subset \operatorname{Ker} f_q$, et en raisonnant sur les cardinaux, montrer qu'il y a égalité.
4. En déduire une condition simple sur q pour que l'élément -1 soit dans $\operatorname{Im} f_2$.
5. Soit a un élément de $K^* \setminus \operatorname{Im} f_2$. Montrer que le polynôme $X^2 - a$ est irréductible dans $K[X]$. Qu'en déduit-on pour l'anneau quotient $L = K[X]/(X^2 - a)K[X]$?
6. Soit π la projection canonique de $K[X]$ sur L. Montrer que la restriction de π au sous-espace vectoriel $K_1[X]$ des polynômes de degré $\leqslant 1$ est bijective. En déduire le cardinal de L.
7. Montrer que parmi les poynômes de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, un seul est inversible, et par analogie avec ce qui précède, en déduire une façon de construire un corps à 4 éléments.

Question de cours (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité). [Environ 1 point]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme scindé à racines simples $P \in K[X]$ tel que $P(u) = 0_{L(E)}$.

Exercice 4 (Diagonalisation simultanée). [Environ 2 à 3 points]

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{L}(E)$ formée d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux-à-deux. L'objet de l'exercice est de montrer qu'on peut diagonaliser les éléments de $\mathcal{F}$ dans une même base. On raisonne par récurrence sur n.

1. Montrer le résultat lorsque $n = 1$.
2. Soit $n \geqslant 2$. On suppose le résultat vrai pour toutes les dimensions de 1 à $n-1$. Soient E et $\mathcal{F}$ comme ci-dessus.
   (a) Montrer le résultat lorsque $\mathcal{F}$ ne contient que des homothéties.
   (b) On suppose maintenant que $\mathcal{F}$ contient au moins un endomorphisme u qui n'est pas une homothétie. Montrer que pour tout sous-espace propre S de u, S est stable par tout élément de $\mathcal{F}$, et que les endomorphismes v_S induits par v sur S pour $v \in \mathcal{F}$ sont diagonalisables et commutent deux-à-deux.
   (c) Conclure.

Exercice 5 (Tout sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini). [Environ 5 points]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour toute $A \in G$, $A^m = I_n$. Le but de l'exercice est de montrer que G est fini.

1. Montrer que toute matrice $A \in G$ est diagonalisable et que les valeurs propres de A appartiennent à un même ensemble F qu'on précisera, indépendant de A et de cardinal m.
2. En déduire que l'ensemble $T = \{z \in \mathbb{C} : \exists A \in G,\ \mathrm{tr}(A) = z\}$ est fini, et que I_n est l'unique élément de trace n dans G.
3. Soit E le sous-espace de $M_n(\mathbb{C})$ engendré par G. On extrait de la famille génératrice G une base $(A_1, ..., A_r)$ de E formée d'éléments de G et on note f l'application de E dans T^r donnée par
$$f(M) = (\mathrm{tr}(MA_1), \dots, \mathrm{tr}(MA_r)).$$
   Montrer que la restriction de f à G est injective. Indication : si B et C sont deux éléments de G tels que $f(B) = f(C)$, montrer que $\mathrm{tr}(BC^{-1}) = \mathrm{tr}(I_n)$.
4. Déduire des questions précédentes que G est fini, et donner une majoration de son ordre en fonction de m et de n. On commencera par majorer r et le cardinal de T, et on se contentera d'une majoration grossière.
5. Lorsque G est abélien, montrer l'existence d'une matrice inversible P telle que pour tout $A \in G$, la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale (utiliser le résultat de l'exercice 4). En déduire que $\#G \leqslant m^n$.
6. Lorsque $m = 2$, montrer que $\#G \leqslant 2^n$.

Université Joseph Fourier

Licence 3 Mathématiques, Parcours B
Algèbre

Examen 2ème session

Juin 2014

Durée de l'épreuve: 4h

Tout document et appareil électronique (calculatrice, téléphone portable) est interdit.

Barème indicatif: Cours: /1,5, Ex 1: /9,5, Ex 2: /7, Ex 3: /5

Question de cours:

1. Donner la définition d'un corps.
2. Soit k un corps. Montrer que $k[X]$ est un anneau principal.

Exercice 1. Soit $G = \mathbb{R}^3$ muni de la loi suivante:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b'+c'a \\ c+c' \end{pmatrix}.$$

1. Quel est l'élément neutre de la loi $*$? Calculer l'inverse de $g = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (qu'on notera dans la suite g^{-1}).

2. Montrer que $(G,*)$ est un groupe. Est-il abélien? Justifier.

3. Montrer que le sous-ensemble $H = \{\begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \in G\}$ est un sous-groupe de $(G,*)$. Est-il abélien? Montrer qu'il est isomorphe au groupe $(\mathbb{R},+)$.

On rappelle que le centre de G est l'ensemble $Z(G)$ des éléments de G commutants avec tous les éléments de G, c'est-à-dire

$$Z(G) = \{z \in G \text{ tels que } \forall g \in G \ z * g = g * z\}.$$

4. Montrer que $Z(G) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \in G\}$.

On considère l'action de G sur $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .(x,y,z) = (x + ay + bz, y + cz, z).$$

5. Vérifier que c'est bien une action.

6. Cette action est-elle fidèle?

7. Quels sont les points fixes de cette action?

8. Soit $y_0 \neq 0$. Décrire l'orbite de $(0, y_0, 0)$.

9. Soit $z_0 \neq 0$. Décrire l'orbite de $(0, 0, z_0)$.

10. Décrire toutes les orbites de cette action.

Pour $g \in G$ on notera $[g]$ l'image de g dans G/H (où H est le sous-groupe de G défini à la question 3.). Soient $g = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $g' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux éléments de G.

11. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, a', b', c' pour que $g^{-1} * g' \in H$.

12. Montrer que $\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ a+b \\ c \end{pmatrix}\right]$.

13. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans G/H qui à (x, y) associe $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}\right]$ est une bijection.

14. Quel est le stabilisateur de $(1, 1, 1)$ pour l'action définie dans la question 5? Quelle est son orbite? Relier ce résultat à la question précédente.

Exercice 2. Soit k le corps $k = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on notera $\bar{n}$ son image dans k.

1. Quel est l'inverse de $\bar{2}$ dans k?

2. Faire la division euclidienne de $X^3 + X^2 - X$ par $\bar{2}X - \bar{1}$ dans $k[X]$.

3. Montrer que le polynôme $X^2 + \bar{1}$ n'est pas irréductible dans $k[X]$. Quels sont ses facteurs irréductibles?

4. Soit $\Phi : k[X] \to k^2$ l'application définie par $\Phi(P) = (P(\bar{2}), P(\bar{3}))$.
   (a) Montrer que Φ est un morphisme d'anneau.
   (b) Montrer que Φ induit un isomorphisme d'anneau $k[X]/(X^2 + \bar{1}) \to k^2$.

5. Montrer que le polynôme $X^2 + \bar{2}$ est irréductible dans $k[X]$.

6. Montrer que l'anneau $k[X]/(X^2 + \bar{2})$ est intègre.

7. En déduire que les anneaux $k[X]/(X^2 + \bar{1})$ et $k[X]/(X^2 + \bar{2})$ ne sont pas isomorphes.

8. Les anneaux $k[X]/(X^2 + \bar{1})$ et $k[X]/(X^2 - \bar{1})$ sont-ils isomorphes?

Exercice 3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$. On note M sa matrice dans la base canonique. On suppose que son polynôme caractéristique est égal à

$$\chi_f(X) = (X - 2)^4 X.$$

1. Montrer que la dimension de $\operatorname{Ker} f$ est égale à 1. Dans la suite on notera $v \in \mathbb{R}^5$ un générateur de $\operatorname{Ker} f$.

2. Quelles sont toutes les possibilités pour le polynôme minimal μ_f de f? Justifier. Pour chaque possibilité donner un exemple de matrice ayant ce polynôme comme polyôme minimal et ayant χ_f comme polynôme caractéristique.

Notons $g = f - 2I_5$, $V = \operatorname{Ker} g$ et $W = \operatorname{Ker} g^2$. On suppose maintenant que $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ et $\dim_{\mathbb{R}} W = 4$. Soit (v_1, v_2) une base de V.

3. Montrer que $V \subset W$ et en déduire qu'il existe des vecteurs v_3 et v_4 tels que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de W.

4. Notons $w_1 = g(v_3)$ et $w_2 = g(v_4)$. Montrer que (w_1, w_2) est une base de V et en déduire que (w_1, w_2, v_3, v_4) est une base de W.

5. Donner une base de $\mathbb{R}^5$ dans laquelle la matrice de f est de la forme:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Quel est le polynôme minimal de f?

Université Joseph Fourier | **Topologie L3A**
Licence Sciences et Technologies | **Année 2013–2014**

Examen du 18 juin 2014

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits. L'exercice et les deux problèmes sont indépendants. Durée de l'épreuve : 4 heures.

Question de cours. Définir l'ensemble A des valeurs d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace métrique (E,d), et donner (sans démonstration) quelques caractérisations de A. Si E est compact, montrer que $A \neq \emptyset$ et que $\text{dist}(x_n, A) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice. (*Graphe d'une application continue*)
Soient $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ deux espaces métriques, et $f : E_1 \to E_2$ une application. On appelle *graphe de* f le sous-ensemble de $E_1 \times E_2$ défini par

$$G_f \;=\; \Big\{(x,y) \in E_1 \times E_2 \,\Big|\, y = f(x)\Big\}\ .$$

a) Si f est continue, montrer que G_f est fermé dans $E_1 \times E_2$ (pour la topologie produit). Vérifier en outre que l'application $x \mapsto (x, f(x))$ est un homéomorphisme de E_1 sur G_f.

b) Réciproquement, on suppose que G_f est fermé dans $E_1 \times E_2$ et que $f(E_1)$ est contenu dans une partie compacte de E_2. Montrer que f est continue.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \le 0$ et $f(x) = 1/x$ pour tout $x > 0$. Vérifier que le graphe de f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. L'application f est-elle continue ?

Problème 1 (*Théorèmes de Dini*)
Première partie :
Soit (E,d) un espace métrique compact, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que
i) $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$ pour tout $x \in E$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
ii) $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$ lorsque $n \to \infty$, où $f : E \to \mathbb{R}$ est continue.
On se propose de montrer que f_n converge vers f uniformément sur E lorsque $n \to \infty$.

a) On note $g_n = f - f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les propriétés de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) On fixe $\epsilon > 0$. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe $n_x \in \mathbb{N}$ et $r_x > 0$ tels que

$$g_n(y) \;\le\; \epsilon \quad \text{pour tout } y \in B(x, r_x) \text{ et tout } n \ge n_x\ .$$

Ici $B(x, r_x)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r_x dans E.

c) En utilisant la compacité de E, en déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $g_N(y) \le \epsilon$ pour tout $y \in E$. En conclure que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro uniformément sur E lorsque $n \to \infty$.

Seconde partie :
Soit à présent $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, où $a < b$. On considère une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de I dans $\mathbb{R}$ telles que
i) $h_n(x) \geq h_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous les $x, y \in I$ tels que $x \geq y$.
ii) $h_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in I$ lorsque $n \to \infty$, où $h : I \to \mathbb{R}$ est continue.
On se propose de montrer que h_n converge vers h uniformément sur I lorsque $n \to \infty$.

d) Vérifier que la fonction $h : I \to \mathbb{R}$ est monotone croissante.

e) On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision de I de la forme $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ telle que $h(x_i) - h(x_{i-1}) \leq \epsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.

f) Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. En utilisant la monotonie des fonctions h_n, montrer qu'il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que

$$|h_n(y) - h(y)| \leq 2\epsilon \quad \text{pour tout } y \in [x_{i-1}, x_i] \text{ et tout } n \geq n_i\ .$$

g) En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|h_n(y) - h(y)| \leq 2\epsilon$ pour tout $y \in I$ si $n \geq N$. Conclure.

Problème 2 (*Compactification d'Alexandrov*)
Soit (E, τ) un espace topologique séparé. On suppose que E est *localement compact*, c'est-à-dire que tout point de E possède un voisinage compact dans E. Le but de ce problème est de montrer qu'on peut plonger E de façon continue dans un espace compact $\mathcal{E}$ obtenu en ajoutant à E un unique élément, que l'on notera ω.

Première partie :
Soit $\mathcal{E} = E \cup \{\omega\}$. On note τ_ω la famille de tous les sous-ensembles de $\mathcal{E}$ de la forme $\{\omega\} \cup K^c$, où K est un compact de E et K^c désigne son complémentaire dans E. On définit également $\sigma = \tau \cup \tau_\omega$ (σ est donc la collection de tous les ouverts de E, considérés ici comme parties de $\mathcal{E}$, et de tous les éléments de la famille τ_ω).

a) Vérifier que σ est une topologie sur $\mathcal{E}$.

b) Montrer que $(\mathcal{E}, \sigma)$ est un espace topologique séparé.

c) Montrer que $(\mathcal{E}, \sigma)$ est un espace topologique compact. On dit que $\mathcal{E}$ est le *compactifié d'Alexandrov* de E.

d) Si E est considéré comme un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, vérifier que la topologie induite par σ sur E coïncide avec τ.

e) On suppose dans cette question que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, muni de sa topologie usuelle τ. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E converge vers ω dans $\mathcal{E}$ si et seulement si $\|x_n\| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Au vu de cette propriété, on appelle souvent ω le “point à l'infini” de $\mathcal{E}$.

Seconde partie :
On suppose désormais que $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa topologie usuelle τ. Le but de cette partie est d'exhiber une réalisation concrète du compactifié d'Alexandrov dans ce cas. Soit S la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1 \right\} ,$$

que l'on munit de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^3$. On note $\dot{S} = S \setminus \{P\}$, où $P = (0,0,1) \in S$ est le "pôle nord", et on considère l'application $f : \dot{S} \to E$ définie par

$$f(x) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right), \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in \dot{S} .$$

On dit que f est la *projection stéréographique* de la sphère privée du pôle nord sur son plan équatorial.

f) Vérifier que l'application $f : \dot{S} \to E$ est continue et bijective.

g) On prolonge f en une bijection $F : S \to \mathcal{E}$ en posant $F(P) = \omega$. Vérifier que F est encore continue.

h) En déduire que le compactifié d'Alexandrov du plan $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe à la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$.

L3B – Topologie **Examen du lundi 16 juin 2014** **13h30-17h30**

Documents, calculatrices, téléphones interdits.
Argumenter vos réponses et énoncer avec précision les théorèmes utilisés.
Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

0. Questions de cours et applications [6 points].

Soit $(E, \|\bullet\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée.

1) Rappeler la définition de la notion de valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E. En donner une autre caractérisation et démontrer l'équivalence de celle-ci avec la définition.

2) Soient A et B deux parties compactes non vides disjointes de E. Montrer en le justifiant précisément qu'il existe des points $x_0 \in A$ et $y_0 \in B$ tels que $d(x,y)$ réalise la distance $d(A,B)$, à savoir l'inf des distances possibles $d(x,y)$ entre des points $x \in A$ et $y \in B$. Que peut-on en conclure quant à $d(A,B)$?

3) Si A et B sont des parties fermées disjointes, la propriété 2) est-elle nécessairement réalisée ?

4) On suppose ici que E est de dimension finie. Rappeler ce que sont les parties compactes de E. Soit maintenant A, B des parties fermées non vides disjointes de E. Si A est compacte, montrer que la distance $d(A,B)$ est encore réalisée par un couple de points $(x_0,y_0) \in A \times B$.
Indication. Choisir deux points $x_1 \in A$, $y_1 \in B$ et vérifier que l'inf des distances $d(A,B)$ est certainement réalisé par un couple $(x,y) \in A \times B'$, où B' est l'ensemble des $y \in B$ tels que $d(x_1,y) \leq d(x_1,y_1) + \operatorname{diam} A$, où $\operatorname{diam} A = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$.

5) Énoncer un théorème donnant des conditions suffisantes usuelles pour que la somme d'une série $\sum u_n(x)$ de fonctions continues u_n d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ soit continue, en termes de propriétés de la série de fonctions u_n.

Exercice 1 [6 points + bonus]. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a,b]$, muni de la forme bilinéaire

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

1) Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire et que $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ est une norme.

2) À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

est une forme linéaire continue, et déterminer la norme $|||\varphi|||$.

3) On suppose désormais $[a,b] = [0,1]$ et on considère la suite $f_n(x) = e^{-nx}$. Calculer $\|f_n\|_2$ et en déduire qu'il s'agit d'une suite convergente. Sa limite dans E coïncide-t-elle avec la limite ponctuelle $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$?

4) On considère la fonction $g : [0,1[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = (1-x)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$ (qui n'est pas dans E). Rappeler quel est le développement en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ donné par la formule de Taylor. Dans la suite de la question, on admettra que l'on a un équivalent

$$(*) \qquad a_n \sim c_\alpha n^{\alpha-1} \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

avec une constante $c_\alpha > 0$. Si g_n est le polynôme de degré n donné par la somme partielle $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ de la série, montrer que g_n converge uniformément vers g sur tout intervalle $[0, 1-\delta]$, $\delta \in]0,1[$.

5) Calculer à l'aide de $(*)$ un équivalent de $\|g_n - g_{n-1}\|_2$ lorsque $n \to +\infty$, et en déduire que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si $\alpha < 1/2$. On suppose maintenant que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers un élément $h \in E$. Montrer que l'on devrait alors avoir $h = g$ sur l'intervalle $[0,1[$. L'espace E est-il complet ?

6) (Question bonus, 2 points) On pose $u_n = \log(a_n/n^{\alpha-1})$ pour $n \geq 1$. Déterminer un développement limité de $u_n - u_{n-1}$ à l'ordre 2 en fonction des puissances de $1/n$ et en déduire $(*)$.

Exercice 2 [4 points]. On considère les espaces suivants :
$E_1 = \mathbb{R}$ (avec la distance usuelle $d_1(x,y) = |x-y|$, $E_2 =]0,1[$ et $E_3 = [0,1[$ (avec la distance induite par d_1), $E_4 = \mathbb{R}^2$ avec la distance euclidienne.

1) Déterminer parmi les espaces précédents quelles paires E_i, E_j, forment des espaces homéomorphes, en précisant un homéomorphisme explicite dans chaque cas.

2) Pour les paires non homéomorphes, donner un raisonnement précis justifiant la non existence d'un homéomorphisme.

Exercice 3 [3 points]. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère l'origine $o = (0,0)$, le point $\omega = (3,0)$, et la partie

$$A = B(o,1) \cup \overline{B}(\omega,2)$$

où $B(p,r)$ désigne la boule ouverte de centre p et de rayon r (ici, un disque !).

1) Représenter A graphiquement. Déterminer l'adhérence $\overline{A}$ et l'intérieur A° : on donnera une justification complète.

2) Les parties A, $\overline{A}$ et A° sont-elles connexes ? Sont-elles compactes ?

Exercice 4 [3 points].
Soit $(p_i)_{1\leq i\leq N}$ une famille finie de points de $\mathbb{R}^n$ et $b = \sum_{1\leq i\leq N} \lambda_i p_i$ leur barycentre pour des poids $\lambda_i \geq 0$ tels que $\sum_{1\leq i\leq N} \lambda_i = 1$. On désigne par $K \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces barycentres.

1) Montrer que K est une partie convexe bornée de $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que l'ensemble $\Delta \subset \mathbb{R}_+^N$ des coefficients $\lambda = (\lambda_i) \in \mathbb{R}_+^N$ tels que $\sum \lambda_i = 1$ est compact. En déduire que K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

Université de Grenoble I — Année 2013-2014
Institut Fourier — Examen du 16 juin 2014, 9h00 – 12h00

L3 de Mathématiques, section A
Calcul différentiel

Durée: 3 heures – il sera tenu particulièrement compte de la rédaction.
Documents, calculettes et téléphones portables interdits.

Question de cours

Énoncer une version du théorème de différentiabilité des séries de fonctions différentiables, et indiquer des conditions suffisantes pour que la somme de la série soit de classe C^k.

Exercice 1

Soit $(A, +, \times, \|\bullet\|)$ une algèbre de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.a. Démontrer que l'application $g_p : A \to A$, $x \mapsto x^p$ est différentiable. Donner l'expression de la différentielle dg_p. Dans le cas où A est commutative, expliciter l'expression de la différentielle k-ième $d^k g_p(x)(h_1, \ldots, h_k)$.

1.b. Dans le cas général (où A est non nécessairement commutative), montrer par récurrence sur k que pour $k \leq p$ et tous $x, h_1, \ldots, h_k \in A$ on a

$$d^k g_p(x)(h_1, \ldots, h_k) = \sum_{i_0+\ldots+i_k=p-k} \ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} x^{i_0} h_{\sigma(1)} x^{i_1} h_{\sigma(2)} x^{i_2} \ldots h_{\sigma(k)} x^{i_k}, \quad i_j \in \mathbb{N}.$$

Que vaut $d^k g_p$ si $k > p$? Démontrer que l'on a en chaque point $x \in A$ la majoration $|||d^k g_p(x)||| \leq p(p-1)\ldots(p-k+1)\|x\|^{p-k}$.

1.c. On cherche à définir une fonction "log" sur A en posant

$$\varphi(x) = \log(1_A + x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p, \quad x \in A.$$

Montrer qu'il s'agit d'une fonction de classe C^∞ sur la boule unité ouverte $U = B(0, 1)$ de A, qui réalise un difféomorphisme C^∞ d'un voisinage de 0 sur un voisinage de 0 dans A. Donner une expression simple de la différentielle $d\varphi(x)(h)$ lorsque A est commutative.

1.d. On pose $\psi(x) = \exp(x) - 1_A$ pour $x \in A$. Déterminer la plus grande boule ouverte $B(0, r_0)$ sur laquelle $\|\psi(x)\| < 1$. Montrer que ψ est de classe C^∞ sur A en général, et expliciter la différentielle $d\psi(x)(h)$ en supposant A commutative.

1.e. On cherche maintenant à identifier les fonctions $\psi \circ \varphi$ et $\varphi \circ \psi$. Déterminer des boules de centre 0 dans lesquelles ces composées sont définies. En supposant A commutative, calculer explicitement la dérivée de la fonction $u : [0, 1] \to A$ telle que

$$u(t) = \varphi \circ \psi(tx) = \log(\exp(tx)), \qquad t \in [0, 1].$$

En déduire la valeur de $\varphi \circ \psi(x)$ sur la boule $B(0, r_0)$.

1.f. On considère maintenant la fonction $v : [0,1] \to A$ telle que

$$v(t) = \psi \circ \varphi(tx), \qquad t \in [0,1], \quad x \in B(0,1).$$

En supposant de nouveau A commutative, montrer que v satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont une solution est connue. En déduire la valeur de $\psi \circ \varphi(x)$ sur la boule $B(0,1)$.

1.g. Montrer que la sous-algèbre fermée A_x de A engendrée par x (à savoir l'adhérence de l'ensemble des $P(x) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i x^i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$) est une algèbre de Banach commutative, et en déduire que les résultats de 1.e et 1.f sont valables même lorsque A n'est pas commutative.

Exercice 2

On considère sur $\mathbb{R}^3$ la fonction polynôme

$$P(x,y,z) = xyz^2.$$

2.a. Déterminer la différentielle de P, l'ensemble C des points critiques et l'ensemble $\Lambda = P(C)$ des valeurs critiques. On note

$$E_\lambda = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ P(x,y,z) = \lambda\}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

les ensembles de niveau associés à P. Indiquer une condition suffisante garantissant que E_λ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ au voisinage d'un point fixé $m_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E_\lambda$. Lorsque c'est le cas, on précisera la dimension de E_λ et l'espace tangent (vectoriel et affine) en un tel point m_0. Pour quelles valeurs de λ peut-on ainsi conclure que E_λ tout entier est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

2.b. Déterminer l'ensemble E_0 et préciser au voisinage de quels points il s'agit d'une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

2.c. On pose $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et on désigne par $S = Q^{-1}(0)$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les points de S en lesquels les différentielles dP et dQ sont linéairement dépendantes, et en déduire les extrema de P sur S.

2.d. Montrer qu'il existe au plus un ensemble fini $\widetilde{\Lambda} = \{\lambda_i\}$ (que l'on précisera) telles que l'intersection $E_\lambda \cap S$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ lorsque $\lambda \notin \widetilde{\Lambda}$, et indiquer la dimension de $E_\lambda \cap S$ dans cette situation. Étudier la nature de $E_\lambda \cap S$ pour les valeurs exceptionnelles $\lambda = \lambda_i \in \widetilde{\Lambda}$.

Exercice 3

On étudie sur $I =]0, +\infty[$ l'équation du second ordre

$$(*) \qquad t^2 y''(t) + t y'(t) + y(t) = \frac{1}{t},$$

où $y : I \to \mathbb{C}$.

3.a. Les solutions de $(*)$ sont-elles globales sur I ? Que peut-on dire en général de l'espace des solutions ?

3.b. Montrer que le changement de variable $t = e^u$, $z(u) = y(e^u)$ ramène $(*)$ à une équation linéaire à coefficients constants.

3.c. Résoudre le problème de Cauchy pour $(*)$ avec les conditions initiales $y(1) = y_0$, $y'(1) = y_1$.

Examen de la seconde session - 4 heures

Question de cours. Enoncer le théorème des fonctions implicites pour une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \cosh(x+y+z)$ et Γ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $\cosh x + \cosh y + \cosh z = 5$. On rappelle que $2\sinh = e^x - e^{-x}$ et $2\cosh = e^x + e^{-x}$.

1. Résoudre l'équation $3\cosh x = 5$.
2. Montrer que Γ est un compact de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que $f_{|\Gamma}$ admet un maximum strictement positif.
4. Déterminer la valeur maximale de $f_{|\Gamma}$.
5. Quel est l'inf de $f_{|\Gamma}$?
6. $f_{|\Gamma'}$ a-t-elle un maximum global si Γ' est défini par $\Gamma' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \cosh x + \cosh y = 2\}$?

Exercice 3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $v \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^p \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $Y : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ deux applications différentiables, et $\phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\phi(x) = \langle f(x)(v), g(Y(x)) \rangle.$$

1. Montrer que g est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, et déterminer sa différentielle.
2. On suppose que $p = n = 1$ Calculer la dérivée de ϕ.

Exercice 4. Pour tous $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, on considère le système différentiel (E_0)

$$\begin{cases} x'(t) &= 2x + \sqrt{3}y \\ y'(t) &= \sqrt{3}x \end{cases}$$

avec $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.

1. Sur quel intervalle de temps les solutions maximales de (E_0) sont-elles définies ?
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A, qu'on classera en prenant $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$.

3. Trouver a et $b \in \mathbb{C}$ de sorte que $e_1 = (-1, a)$ soit vecteur propre associé à λ_1 et $e_2 = (\sqrt{3}, b)$ associé à λ_2.

4. Exprimer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps t, de x_0 et de y_0.

Problème.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ l'application $f(t) = (t, 0, e^{-t})$, C l'image $f([0,1])$ et Σ la surface formée par la révolution complète de C autour de l'axe (Oz).

(a) Dessiner C et tracer une esquisse de Σ.

(b) Montrer que l'aire σ de Σ vérifie $\pi < \sigma < \sqrt{2}\pi$.

(c) Pour tout point $m \in \Sigma \cap (Oxz)$ avec $x > 0$, déterminer une équation du plan tangent à Σ en m .

(d) Déterminer un vecteur normal unitaire $N(t, \theta)$ à Σ en tout point de Σ.

(e) Déterminer en tout point de Σ l'une de ses courbures fondamentales.

(f) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la courbe $\gamma_n(t) = (t\cos(nt), t\sin(nt), e^{-t})$, $t \in [0,1]$. Montrer que $\gamma_n([0,1])$ est une courbe tracée sur Σ.

(g) Montrer que la longueur l_n de cette courbe vérifie $l_n \sim_{n\to\infty} n/2$.

(h) Soit $n = 0$. Déterminer pour tout t le plan osculateur à $\gamma_0(t)$.

Université Joseph Fourier — 2013-2014
Licence 3 — Parcours B

Géométrie

Examen du 17/06/2014, 14h30-17h30

Les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine, dirigé par $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. On suppose que, pour tout vecteur $u \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $f \circ t_u = t_u \circ f$, où t_u désigne la translation de vecteur u de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

1. Soient g une isométrie de $\mathcal{E}$ et $v \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Montrer que $g \circ t_v \circ g^{-1}$ est une translation, dont on déterminera le vecteur.
2. Montrer que $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$.
3. En déduire la nature de f.

Exercice 2. Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien dirigé par $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une isométrie affine. On suppose qu'il existe $A, B \in \mathcal{P}$ avec $A \neq B$ tels que $f(A) = B$ et $f(B) = A$. On note $\overrightarrow{f}$ la partie linéaire de f.

1. Soit $u \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ de norme 1 et orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. Montrer que $\overrightarrow{f}(u) = u$ ou $\overrightarrow{f}(u) = -u$.
2. En déduire que $\overrightarrow{f}$ est soit la réflexion orthogonale par rapport à la droite de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ engendrée par u, soit égale à $-\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$.
3. Soit I le milieu de AB. Que vaut $f(I)$?
4. En déduire les deux possibilités pour la nature de f.

Exercice 3. Pour tout $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on définit $f(M) = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ par

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z) + 2, \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z) - 1, \\ z' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z) - 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est affine et calculer sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$.
2. Vérifier que f est une isométrie.
3. Montrer que f est un vissage. Ainsi, $f = t_u \circ r$, où $u \in \mathbb{R}^3$ est un vecteur directeur de l'axe de $\overrightarrow{f}$ et r est une rotation.
4. Déterminer l'axe de la rotation $\overrightarrow{f}$.
5. Déterminer u.

Exercice 4. Soient $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien, O_1, O_2 deux points de $\mathcal{P}$ distincts, $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ deux nombres distincts, $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon R_1 et $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre O_2 et de rayon R_2.

1. Soit h une homothétie telle que $h(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$.
   (a) Quel est le rapport de h ?
   (b) Soit $M_1 \in \mathcal{C}_1$. Quelle est l'image par h de la droite (O_1M_1) ?
2. Montrer qu'il existe exactement deux homothéties transformant $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$. Expliquer comment on peut construire leurs centres.

3. Soit f une similitude directe transformant $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$.
   (a) Quel est le rapport k de f ? En déduire que f possède un centre O.
   (b) Vérifier que $d(O, O_2) = kd(O, O_1)$.
   (c) Soit G le barycentre de $\{(O_1, -k^2), (O_2, 1)\}$. Calculer $d(G, O_1)$ et $d(G, O_2)$ en fonction de $d(O_1, O_2)$ et de k.
   (d) En déduire que O appartient à un cercle de centre G dont on précisera le rayon. On pourra écrire que $\left\|\overrightarrow{OO_2}\right\|^2 = k^2 \left\|\overrightarrow{OO_1}\right\|^2$.

Exercice 5. 1. Soient P, Q deux points dans un espace affine $\mathcal{E}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, on appelle $f(M)$ le barycentre de $\{(P, 1), (Q, 1), (M, 1)\}$. Montrer que f est une application affine, dont on déterminera la partie linéaire.

2. Généraliser à une famille de n points de $\mathcal{E}$ avec $n \geqslant 3$.

Université Joseph Fourier Année universitaire 2013/2014 — L3 - Parcours A

EXAMEN GGMAT36e

17 juin 2014

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 3h

Exercice 1 (Autour du cours)

1. Enoncer les inégalités de Cauchy.

2. Soit f une fonction entière telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $M > 0$ avec

$$|f(z)| \leq M|z|^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

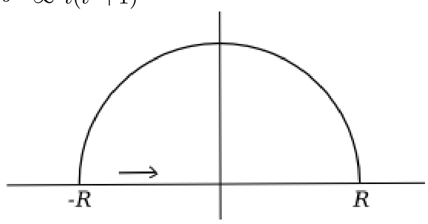
   Montrer que f est un polynôme. Expliquer pourquoi le théorème de Liouville est un cas particulier de ce résultat.

3. Enoncer le théorème de d'Alembert et le démontrer à l'aide du théorème de Liouville.

Exercice 2
Justifier la convergence de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t(t^2+1)} dt$$

et calculer sa valeur.
Indication : On pourra utiliser $I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}-1}{t(t^2+1)} dt$ et intégrer le long du chemin indiqué.



Exercice 3
Dans les exemples suivants déterminer le type de singularité en $z_0 = 0$. S'il s'agit d'une singularité illusoire, déterminer la limite quand $z \to 0$. Dans les autres cas, déterminer la série de Laurent autour de 0.

1. $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^5}$,
2. $f(z) = z^n e^{1/z}$,
3. $f(z) = \dfrac{z}{\text{Log}(1+z)}$ (ici $\text{Log}(1+z)$ est la détermination principale du logarithme).

T.S.V.P.

Exercice 4
Soit f une fonction entière telle qu'il existe trois nombres réels a, b, c, $a - ib \neq 0$ avec

$$a\mathrm{Re}f(z) + b\mathrm{Im}f(z) \leq c, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 5
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0. Est-ce qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Justifier votre réponse.

Exercice 6
Soient $0 < r_1 < r_2$ des réels positifs. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant la couronne $\{z \in \mathbb{C},\ r_1 \leq |z| \leq r_2\}$. On note pour $r_1 \leq r \leq r_2$, $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$.

1. Soient $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le principe du maximum à la fonction $z \mapsto z^p f(z)^q$, montrer que

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow r^p M(r)^q \leq \max(r_1^p M(r_1)^q, r_2^p M(r_2)^q).$$

2. En déduire que pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow r^\alpha M(r) \leq \max(r_1^\alpha M(r_1), r_2^\alpha M(r_2)).$$

   (Indication : on pourra utiliser un argument de densité).

3. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$. Calculer cet α et déduire l'inégalité

$$\forall r \quad r_1 \leq r \leq r_2 \Rightarrow M(r) \leq M(r_1)^{\frac{\ln(r_2)-\ln(r)}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}} M(r_2)^{\frac{\ln(r)-\ln(r_1)}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}}.$$

Intégration et théorie de la mesure
Examen de seconde Session

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

On demande d'énoncer clairement chaque théorème utilisé et de vérifier les hypothèses.

Exercice 1 : Questions de cours.

(1) Montrer qu'une fonction monotone est borélienne.

(2) Montrer qu'une fonction continue sauf sur un ensemble dénombrable, elle est borélienne.

(3) Montrer le second théorème de la moyenne pour les fonctions de classes C^1.

Exercice 2 : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $[0,1]$. On considère la fonction f définie pour $x \in [0,1]$ par

$$f(x) = \sum_{n\in I(x)} \frac{1}{2^n},$$

où $I(x)$ est l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $x_n < x$. On pose $f(x) = 0$ si $I(x) = \emptyset$. Montrer que f est borélienne et que

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x_n}{2^n}.$$

Exercice 3 : Démontrer la formule donnant l'aire d'un triangle dans le plan.

PROBLÈME

Première partie. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne et $(s,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On pose

$$\varphi(s) = \ell(\{t \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } f(t) > s\}),$$

$$f^*(t) = \ell(\{s \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } \varphi(s) > t\}).$$

où ℓ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que φ est décroissante et continue à droite.

(2) En déduire que $\varphi^{-1}([0,t])$ est un intervalle de la forme $[\alpha,+\infty[$, puis que $\alpha = f^*(t)$.

(3) Montrer que pour tous $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$, on a $\varphi(s) > t$ si et seulement si $f^*(t) > s$.

Seconde partie. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'ensembles boréliens et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n = \alpha_1 \mathbb{1}_{A_1} + \cdots + \alpha_n \mathbb{1}_{A_n},\ \varphi_n(s) = \ell(\{x \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } f_n(x) > s\}).$$

Remarque : puisque $f_n(x) = 0$ pour $x \notin A_n$, on peut supposer que $x \in A_n$ dans la définition de φ_n. Le but est de montrer par récurrence sur n que

$$f_n^* = a_1 \mathbb{1}_{[0,\ell(A_1)[} + a_2 \mathbb{1}_{[0,\ell(A_2)[} + \cdots + a_n \mathbb{1}_{[0,\ell(A_n)[}.$$

(1) Soit $A \subset \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que $\{x \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } \mathbb{1}_A(x) > s\} = \left\{ \begin{array}{ll} A & \text{si } 0 \leq s < 1 \\ \emptyset & \text{si } s \geq 1. \end{array} \right.$ En déduire la propriété pour $n = 1$.

(2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\varphi_n(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \ell(A_n) & \text{si } 0 \leq s < a_n \\ \varphi_{n-1}(s - a_n) & \text{si } s \geq a_n. \end{array} \right.$

(3) Montrer que $f_n^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} a_n & \text{si } 0 \leq t < \ell(A_n) \\ f_{n-1}^*(t) & \text{si } t \geq \ell(A_n). \end{array} \right.$. Conclure.

Troisième partie. Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions boréliennes. On dédinit pour $s \in \mathbb{R}_+$

$$\varphi(s) = \ell(\{t \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } f(t) > s\}),\ \psi(s) = \ell(\{t \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q. } g(t) > s\}).$$

(1) En utilisant la première partie, montrer que

$$\{x \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q } f^*(x) > s \text{ et } g^*(x) > t\} = [0, \min(\varphi(s), \psi(t))[$$

(2) Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty f^*(x) g^*(x) dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{1}_{s<f^*(x)} \mathbb{1}_{t<g^*(x)} dx ds dt$

(3) En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty f^*(x) g^*(x) dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \min(\varphi(s), \psi(t)) ds dt.$

(4) Montrer que $\ell(\{x \in \mathbb{R}_+ \text{ t.q } f(x) > s \text{ et } g(x) > t\}) \leq \min(\varphi(s), \psi(t))$, et en déduire que $\displaystyle\int_0^\infty f(x) g(x) dx \leq \int_0^\infty f^*(x) g^*(x) dx.$

Université Joseph Fourier : Examen
Calcul Intégral B

Juin 16, 2014

Durée : 3 heures. Aucun document n'est autorisée. Rédiger avec soin. Lire toutes les questions avant de commencer. *Pour chaque exercice, on demandera d'énoncer précisément chaque théorème de cours que l'on utilisera.*

Question de cours

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé et borné.

1. Donner la définition d'une *subdivision adaptée* á une fonction en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles.

2. Soit $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions en escalier.

   (a) Montrer qu'il existe une subdivision S adaptée à la fois à f et g.

   (b) En déduire que l'espace des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs réelles est une espace vectoriel.

3. (a) Soit N un entier positif, détérminer la dimension de l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots N$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1/n \\ 0, & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   (b) En déduire que la dimension de l'espace de fonctions en escalier est infini.

Exercice 1 Soit $f[0, 1] \to \mathbb{R}$ definie par $f(x) = x^3$

1. Montrer que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}(n(n+1))^2$$

2. On considere la subdivision

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{k}{n} < \ldots 1$$

   Que valent les sommes de Darboux inferieures et superieures de f relativement a cette subdivision ?

3. En deduire que f est integrable sur $[0,1]$ et determiner

$$\int_0^1 f(t)dt$$

sans utiliser la primitive de f

Exercice 2 Considérons une fonction dérivable $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ et notons, pour tout entier $n\geq 1$,

$$E_n=\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que

$$E_n=\sum_{k=1}^{n} E_{n,k}$$

où

$$E_{n,k}=\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx.$$

2. Montrer que, pour tout entier $k\in\{1,...,n\}$, on a

$$m_k\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx\leq -E_{n,k}\leq M_k\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)dx$$

où $m_k=\inf_{x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]} f'(x)$ et $M_k=\sup_{x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]} f'(x)$.

3. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} nE_n=\frac{f(0)-f(1)}{2}.$$

Exercice 3 Pour tout entier $n\geq 0$, on note $h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$h_n(x)=\int_0^n e^{-t^2}\cos(xt)dt.$$

1. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$ est convergente. On note $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$h(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt.$$

2. Nous nous intéressons maintenant à la continuité de h_n et h.
   (a) Montrer que h_n est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que h_n converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que h est continue sur $\mathbb{R}$ (on énoncera soigneusement le théorème utilisé).
3. Nous allons maintenant montrer que h est dérivable et satisfait une équation différentielle.

(a) Montrer que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que h_n' converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une certaine fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) Les questions précédentes impliquent que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que h_n' converge unitormément vers h' sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de le démontrer). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h'(x) = -\frac{x}{2}h(x)$$

4. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2/4}.$$

On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Examen du 18 juin 2014, de 9h à 12h.

Documents, calculatrices et ordinateurs ultraportables déconnectés du réseau autorisés. Ce sujet comporte 2 pages. Barème donné à titre indicatif et non contractuel.

1. Méthode de la puissance (5 points)

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -121 \\ 1 & 0 & 5 \\ -121 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

(1) Prendre un vecteur aléatoire v à coordonnées dans l'intervalle $[0,1]$, lui appliquer 29 et 30 fois la matrice, en déduire une estimation λ de la valeur propre l de M qui est la plus grande en module.

(2) Soit A une matrice de taille n qui admet une base orthonormale de vecteurs propres. On suppose qu'on a déterminé (par la méthode de la puissance) un vecteur normé v et une constante λ tels que $\|Av - \lambda v\| < \varepsilon$. Soit $(v_1, ..., v_n)$ les coordonnées de v dans la base propre orthonormale de A associée aux valeurs propres $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Calculer $\|Av - \lambda v\|$, en déduire que l'une des valeurs propres au moins vérifie $|\lambda_k - \lambda| < \varepsilon$.

(3) Peut-on appliquer le résultat du (2) à M ? Donner un encadrement de l (justifier).

(4) Proposer une méthode permettant de calculer numériquement les autres valeurs propres de M.

2. Système linéaire (2 points)

Soit M la matrice de l'exercice 1 et $b = (1,2,3)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ connu avec une précision relative de `1e-4` pour la norme euclidienne. Donner la solution x du système linéaire $Ax = b$ en arrondissant à la précision adéquate (on justifiera).

3. Méthode itérative (5 points)

On définit sur l'intervalle $[2,3]$ la fonction f par $f(x) = \cos(x) + 2x - \exp(x)$ et on cherche à résoudre $f(x) = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé.

(1) Déterminer les valeurs de λ telles que l'équation $f(x) = \lambda$ admette une solution unique sur $[2,3]$.

(2) On réécrit l'équation sous la forme $x = \frac{1}{2}(\lambda + \exp(x) - \cos(x))$, peut-on appliquer la méthode du point fixe pour la résoudre ? Si oui, donner (et justifier !) un encadrement de la solution à `1e-4` près par cette méthode pour $\lambda = -10$.

(3) Donner une suite itérative (u_n) convergeant vers la solution en utilisant la méthode de Newton, justifier la convergence pour la valeur de u_0 choisie. Déterminer la solution de l'équation $f(x) = -10$ avec une précision de `1e-8`.

(4) Écrire une fonction Xcas prenant en argument λ et renvoyant une valeur approchée de la solution à `1e-8` près de l'équation $f(x) = \lambda$ par une méthode itérative de votre choix.

4. Equations différentielles et intégration numérique (9 points)

Soit $g \in C_1(\mathbb{R})$ et $z_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & y(t) + g(t) \\ y(0) & = & z_0 \end{array} \right. \quad , \quad t \in [0,1] \, .$$

(1) Montrer que la solution exacte de $(*)$ est

$$(**) \quad y(t) = e^t \left(\int_0^t e^{-u} g(u)\, du + z_0 \right) \, .$$

(2) (a) Donner l'expression de la solution approchée de l'équation $(*)$ au temps $t = 1$, $y_{\text{rect}}(1)$, obtenue en utilisant la méthode d'intégration numérique des rectangles à gauche pour calculer l'intégrale apparaissant dans $(**)$. Vous utiliserez une subdivision de $[0,1]$ en N intervalles de même longueur.

(b) Donner une majoration de l'erreur $|y_{\text{rect}}(1) - y(1)|$ en fonction de N et de $\|g\|_\infty = \sup_{0 \le t \le 1} |g(t)|$ et $\|g'\|_\infty = \sup_{0 \le t \le 1} |g'(t)|$.

(c) Trouver une fonction $g(t) \neq 0$ telle que l'erreur soit nulle, c'est-à-dire telle que $y_{\text{rect}}(1) = y(1)$.

(3) On veut déterminer une solution approchée $y_{\text{Euler}}(1)$ de l'équation $(*)$ au temps $t = 1$ par la méthode d'Euler avec un pas constant $h = 1/N$. On note z_n, $n = 1, \cdots, N$, les solutions approchées de $y(nh)$ par cette méthode, de sorte que $y_{\text{Euler}}(1) = z_N$.

(a) Donner l'expression de z_{n+1} en fonction de z_n

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n = 1, \cdots, N$,

$$z_n = (1+h)^n z_0 + h \sum_{i=0}^{n-1} g(hi)(1+h)^{n-1-i} .$$

En déduire l'expression de $y_{\text{Euler}}(1)$.

(c) Donner une majoration de l'erreur $|y_{\text{Euler}}(1) - y(1)|$ en fonction de N, $\|g\|_\infty$, $\|g'\|_\infty$ et $|z_0|$.

(d) La méthode d'Euler donne-t-elle la solution exacte pour la fonction $g(t)$ proposée à la question 2(c) ?

(4) Déterminer numériquement, par les deux méthodes des questions 2 et 3, des solutions approchées à `1e-8` près de l'équation $(*)$ au temps $t = 1$ pour $z_0 = 1$ et $g(t) = \sqrt{t}$.