Examen d'algèbre du 18 juin 2012, durée : 4h

Tous documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barême indicatif :question de cours,3 points ; exercice 1, 7 points ; exercice 2, 7 points ; exercice 3 , 3 points

Questions de cours

On considère l'anneau $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$.

1. En utilisant la division euclidienne dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$, montrer que tout idéal de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ est un idéal principal.
2. En déduire que si P est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ alors l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par P est un idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1 :

1. Quelle est la décomposition du polynôme $X^4 - 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
2. Soit I l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par le polynôme $X^4 - 1$.
   (a) L'idéal I est-il un idéal premier de $\mathbb{R}[X]$?
   (b) L'idéal I est-il un idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$?
   (c) Quels sont les idéaux maximaux de $\mathbb{R}[X]$ qui contiennent I ?
   (d) Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{R}[X]$ qui contiennent I ?
3. On considère l'anneaux quotient $A = \mathbb{R}[X]/I$. L'anneau A est-il intègre ?
4. (a) Montrer que les polynômes $X^2 - 5$ et $X^4 - 1$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Trouver des polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $U(X^2-5)+V(X^4-1) = 1$.
   (c) Montrer que $\overline{X^2 - 5}$ est un élément inversible de l'anneau A et donner son inverse.
   (d) Quel est l'idéal engendré par $\overline{X^2 - 5}$ dans A ?
5. Quels sont les idéaux maximaux de l'anneau A ?

Exercice 2 :

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les points $o = (0,0,0)$, $a = (2,0,0)$, $b = (0,3,0)$, $c = (-2,0,0)$, $d = (0,-3,0)$, $e = (0,0,1)$, $f = (0,0,-1)$. On note G le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^3)$ formé des isométries de $\mathbb{R}^3$ qui laissent l'ensemble $\{a,b,c,d,e,f\}$ globalement invariant.

1. Montrer que la réflexion s par rapport au plan $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ appartient à G.
2. Le groupe G agit sur l'ensemble $\{a,b,c,d,e,f\}$. Quelle est l'orbite du point a ?
3. Quelles sont les rotations d'axe (oa) qui appartiennent à G ?
4. On note $Stab(a)$ le stabilisateur de a sous l'action de G, $S^+ = Stab(a) \cap O^+(\mathbb{R}^3)$, $S^- = Stab(a) \cap O^-(\mathbb{R}^3)$. Quels sont les éléments de S^+ ?
5. Montrer que $Card(S^+) = Card(S^-)$.
6. Quels sont les éléments de S^- ?
7. Que vaut $Card(G)$?
8. Combien de réflexions trouve-t-on dans le groupe G ?
9. Le groupe G contient-il une anti-rotation ?
10. On note s_o la symétrie centrale de centre o.
    Soit $\psi : Stab(a) \times \{id, s_o\} \to G$ l'application définie par $\psi((h,k)) = h \circ k$. Montrer que ψ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 3 :

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. On note $v = 2e_1 - e_2$. Calculer les polynômes minimaux μ_{f,e_1} et $\mu_{f,v}$ associés aux vecteurs e_1 et v. (ils sont de degré 2)
2. En déduire le polynôme minimal μ_f et le polynôme caractéristique χ_f de f.
3. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle le matrice de f est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Examen d'algèbre du 3 janvier 2012.

Tous documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barême indicatif :
question de cours : 2 points, exercice 1 : 2 points, exercice 2 : 8 points, exercice 3 : 8 points

Questions de cours

1. Soit A un anneau intègre , quand dit-on qu'un élément x de A est irréductible ?
2. Soit K un corps , E un espace vectoriel de dimension finie n sur K et f un endomorphisme de E.
   (a) Donner la définition du polynôme minimal μ_f de f.
   (b) Soit v un vecteur de E donner la définition du polynôme minimal $\mu_{f,v}$ de f associé au vecteur v.
   (c) Montrer que pour tout vecteur v de E le polynôme $\mu_{f,v}$ divise μ_f dans $K[X]$.
   (d) Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Montrer que le polynôme μ_f est le PPCM des polynômes $\mu_{f,e_1}, ..., \mu_{f,e_n}$.

Exercice 1 :

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer μ_{f,e_1} .
2. En déduire μ_f et χ_f.
3. Calculer le polynôme dérivé χ'_f.
4. Calculer le PGCD des polynômes χ_f et χ'_f.
5. En déduire que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exercice 2 :

On considère l'ensemble E formé des 6 points $A_1 = (1,0,1)$, $A_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, $A_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, $B_1 = (1,0,-1)$, $B_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$, $B_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.
On note G le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^3)$ formé des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$ qui laissent l'ensemble E globalement invariant. On pourra remarquer que les triangles $[A_1; A_2; A_3]$ et $[B_1; B_2; B_3]$ sont des triangles équilatéraux dans des plans parallèles au plan $P = Vect < (1,0,0),(0,1,0) >$ et que le plan P est orthogonal aux droites $d_1 = (A_1B_1)$, $d_2 = (A_2B_2)$ et $d_3 = (A_3B_3)$ qui ont toutes les trois la même direction $Vect < (0,0,1) >$.

1. Montrer que la réflexion s par rapport à P appartient à G.
2. Montrer que le plan médiateur du segment $[A_2; A_3]$ est aussi celui du segment $[B_2; B_3]$ et qu'il contient la droite d_1. En déduire que la réflexion σ_1 qui échange A_2 et A_3 appartient à G.
3. Toute isométrie de G envoie une arète $[A_i; B_i]$ sur un arète $[A_j; B_j]$ puisque ce sont les seuls segments de longueur 2 qui joignent deux points de E. On a donc une action de G sur l'ensemble $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ donnée par $g.d_i = g(d_i)$.
   (a) Quelle est l'orbite $G.d_1$ sous cette action ?
   (b) On note F_1 l'ensemble des éléments de G qui fixent à la fois A_1 et B_1. On note C_1 l'ensemble des éléments de G qui échangent A_1 et B_1.
      i. Montrer que $Stab(d_1) = F_1 \cup C_1$.
      ii. Déterminer F_1.
      iii. F_1 est-il un sous-groupe de G ?
      iv. C_1 est-il un sous-groupe de G ?
      v. Montrer que $|F_1| = |C_1|$.
      vi. Montrer que $Stab(d_1)$ contient exactement 4 éléments et donner leur nature géométrique.
   (c) Quel est le cardinal de G ?
   (d) Soit T_2 l'ensemble des éléments de G qui envoient la droite d_1 sur la droite d_2.
      i. L'ensemble T_2 est-il un sous-groupe de G ?
      ii. Etablir une bijection entre T_2 et $Stab(d_1)$.
   (e) L'action de G sur $D = \{d_1, d_2, d_3\}$ induit un morphisme de groupe ϕ de G dans S_3.
      i. Décrire ϕ.
      ii. Montrer que les transpositions de S_3 appartiennent à l'image de ϕ.

iii. En déduire que ϕ est surjectif.

iv. Déterminer $Ker(\phi)$.

4. Soit H le sous-groupe de G formé des isométries qui laissent l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3\}$ globalement invariant.
   (a) Montrer que $G = H \cup sH$.
   (b) Montrer que tous les éléments de G laissent $P = Vect < (1,0,0), (0,1,0) >$ globalement invariant.
   (c) Montrer que pour tout $g \in G$ et pour tout $v \in P$ on a $gsg^{-1}(v) = v$.
   (d) En déduire que pour tout $g \in G$ on a $gs = sg$.
   (e) Soit $\psi : H \times \{id, s\} \to G$ l'application définie par $\psi((h,k)) = hk$. Montrer que ψ est un isomorphisme de groupes.

Exercice 3 :

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On rappelle
-que l'on peut effectuer la division euclidienne de tout polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ par un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ dont le coefficient dominant est 1.
-que l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ est factoriel.

1. Soit $f : \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ l'application qui au polynôme $\sum_{i=0}^{d} a_i X_i$ associe le polynôme $\sum_{i=0}^{d} \overline{a_i} X_i$.
   (a) Montrer que f est un morphisme d'anneaux.
   (b) Quel est le noyau de f ?
   (c) Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X_i$ un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ dont le coefficient dominant a_d est égal à 1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?
      i. Si $f(P)$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.
      ii. Si P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ alors $f(P)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.
2. Quel est le noyau du morphisme d'évaluation $e : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{R}$ qui à un polynôme P associe $P(\sqrt{5})$?
3. Soit $g : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{C}$ le morphisme d'évaluation qui à un polynôme P associe $P(e^{\frac{i\pi}{3}})$.
   (a) Montrer que le polynôme $X^6 - 1$ appartient au noyau de g.
   (b) Quelle est la décomposition de $X^6 - 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$?

   (c) Quelle est la décomposition de $X^6 - 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$?
   (d) Quel est le noyau de g ?
4. Les idéaux suivants de $\mathbb{Z}[X]$ sont-ils premiers ?
   (a) L'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par 4
   (b) L'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par 2
   (c) L'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par $X^2 - 5$
   (d) L'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par $X^2 - 1$
   (e) L'idéal de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par $X^2 - X + 1$
5. Soit $\psi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le morphisme d'anneaux qui à un polynôme P associe $(P(\sqrt{5}), P(e^{\frac{i\pi}{3}}))$. Quel est le noyau de ψ ?
6. On considère l'idéal I de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par 2 et $X^2 - 5$.
   (a) Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/I$ contient exactement 4 éléments.
   (b) Etablir la table de multiplication dans $\mathbb{Z}[X]/I$.
   (c) L'idéal I est-il maximal ?
7. On considère l'idéal J de $\mathbb{Z}[X]$ engendré par 2 et $X^2 - X + 1$.
   (a) Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/J$ contient exactement 4 éléments.
   (b) Etablir la table de multiplication dans $\mathbb{Z}[X]/J$.
   (c) L'idéal J est-il maximal ?

EXAMEN GGMAT35c

19 juin 2012

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 4h

Exercice 1 (Questions de cours) (**4 points**)

1. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Montrer que la norme $\|.\|_\infty$ est plus fine que la norme $\|.\|$:
$$\exists C > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n \quad \|u\| \leq C\|u\|_\infty.$$
2. (a) Caractériser une partie fermée d'un espace vectoriel normé à l'aide des suites.
   (b) Montrer que dans un espace vectoriel normé toute partie compacte est bornée et fermée.
3. Enoncer le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité fermée.
4. Enoncer le théorème du point fixe.

Exercice 2 (3 points)
On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne. On définit :
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq y \leq x^2\}.$$
Déterminer si A est ouvert, fermé, compact, connexe par arcs. Décrire l'intérieur de A^o de A. Justifier vos réponses.

Exercice 3 (4 points)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On rappelle que le graphe de f est l'ensemble $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = f(x)\}$ muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que Γ_f est connexe par arcs.
2. Montrer que f a un point fixe si et seulement si Γ_f rencontre la bisectrice $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. Expliciter (en justifiant) les composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$.
4. Montrer que si f n'a pas de point fixe, alors l'application $id_{\mathbb{R}} - f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de signe constant. En déduire qu'une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ a des points fixes.

T.S.V.P.

Exercice 4 (3 points)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $P \in E$, on pose

$$\|P\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|, \quad \|P\|_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} (e^{-|t|}|P(t)|)$$

1. Montrer que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont des normes sur E.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $P \in E$, $\|P\|_1 \leq C\|P\|_2$.
3. Soit $n \geq 0$ un entier. Calculer $\|P\|_1$ et $\|P\|_2$ pour $P(t) = t^n$. En déduire que les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 5 (6 points)
On munit l'espace $E = C([0,1];\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On note F le sous-espace vectoriel de E des fonctions $f \in E$ qui sont dérivables et à dérivée continue sur $[0,1]$.

1. Montrer que la forme linéaire $L : F \to \mathbb{R}$ de F définie par $L(f) = f'(1/2)$ n'est pas continue pour la topologie de la norme $\|.\|_\infty$ sur F. (Indication : on pourra considérer la suite de fonctions $f_n : x \mapsto \sin(2\pi n x)$).
2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions de E définie par $f_n(x) = \sqrt{(x-1/2)^2 + \frac{1}{n^2}}$. Montrer que cette suite converge dans E vers une fonction que l'on déterminera.
3. Montrer que F n'est pas complet pour la norme $\|.\|_\infty$.
4. On munit F de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que F est un espace de Banach pour cette norme.
5. Soit $i : (F, \|.\|) \to (F, \|.\|_\infty)$ l'application identique définie par $i(f) = f$. Montrer que i est continue et calculer sa norme triple. Montrer que l'inverse de $i : (F, \|.\|_\infty) \to (F, \|.\|)$ n'est pas continue.

Université Joseph Fourier L3 - Parcours B
Année universitaire 2011/2012

EXAMEN GGMAT35c

4 janvier 2012

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 4h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Rappeler la définition d'un ensemble convexe d'un espace vectoriel normé. Montrer que tout ensemble convexe est connexe par arcs.
2. Montrer que dans un espace vectoriel normé de dimension finie toute partie bornée et fermée est compacte.
3. (a) Citer le théorème de Stone-Weierstrass.
   (b) Montrer en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass que toute fonction $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.
4. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que toute suite de Cauchy d'éléments de E, qui admet une valeur d'adhérence, converge. En déduire que toute partie compacte d'un espace vectoriel normé est complète.

Exercice 2

On prendra soin de justifier toute affirmation le plus soigneusement possible.
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Soient A et B deux parties de E. Montrer que
$$(A \cap B)^o = A^o \cap B^o, \quad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}.$$
Donner un exemple d'un espace vectoriel normé E et de deux parties A et B de E telles que $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|.\|_2$. On s'intéresse dans cette partie à l'ensemble
$$A := B((0,0),1) \cap \overline{B}((1,0),1).$$
Dans cette partie on pourra utiliser les résultats du cours sur l'intérieur de la boule fermée etc.
   (a) La partie A est elle ouverte, fermée ? Justifier la réponse.
   (b) Décrire l'adhérence $\bar{A}$ et l'intérieur A^o de A. Justifier la réponse.
   (c) Est-ce que A est convexe, connexe par arcs ? Justifier la réponse.

T.S.V.P.

Exercice 3

Soit $E = C([-1,1];\mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|.$$

Pour une fonction continue $p : [-1,1] \to \mathbb{R}$ on note $N_p(f) = \|pf\|_\infty$.

1. Soit $p_1(x) := 1 + |x|$. Montrer que $N_{p_1}(.)$ définit une norme sur E qui est équivalente à la norme $\|.\|_\infty$.

2. Soit $p_2(x) = x$.

   (a) Montrer que $N_{p_2}(.)$ définit une norme sur E.

   (b) Montrer que $\|.\|_\infty$ est plus fine que $N_{p_2}(.)$:

   $$\exists \alpha > 0, \quad \forall f \in E, \quad N_{p_2}(f) \leq \alpha \|f\|_\infty.$$

   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $f_n \in C([-1,1];\mathbb{R})$ par

   $$f_n(x) = \begin{cases} 1 - (n+1)|x| & |x| \leq \frac{1}{n+1}, \\ 0 & |x| > \frac{1}{n+1}. \end{cases}$$

   Montrer que $N_{p_2}(f_n) \leq \frac{1}{n+1}$.

   (d) En déduire que les normes N_{p_2} et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

3. On définit

   $$p_3(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x & x > 0. \end{cases}$$

   Montrer que $N_{p_3}(.)$ ne définit pas une norme sur E.

Exercice 4

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ on pose $\|P\| = \max_{i\in\{0,\dots,n\}} |a_i|$.

1. Montrer que $\|.\|$ définit une norme.

2. On considère l'application

   $$L : \begin{array}{rcl} (\mathbb{R}[X], \|.\|) & \to & (\mathbb{R}[X], \|.\|) \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

   où P' désigne la dérivée de P.

   (a) Montrer que L est linéaire.

   (b) Calculer $\|L(X^n)\|$ pour tous les monômes X^n, $n \in \mathbb{N}$. En déduire que L n'est pas continue.

   (c) Soit $\mathbb{R}[X]_n$ le sous-espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que L envoie $\mathbb{R}[X]_n$ dans lui-même. Montrer que $L|_{\mathbb{R}[X]_n}$ est continue et calculer sa norme triple.

   (d) Est-ce qu'il existe une application linéaire $T : \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_n$ qui n'est pas continue ?

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel normé et X une partie compacte de E. Soit $f : X \to X$ une application expansive :

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|. \tag{1}$$

On pose $f^n = f \circ ... \circ f$ (n fois) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^0 = id_X$.

1. Soient $x, y \in X$.

   (a) Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(f^{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f^{\varphi(n)}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.

   (b) En itérant (1) montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ on a

   $$\|x - f^p(x)\| \leq \|f^{\varphi(n)}(x) - f^{\varphi(n)+p}(x)\|.$$

   (c) En utilisant le fait que $(f^{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f^{\varphi(n)}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ soient de Cauchy et en choisissant p de façon appropriée, déduire que

   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists p \in \mathbb{N}^*, \quad \|x - f^p(x)\| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|y - f^p(y)\| \leq \varepsilon. \tag{2}$$

   (d) Montrer que f est une isométrie de X dans X :

   $$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

   et en déduire que f est continue.

2. (a) Déduire de (2) que pour tout $x \in X$ on a $d(x, f(X)) = 0$.

   (b) Montrer que $f(X)$ est compact. En déduire que $f(X)$ est un fermé. Déduire ensuite de 2. (a) que f est surjective.

L3 de Mathématiques, Calcul Intégral B (MAT 366)

Examen du 15 mai 2012, 9h-12h(13h)

Les documents, téléphones portables, ordinateurs et calculatrices sont interdits.

Sauf pour la question de cours qui restera sur 5 points, le barème approximatif pourra être modifié à la lecture des copies. Les poids respectifs des exercices 2, 3 et 4 seront néanmoins respectés.

On rappelle que l'application d'un théorème du cours nécessite la vérification de ses hypothèses, ce qui sera systématiquement évalué ici. De manière générale, ce sera le cas pour toutes les étapes des raisonnements effectués.

Exercice 1 (Question de cours, 5 pts)
Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$ et φ la fonction définie sur $[a,b]$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$. Sous quelle(s) hypothèse(s) peut-on dire que φ est continue, respectivement dérivable, en un point donné $x_0 \in]a,b[$? Donner des démonstrations soignées des deux résultats.

Exercice 2 (Calcul de l'intégrale de Gauss, 7 pts)
1. Montrer que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$ et $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ dt$ sont deux nombres réels bien définis et exprimer simplement l'un en fonction de l'autre.
2.
   a. Pour $n \in \mathbb{N}$, on donne la fonction F_n par $F_n(x) = \displaystyle\int_0^n \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\ dt$. Montrer que ces fonctions sont définies et continues sur $[0,+\infty[$.
   b. En déduire, **sans utiliser** le théorème de continuité sous le signe somme, qu'il en est de même pour la fonction F donnée par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\ dt.$
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, **en utilisant** le théorème de dérivabilité sous le signe somme conséquence du théorème de convergence dominée. (On pourra considérer des intervalles $]a,+\infty[$, $a>0$.)
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty, n\in\mathbb{N}} F(n) = 0$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
5. Montrer que : $\forall x > 0, F'(x) - F(x) = -\frac{J}{\sqrt{x}}$.
6. À l'aide des deux questions précédentes, montrer que : $\forall x > 0, F(x) = Je^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ dt.$
7. En déduire les valeurs de J et K.

Exercice 3 (9 pts) On cherche ici à calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\cos\theta}^1 \frac{\rho}{(1+\rho^2)^n}\ d\rho \right) d\theta.$
1. Calculer I_0.
2. On considère ici le cas $n \geq 2$.
   a. On pose, pour $m \geq 1$, $J_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\cos^2\theta)^m}.$
   Montrer que pour $n \geq 2$, $I_n = \dfrac{1}{2n-2}\left(J_{n-1} - \dfrac{\pi}{2^n}\right).$

b. En utilisant les règles de Bioche, montrer que pour $m \geq 1$, $J_m = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)^{m-1}}{(2+t^2)^m}\, dt$.
Pourquoi ces dernières intégrales sont-elles convergentes ?

c. On pose, pour $m \geq 1$, $K_m = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(2+t^2)^m}$. Justifier la convergence de ces intégrales et montrer que pour $m \geq 1$, $K_{m+1} = \dfrac{2m-1}{4m} K_m$ (on pourra intégrer par parties).

d. Calculer K_1 et en déduire que pour $m \geq 1$, $K_m = \dfrac{(2m-2)!}{8^{m-1}((m-1)!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

e. Montrer que pour $m \geq 1$, $J_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} (-1)^k K_{k+1}$ et calculer les valeurs de I_2, I_3 et I_4.

3. On traite ici le cas $n = 1$.

a. Exprimer I_1 en fonction de $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos^2\theta)\, d\theta$.

b. Montrer que la fonction G définie par $G(t) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+t\cos^2\theta)\, d\theta$ est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.

c. Montrer que pour $t \in]-1,+\infty[$, $G'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+t+u^2)}$.

d. Décomposer, pour $t \in]-1,+\infty[$ fixé, la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(1+X)((1+t)+X)}$ en éléments simples et en déduire que

$$\forall t \in]-1,+\infty[, \quad G'(t) = \frac{\pi(\sqrt{1+t}-1)}{2t\sqrt{1+t}}.$$

e. En déduire une formule pour G ainsi que la valeur de I_1.

Exercice 4 (4 pts)

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, on considère l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.

1. Caractériser et dessiner l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq -x\}$, puis donner son aire sans calcul.
2. Caractériser et dessiner A et donner son aire sans calcul d'intégrale.
3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\iint_A \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^n}$ en fonction des intégrales de l'exercice précédent.
Remarquer qu'on retrouve ainsi l'aire de A.

Calcul différentiel

Licence 3 (parcours B) Université Joseph Fourier, Mai 2012

Pas de document autorisé

Examen, 3 heures

Exercice 1 *[6 points]*

On considère un parametre $a > 0$, et on pose $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 + \dfrac{a}{xy} \end{array} \right.$

1. Calculer la différentielle de f en tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
2. Determiner les points critiques de f dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
3. Etudier les extrema locaux de f sur ce domaine.
4. Etudier les extrema globaux de f. Est-ce que f est majorée ?
5. Determiner le maximum de f sur $H = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ xy = 1\}$.

Exercice 2 *[10 points]*

Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(\left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2} \right), \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} \right) \right) \end{array} \right.$

1. Calculer la norme euclidienne de $\varphi(x, y)$ en fonction de celle de (x, y).
2. Determiner l'image de φ.
3. Calculer la différentielle de φ en chaque point.
4. (a) Montrer qu'autour de tout point de U, φ est un difféomorphisme local.
   (b) Montrer que φ est un difféomorphisme global sur son image. Quel est le difféomorphisme réciproque ?
5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On pose $g = f \circ \varphi$
   (a) Calculer la différentielle de g en fonction des dérivées partielles de f.
   (b) Montrer que g est constante si et seulement si f est constante.
6. On se demande s'il existe $F : U \to \mathbb{R}$ telle que $dF = \varphi$; élucider cela est le but des questions suivantes.
   (a) Justifier que l'on puisse identifier $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^2$, et qu'ainsi la question de l'existence de F a un sens.

(b) Si une telle fonction F existe, montrer que

$$F(1,1) - F(1,-1) = \int_{-1}^{1} (\varphi(1,t)) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

(on pourra utiliser la définition de dérivée partielle comme dérivée d'une certaine fonction d'une seule variable).

(c) Conclure, en considerant l'operation

$$\begin{aligned} (F(1,1) - F(1,-1)) \quad + \quad & (F(-1,1) - F(1,1)) \quad + \\ & (F(-1,-1) - F(-1,1)) \quad + \quad (F(1,-1) - F(-1,-1)) \, . \end{aligned}$$

Exercice 3 *[6 points]*

On fixe une fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, qui est *paire* et (2π)-periodique.
On considère l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : \qquad\qquad y'' - q \times y = 0$$

1. En introduisant $z = y'$ donner une equation différentielle linéaire matricielle d'ordre 1 dont la résolution équivaut à celle de $\mathcal{E}$.
2. Verifier que si y est solution, alors $w(t) = -y(-t)$ est aussi solution.
3. En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, montrer qu'une solution y est une fonction impaire si et seulement si $y(0) = 0$.
4. Prouver que l'espace des solutions de $\mathcal{E}$ ne peut pas admettre une base de solutions constituée de fonctions impaires.
5. Prouver que l'espace des solutions de $\mathcal{E}$ ne peut pas admettre une base de solutions constituée de fonctions paires.
6. Montrer que le Wronskien du système est constant.

Calcul différentiel

Licence 3 (parcours B) Université Joseph Fourier, Mai 2012

Pas de document autorisé

Examen, 3 heures

Exercice 1 *[sur au moins 10 points]*

Soit une application de classe $\mathcal{C}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$. On dit que f est **harmonique** si $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) = 0$ pour tout x, y.

1. Montrer que les fonctions suivantes sont harmoniques.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & e^{x+iy} \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & (x+iy)^n \end{array} \right. \quad (n \in \mathbb{N})$$

2. Soit $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $h : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = v\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
   (a) Montrer que h est harmonique si et seulement si v vérifie l'équation différentielle
   $$v'' + \frac{2t}{1+t^2} v' = 0.$$
   (b) Trouver les fonctions v rendant h harmonique.
3. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et D_R le disque **fermé** de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$ et de rayon $R > 0$; $D_R = \{(x,y), x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
   Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\phi_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_p(x,y) = \phi(x,y) + \dfrac{x^2+y^2}{p}$.
   (a) Justifier que ϕ_p admet un maximum sur D_R, c'est à dire que :
   $$\exists (a_p, b_p) \in D_R, \qquad \phi_p(a_p, b_p) = \max_{(x,y) \in D_R} \phi_p(x,y)$$
   (b) Montrer que si le point (a_p, b_p) appartient à $\overset{\circ}{D}_R$, l'interieur du disque, alors, en ce point, on a : $\dfrac{\partial^2 \phi_p}{(\partial x)^2}(a_p, b_p) \leq 0$ et $\dfrac{\partial^2 \phi_p}{(\partial y)^2}(a_p, b_p) \leq 0$. (On pourra utiliser un DL à l'ordre 2, et donner les caracterisiques de $d^2\phi_p$ que la situation impose).
4. Dans cette question, on suppose ϕ **harmonique**.
   (a) Montrer que le point (a_p, b_p) est sur le cercle $C_R = \{(x,y), x^2 + y^2 = R^2\}$.
   (b) Montrer que $\displaystyle\sup_{(x,y) \in D_R} \phi(x,y)$ est atteint en un point du cercle C_R.
5. En déduire que si deux fonctions harmoniques définies sur le plan sont égales le long d'un cercle C du plan, alors elles sont égales sur le disque bordé par ce cercle.

Tournez S.V.P

Exercice 2 *[sur au moins 4 points]*

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times x_2 \cdots \times x_n \end{array} \right.$

1. Soit $s > 0$. On pose $\Gamma = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = s \right\}$

   Trouver le maximum de f en restriction à Γ, c'est à dire $\sup\{f(X), X \in \Gamma\}$.
2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique ci dessous (qui dit que la "moyenne géométrique" est toujours inférieure à la moyenne arithmetique)

$$\forall x_1, \ldots, x_n, \qquad \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exercice 3 *[sur au moins 6 points]*

On considère une courbe paramétrée $\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc}]a,b[& \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \end{array} \right.$, paramétrée par longueur d'arc.

On suppose qu'il existe $s_0 \in]a,b[$ tel que $\|\alpha(s_0)\|$ est maximal : $\|\alpha(s_0)\| = \max_{s \in]0,1[} \|\alpha(s)\|$.

1. En considérant un développement limité de α en s_0, montrer que la direction de la tangente à la courbe en s_0 est donnée par $\vec{v} = \begin{pmatrix} y(s_0) \\ -x(s_0) \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la courbure à la courbe en s_0 est au moins $\dfrac{1}{\|\alpha(s_0)\|}$.
3. On suppose cette fois que $\|\alpha(s)\|$ est constant (la courbe est donc tracée sur une sphère).
   (a) En dérivant l'indentité $\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = cste$ trois fois, montrer que

   $$\alpha(s) = -R(s)\nu(s) + R'(s)T(s)\beta(s)$$

   pour $\nu(s)$ le vecteur normal principal, et $\beta(s)$ le vecteur binormal.

   (b) Montrer que si l'on note $\kappa(s)$ la courbure, $\tau(s)$ la torsion, et $R = \dfrac{1}{\kappa(s)}$ et $T = \dfrac{1}{\tau(s)}$ alors on a

   $$R^2 + (R')^2 T^2 = constante$$

Fin du sujet.

Contrôle continu du 26/09/2011

durée : deux heures

Aucun document n'est admis.

Exercice 1 (Questions de cours).

1. Donner la définition d'un idéal d'un anneau commutatif.
2. Soit A un anneau commutatif, I un idéal de A. Quand I est-il un sous-anneau de A ?
3. Soient A, B des anneaux commutatifs, I un idéal de A, J un idéal de B, et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A. $f(I)$ est-il toujours un idéal de B ? Sinon donner une condition suffisante pour que $f(I)$ soit un idéal de B.

Exercice 2 (Les groupes dont le carré de chaque élément égale le neutre). On note $(G, .)$ un groupe fini, e son élément neutre. On suppose que pout tout élément $g \in G$, on a l'égalité $g^2 = e$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Soit g_0 un élément non neutre de G. On note $H = G/ < g_0 >$. Montrer que pour tout élément $h \in H$ on a l'égalité $h^2 = e_H$ où e_H est l'élément neutre de H.
3. En déduire, par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $\mathrm{card}(G) \leqslant n$ alors $\mathrm{card}(G)$ est une puissance de 2.

Exercice 3 (Les groupes d'ordre 6). On note $(G, .)$ un groupe d'ordre 6, e son élément neutre.

1. Quels sont les ordres possibles des éléments de G ?
2. En se servant de l'exercice précédent, montrer que G contient au moins un élément dont l'ordre est supérieur ou égal à 3.
3. En déduire que G contient au moins un élément dont l'ordre est égal à 3. On choisit un de ces éléments qu'on notera a.
4. On note H le sous-groupe de G engendré par a. On choisit un élément $b \in G \backslash H$. Montrer que $bH \cap H = \phi$ et que $bH \cup H = G$. En déduire une liste des éléments de G.
5. Montrer que $b^2 \in H$.
6. Dans cette question uniquement, on suppose que $b^2 = a$ ou $b^2 = a^2$. Quel est l'ordre de b ? En déduire que G est cyclique.
7. Dans cette question uniquement, on suppose que $ab = ba$ et $b^2 = e$. Quel est l'ordre de ab ? En déduire que G est cyclique.
8. Désormais on suppose que G n'est pas cyclique. Montrer que $b^2 = e$ et $ab = ba^2$.
9. Exprimer le produit $(b^s a^t)(b^{s'} a^{t'})$ où $s, t \in \mathbb{N}$ sous la forme $b^m a^n$ où $m, n \in \mathbb{N}$. Indication : on peut distinguer les cas selon la parité de s'.
10. On note $A = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{-1} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$. Calculer AB et BA^2.
11. On note G' le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par A et B. Montrer que G et G' sont isomorphes.
12. On note $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = AP_1$, et $P_3 = AP_2$. Monter que si $D \in G'$ et $P \in \{P_1, P_2, P_3\}$, alors $DP \in \{P_1, P_2, P_3\}$. On définit $\phi : G' \to S_{\{P_1,P_2,P_3\}}$ par $\phi(D)(P_i) = DP_i$. Montrer que ϕ est un isomorphisme de groupes. En déduire que G' (et donc G aussi) est isomorphe à $(S_{\{P_1,P_2,P_3\}}, \circ)$.
13. On note $U = \{z; z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}, U_{(n)} = \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1\}$ où $n \in \mathbb{N}$. Montrer que Uet $U_{(n)}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{C}^*$ et que $U_{(n)} \subset U$. En déduire que si $\phi : G \to \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes, on a $\phi(G) \subset U$.
14. Soit $\phi : G \to U$ un morphisme de groupes. Montrer que $\phi(a) = 1$ et $\phi(b) = \pm 1$. Déterminer tous les morphismes de groupes de G dans U.

Exercice 4 (Les racines de l'unité). On utilise les notations de l'exercice 3, question 13. Montrer que $U_{(n)} \times U_{(m)}$ est isomorphe à $U_{(nm)}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ si et seulement si n et m sont premiers entre eux.

Université Joseph Fourier	2011-2012
Licence 3	Parcours A

Algèbre

Contrôle continu du 17/10/2011

Les 4 exercices sont indépendants hormis la question 4 de l'exercice 2 qui utilise les résultats de l'exercice 1.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Le barême est donné à titre indicatif.
Il faut rendre deux copies séparées, une pour les exercices 1 et 2, une pour les exercices 3 et 4.

Exercice 1 (Sous-groupes d'indice 2). [Environ 4 points] Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini d'ordre $2n$, et H un sous-groupe d'ordre n.

1. Montrer que pour tout $b \in G \setminus H$, $bH = G \setminus H = Hb$. En déduire que le produit (dans n'importe quel ordre) d'un élément de H par un élément de $G \setminus H$ est toujours dans $G \setminus H$ et que le produit de deux éléments de $G \setminus H$ est toujours dans H.
2. En déduire que pour tout $x \in G$ et $y \in H$, $xyx^{-1} \in H$ et montrer que l'application $\tau_x : H \to H$ définie par $\tau_x(y) = xyx^{-1}$ est un automorphisme de groupe. Montrer en particulier que xyx^{-1} a même ordre que y.

Exercice 2 (Les groupes d'ordre 8). [Environ 10 points] Soit G un groupe d'ordre 8, de neutre e.

1. Quels sont les ordres possibles des éléments de G ? Quels sont les éléments d'ordre 1 ?
2. Si G possède un élément d'ordre 8, à quel groupe bien connu est-il isomorphe ?
3. Dans cette question, on suppose que tous les éléments de G autres que e sont d'ordre 2. Montrer que G est abélien. On choisit g_1 un élément non neutre de G et g_2 un élément de $G \setminus \langle g_1 \rangle$. Donner la liste des éléments de $\langle g_1, g_2 \rangle$. En déduire que $G \neq \langle g_1, g_2 \rangle$. Soit g_3 un élément de $G \setminus \langle g_1, g_2 \rangle$. Montrer que l'application $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1x_2x_3$ de $\langle g_1 \rangle \times \langle g_2 \rangle \times \langle g_3 \rangle$ dans G est un isomorphisme de groupes. En déduire que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   Désormais on suppose que G contient au moins un élément d'ordre 4 et aucun d'ordre 8. On fixe un élément a d'ordre 4 dans G. On note H le sous-groupe de G engendré par a. On choisit un élément $b \in G \setminus H$.
4. À l'aide des résultats de l'exercice 1, montrer que $b^2 \in H$ et que $bab^{-1} \in H$. En regardant l'ordre de ces éléments, montrer que $b^2 \in \{e, a^2\}$ et que $bab^{-1} \in \{a, a^3\}$. Montrer aussi que $G = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.
5. Dans cette question uniquement, on suppose que $bab^{-1} = a$ et $b^2 = e$. Montrer que G est isomorphe à $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ et à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (on pourra considérer l'application $(x, y) \mapsto xy$ de $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ dans G).
6. Dans cette question uniquement, on suppose que $bab^{-1} = a$ et $b^2 = a^2$. On pose $c = ab$. Montrer que $cac^{-1} = a$ et que $c^2 = e$. Qu'en déduit-on sur G ?
7. Dans cette question, on suppose que $bab^{-1} = a^3$. En déduire que $ba = a^3b$, $ba^2 = a^2b$ et $ba^3 = ab$. À l'aide de ces relations, compléter aux trois quarts la table du groupe. En déduire les deux tables possibles suivant que $b^2 = e$ ou $b^2 = a^2$.
8. On note
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$
   Montrer que $A, B, C \in GL_2(\mathbb{C})$. Calculer A^2, B^2, AB, BA^3, AC, CA^3. En déduire que les sous-groupes $\langle A, B \rangle$ et $\langle A, C \rangle$ de $GL_2(\mathbb{C})$ sont d'ordre 8 et ont des tables semblables aux tables obtenues à la question 7.

9. Combien y a-t-il de groupes d'ordre 8 à isomorphisme près ?

Exercice 3 (Les carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). [Environ 10 points] Soit p un nombre premier impair. On pose $p = 2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Pour $a \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{a}$ la classe de a dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On note K le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $K^* = K \setminus \{\overline{0}\}$. On rappelle que tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ à coefficients dans K a au plus n racines. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k l'application $x \mapsto x^k$ de K^* dans K^*. L'objet de l'exercice est d'étudier l'ensemble $H = \operatorname{Im} f_2$ formé des carrés des éléments de K^*.

1. Montrer que f_k est un endomorphisme du groupe $(K^*, \times)$. Quelle structure ont $\operatorname{Ker} f_k$ et $\operatorname{Im} f_k$ et que sait-on de leurs cardinaux ?
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f_q$ est d'ordre au plus q (indication : introduire le polynôme $X^q - \overline{1}$).
3. Montrer que $\operatorname{Ker} f_2 = \{-\overline{1}, \overline{1}\}$. En déduire le cardinal de $H = \operatorname{Im} f_2$.
4. Montrer que $H = \operatorname{Ker} f_q$ (on commencera par établir une inclusion).
5. Montrer que $\operatorname{Im} f_q = \operatorname{Ker} f_2 = \{-\overline{1}, \overline{1}\}$. À quel groupe est isomorphe K^*/H ?
6. Pour $x \in K^*$, donner la valeur de $f_q(x)$ suivant que x est ou non dans H. En déduire que $-\overline{1}$ est dans H si et seulement si q est pair.
7. Dans cette question, on suppose que q est pair. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupe g de H dans K^* tel que pour tout $x \in H$, $f(x)^2 = x$. Montrer que si $q = 4s - 2$ avec $s \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x \in H$, $(x^s)^2 \in \{-x, x\}$.
8. Dans cette question, on suppose que q est impair et on pose $q = 2r - 1$ avec $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour chaque $x \in K^*$, la paire $\{-x, x\}$ contient un élément de H et un seul. En déduire que f_2 induit un automorphisme de H. Montrer aussi que pour tout $x \in H$, x^r est une racine carrée de x et que l'application $(\varepsilon, x) \mapsto \varepsilon x^r$ de $\{-\overline{1}, \overline{1}\} \times H$ dans K^* est un isomorphisme de groupes.
9. Montrer que le polynôme $X^4 + \overline{1}$ est composé dans $K[X]$. Indication : vérifier qu'au moins un des éléments $-\overline{1}, \overline{2}, -\overline{2}$ est dans H et remarquer que
$$X^4 + \overline{1} = (X^2 + \overline{1})^2 - \overline{2}X^2 = (X^2 - \overline{1})^2 + \overline{2}X^2.$$

Exercice 4 (Idéaux premiers entre eux). [Environ 2 points] Soient A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A.

1. Montrer que l'application $f : a \mapsto (a + I, a + J)$ de A dans $A/I \times A/J$ est un morphisme d'anneaux. Quel est son noyau ?
2. On suppose que $I + J = A$. Montrer alors que f est surjective. En déduire un isomorphisme entre $A/(I \cap J)$ et $A/I \times A/J$.

Université Joseph Fourier	2011-2012
Licence 3	Parcours A

Algèbre

Contrôle continu du 25/11/2011

Les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Un anneau et une équation diophantienne). [Environ 11 points]
Soit $A = \{u + vi\sqrt{2} : (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour $z \in A$, on note $N(z) = |z|^2 = z\overline{z}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison.
2. Montrer que N est une application de A dans $\mathbb{N}$ et un morphisme pour la multiplication.
3. Montrer que l'ensemble A^* des éléments inversibles de A est réduit à $\{-1, 1\}$.
4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $q \in A$ tel que $|z - q|^2 \leqslant 3/4$. En déduire que l'anneau est euclidien de stathme N. Quelles propriétés de l'anneau A en déduit-on ?

   On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $x^2 + 2 = y^3$. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ une solution.
5. Montrer que x est impair.
6. Soit d un PGCD dans A de $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$. Montrer que $d = 1$ ou $d = -1$. Indication : remarquer que d divise $2i\sqrt{2}$ et montrer que $N(d) = 1$.
7. On décompose $x + i\sqrt{2}$ en éléments irréductibles : $x + i\sqrt{2} = z_1^{\alpha_1} \cdots z_r^{\alpha_r}$ avec $r \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_r$ irréductibles dans A et deux-à-deux distincts, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ dans $\mathbb{N}^*$. Donner la décomposition en éléments irréductibles de $x - i\sqrt{2}$ et de $x^2 + 2$. Montrer que $z_i \neq \overline{z_j}$ quels que soient i et j. En déduire qu'il existe $w \in A$ tel que $x + i\sqrt{2} = w^3$.
8. En posant $w = u + vi\sqrt{2}$ avec $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$, déterminer les valeurs possibles de w et donner les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $x^2 + 2 = y^3$.
9. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(i\sqrt{2}) \in A$. On admet que l'application $f : P \mapsto P(i\sqrt{2})$ de $\mathbb{Z}[X]$ dans A est un morphisme d'anneaux. À l'aide d'une division euclidienne, montrer que le noyau de ce morphisme est l'idéal $(X^2 + 2)\mathbb{Z}[X]$.
10. À quoi est isomorphe le quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 2)\mathbb{Z}[X]$? L'idéal $(X^2 + 2)\mathbb{Z}[X]$ est il premier ? maximal ?

Exercice 2 (Sous-groupes de $\mathcal{S}_n$ d'indice n). [Environ 5 points]
Soit $n \geqslant 5$ un entier. Soit $G = \mathcal{S}_n$. Soit H un sous-groupe de G d'ordre $(n-1)!$. On note $E = G/H$ l'ensemble des classes à gauche modulo H. Pour $x \in G$ et $C = xH \in G/H$, on note $\phi(g)(C) = g \cdot C = gC = (gx)H$. On obtient ainsi une action de G sur E par translation à gauche. Autrement dit, ϕ est un morphisme de $(G, \circ)$ dans $(\mathcal{S}(E), \circ)$.

1. Quel est l'ordre de $(\mathcal{S}(E), \circ)$?
2. Montrer que $\operatorname{Ker} \phi \subset H$.
3. En admettant le fait que les sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_n$ sont $\{id\}$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$, en déduire que φ est un isomorphisme de $(G, \circ)$ sur $(\mathcal{S}(E), \circ)$.
4. Montrer que $\phi(H) = \{s \in \mathcal{S}(E) : s(H) = H\}$. En déduire que H est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.

Suite au dos.

Exercice 3 (Conjugués et normalisateur d'un sous-groupe). [Environ 4 points]

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On appelle normalisateur de H dans G l'ensemble

$$N = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

1. Montrer que N est un sous-groupe de G contenant H, et que N est le plus grand sous-groupe de G dans lequel H est distingué.
2. Montrer que pour tout a et b dans G,

   $$aHa^{-1} = bHb^{-1} \iff a^{-1}b \in N.$$

   En déduire que le nombre de conjugués de H dans G est le nombre de classes à gauche de G modulo N.
3. On suppose que G est fini. Montrer que $[G : N]$ divise $[G : H]$. Montrer que si H est strictement inclus dans G, l'union des gHg^{-1} pour $g \in G$ est strictement incluse dans G. On introduira un système S de représentants des classes à gauche de G modulo N (S contient un élément et un seul dans chaque classe) contenant $\{1_G\}$, et on distinguera deux cas, suivant la valeur de $[G : N]$.

Corrigé partiel

Un anneau et une équation diophantienne

Soit $A = \{u + vi\sqrt{2} : (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour $z \in A$, on note $N(z) = |z|^2 = z\overline{z}$.

1. On vérifie que $1 \in A$, que A est stable par différence, multiplication et conjugaison.
2. Soient a et b dans A. Posons $a = u + vi\sqrt{2}$ avec $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$. Alors $N(a) = u^2 + 2v^2 \in \mathbb{N}$. De plus, $N(ab) = |ab|^2 = |a|^2|b|^2 = N(a)N(b)$.

inversibles

3. Les éléments 1 et -1 sont inversibles, d'inverses 1 et -1.
   Soit $a \in A$ inversible, d'inverse b. Posons $a = u + vi\sqrt{2}$ avec $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$. Alors $N(a)N(b) = N(ab) = N(1) = 1$. Comme $N(a)$ et $N(b)$ sont dans $\mathbb{N}$, on a donc $u^2 + 2v^2 = N(a) = 1$. L'entier v est nul sans quoi on aurait $u^2 + 2v^2 \geqslant 2v^2 \geqslant 2$. Donc $u^2 = 1$. Ainsi $a = 1$ ou $a = -1$.
   Donc l'ensemble des éléments inversibles de A est réduit à $\{-1, 1\}$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons $z = x + yi$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soient m et n les parties entières de $x + 1/2$ et de $y/\sqrt{2} + 1/2$, et $q = m + ni\sqrt{2}$. Alors $q \in A$ et $(z - q) = (x - m) + (y - n\sqrt{2})i$ d'où
   $$|z - q|^2 = (x - m)^2 + 2\Big(\frac{y}{\sqrt{2}} - n\Big)^2 \leqslant \frac{3}{4},$$
   puisque
   $$-\frac{1}{2} \leqslant x - m < \frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} \leqslant \frac{y}{\sqrt{2}} - n < \frac{1}{2}.$$
   Soient $a \in A$ et $b \in A \setminus \{0\}$. D'après ce qui précède, il existe $q \in A$ tel que $|a/b - q|^2 \leqslant 3/4$. Notons $r = a - bq$. Alors $r \in A$ et $N(r) = |a/b - q|^2|b|^2 \leqslant 3/4|b|^2 < N(b)$. Donc l'anneau est euclidien de stathme N.

   `En cours, j'ai donné la définition d'un stathme en ajoutant la condition : si` a `divise` b`, alors` $N(a) \leqslant N(b)$`. Il faudrait donc rajouter cette vérification ici. C'est immédiat : si` z_1 `divise` z_2 `dans` A`, alors` $z_2 = z_1 u$ `avec` $u \in A$`, donc` $N(z_2) = N(z_1)N(u) \geqslant N(z_1)$ `car` $N(u) \geqslant 1$.

   On en déduit qu'il est principal et factoriel.
5. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x^2 + 2 = y^3$. Si x était pair, $x^2 + 2 = y^3$ le serait aussi, donc y le serait aussi. En notant $x = 2k$ et $y = 2l$, on obtiendrait $2k^2 + 1 = 4l^2$, ce qui est absurde (le premier membre est impair, le second est pair). Donc x est impair.
6. Soit d un PGCD dans A de $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$. Alors d divise $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$, et leur différence $2i\sqrt{2}$. Comme N est un morphisme de A dans $\mathbb{N}$ pour la multiplication, $N(d)$ divise $N(x + i\sqrt{2}) = x^2 + 2$ et $N(2i\sqrt{2}) = 8 = 2^3$. Mais $x^2 + 2$ est impair, donc $N(d) = 1$, c'est-à-dire $d = 1$ ou $d = -1$ d'après le raisonnement vu à la question 3. inversibles
7. On décompose $x + i\sqrt{2}$ en éléments irréductibles : $x + i\sqrt{2} = z_1^{\alpha_1} \cdots z_r^{\alpha_r}$ avec $r \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_r$ irréductibles dans A et deux-à-deux distincts, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ dans $\mathbb{N}^*$. Alors $x - i\sqrt{2} = \overline{z_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{z_r}^{\alpha_r}$. Les éléments $\overline{z_1}, \dots, \overline{z_r}$ sont distincts et irréductibles dans A puisque la conjugaison est un automorphisme de A (la conjugaison de $\mathbb{C}$ est un automorphisme de corps laissant stable A).
   Comme $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$, sont premiers entre eux, ils n'ont pas de facteurs irréductible commun donc $z_i \neq \overline{z_j}$ quels que soient i et j.
   On en déduit par produit la décomposition en facteurs irréductibles
   $$x^2 + 2 = z_1^{\alpha_1} \cdots z_r^{\alpha_r} \overline{z_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{z_r}^{\alpha_r},$$

avec $z_1, \dots, z_r, \overline{z_1}, \dots, \overline{z_r}$ sont distincts et irréductibles dans A.

Comme $x^2+2 = y^3$ et $y \in \mathbb{Z} \subset A$, l'unicité de la décomposition en facteurs irréductibles montre que les exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont multiples de 3. Notons $\alpha_k = 3\beta_k$ avec $\beta_k \in \mathbb{N}^*$, et $w = z_1^{\beta_1} \cdots z_r^{\beta_r}$. Alors $w \in A$ et $w^3 = x + i\sqrt{2}$.

8. Notons $w = u + vi\sqrt{2}$ avec $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$. En identifiant les parties réelle et imaginaire dans l'égalité $w^3 = x + i\sqrt{2}$, on obtient
$$x = u^3 - 6uv^2 = u(u^2 - 6v^2),$$
$$1 = 3u^2v - 2v^3 = v(3u^2 - 2v^2).$$
Comme $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, la deuxième égalité entraîne que $v = 1$ ou $v = -1$, d'où $3u^2 - 2 = 1$ ou $3u^2 - 2 = -1$, autrement dit $3u^2 = 3$ ou $3u^2 = 1$ (impossible). Donc $v = 1$ et $u \in \{-1, 1\}$.
Par conséquent, $x \in \{5, -5\}$ et $y = 3$. Comme $(5,3)$ et $(-5,3)$ sont effectivement solutions de l'équation $x^2+2 = y^3$, ce sont les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $x^2+2 = y^3$.

9. Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$, Alors $P(i\sqrt{2}) = a_0 + a_1(i\sqrt{2}) + \dots + a_n(i\sqrt{2})^n$ est dans A comme somme de produits d'éléments de A.
Soit $f : P \mapsto P(i\sqrt{2})$ de $\mathbb{Z}[X]$ dans A. Comme f est un morphisme d'anneaux, son noyau est un idéal de $\mathbb{Z}[X]$. Comme il contient X^2+2, il contient $(X^2+2)\mathbb{Z}[X]$. Pour montrer l'inclusion réciproque, notons Q et $R = aX + b$ le quotient et le reste de la division euclidienne de P par le polynôme unitaire X^2+2. Alors $P = (X^2+2)Q + R$. En évaluant en $i\sqrt{2}$, on obtient $P(i\sqrt{2}) = R(i\sqrt{2}) = ai\sqrt{2} + b$. Comme a et b sont réels, on a donc $P(i\sqrt{2}) = 0$ si et seulement si $a = b = 0$, c'est-à-dire si et seulement si X^2+2 divise P. Donc le noyau de f est l'idéal $(X^2+2)\mathbb{Z}[X]$.

10. Le morphisme f est surjectif, puisque tout élément de A s'écrit $a = u+vi\sqrt{2}$ avec $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, d'où $a = f(vX+u)$. D'après le théorème de factorisation des morphismes d'anneaux, A est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(X^2+2)\mathbb{Z}[X]$. Comme A est intègre mais n'est pas un corps, l'idéal $(X^2+2)\mathbb{Z}[X]$ est premier mais pas maximal.

Sous-groupes de $\mathcal{S}_n$ d'indice n

Soit $n \geqslant 5$ un entier. Soit $G = \mathcal{S}_n$. Soit H un sous-groupe de G d'ordre $(n-1)!$. On note $E = G/H$ l'ensemble des classes à gauche modulo H. Pour $x \in G$ et $C = xH \in G/H$, on note $\phi(g)(C) = g \cdot C = gC = (gx)H$. On obtient ainsi une action de G sur E par translation à gauche. Autrement dit, ϕ est un morphisme de $(G, \circ)$ dans $(\mathcal{S}(E), \circ)$.

1. Par hypothèse, E est d'ordre n donc $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est d'ordre $n!$.
2. Soit $g \in \operatorname{Ker}\phi$. Alors $\phi(g) = \mathrm{id}_E$. En particulier, $gH = \phi(g)(H) = H$, donc $g \in H$. Cela montre l'inclusion $\operatorname{Ker}\phi \subset H$.
3. Le noyau de ϕ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$. Comme $n \geqslant 5$, c'est donc un des groupes $\{id\}$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$. Mais il est contenu dans H, qui est d'ordre $(n-1)!$. Comme $(n-1)! = n!/n < n!/2$, on a donc $\operatorname{Ker}\phi = \{id\}$. Donc ϕ est injectif. Comme $G = \mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}(E)$ sont tous deux d'ordre $n!$, ϕ est bijectif. Ainsi, φ est un isomorphisme de $(G, \circ)$ sur $(\mathcal{S}(E), \circ)$.
4. Pour tout $h \in H$, $\phi(h)(H) = hH = H$. Donc $\phi(H) \subset \{s \in \mathcal{S}(E) : s(H) = H\}$. Mais par injectivité de ϕ, $\operatorname{Card}\phi(H) = \operatorname{Card} H = (n-1)!$. Comme $\{s \in \mathcal{S}(E) : s(H) = H\}$ est isomorphe à $\mathcal{S}(E \setminus \{H\})$ (une permutation de E fixant H induit une permutation de $E \setminus \{H\}$ et cette correspondance est un isomorphisme), on a aussi $\operatorname{Card}\{s \in \mathcal{S}(E) : s(H) = H\} = (n-1)!$. Donc $\phi(H) = \{s \in \mathcal{S}(E) : s(H) = H\}$.
Ainsi, H est isomorphe à $\phi(H)$, qui est isomorphe à $\mathcal{S}(E \setminus \{H\})$, qui est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$.
Remarque : un exemple évident de sous-groupe d'indice n dans $\mathcal{S}_n$ est le stabilisateur de x avec $x \in \{1 \dots n\}$ fixé. On peut montrer que si $n \neq 6$, les stabilisateurs d'un point sont les

seuls groupes d'indice n dans $\mathcal{S}_n$. Mais si $n = 6$, il y en a d'autres, par exemple le sous-groupe engendré par (1 2 3 4) et (3 4 5 6).

Conjugués et normalisateur d'un sous-groupe

1. Comme $1_G H 1_G^{-1} = H$, $1_G \in N$ (on a noté 1_G l'élément neutre de G). De plus, pour a et b dans N,
$$(ab^{-1})H(ab^{-1})^{-1} = ab^{-1}(bHb^{-1})ba^{-1} = aHa^{-1} = H,$$
donc $ab^{-1} \in N$. Donc N est un sous-groupe de G contenant H.
Pour tout $h \in H$ et $g \in N$, $ghg^{-1} \in gHg^{-1} = H$. Donc H est distingué dans N.
Si K est un sous-groupe de G dans lequel H est distingué, alors pour tout $g \in K$, pour tout $h \in H$, $ghg^{-1} \in H$ et $h = g(g^{-1}hg)g^{-1}$ avec $g^{-1}hg \in H$. Donc $gHg^{-1} \subset H$ et $H \subset gHg^{-1}$, d'où $g \in N$. Cela montre que $K \subset N$.
2. Soient a et b dans G. En multipliant à gauche par a^{-1} et à droite par a, on obtient
$$aHa^{-1} = bHb^{-1} \iff H = a^{-1}bHb^{-1}a \iff a^{-1}b \in N.$$
Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des conjugués de H dans G. L'application $g \mapsto gHg^{-1}$ de G dans $\mathcal{H}$, surjective par construction, se factorise donc en la projection canonique de G sur G/H et une bijection de G/H vers $\mathcal{H}$. Donc $\mathcal{H}$ a même cardinal que $G \setminus H$.

`Il me semble qu'il vaudrait mieux dire que` $\mathcal{H}$ `et` $G \setminus H$ `sont en bijection, je ne sais pas s'ils savent ce que désigne le mot cardinal en toute généralité, pour des ensembles éventuellement infinis.`

3. Comme G est fini, N et H le sont et
$$[G : H] = \frac{\text{Card}\, G}{\text{Card}\, H} = [G : N][H : H].$$
Donc $[G : N]$ divise $[G : H]$.
Supposons que H est strictement inclus dans G. Soit S un système de représentants des classes à gauche de G modulo N contenant $\{1_G\}$. D'après la question précédente,
$$\bigcup_{g \in G} gHg^{-1} = \bigcup_{g \in S} gHg^{-1}.$$
Si $[G : N] = 1$, alors $S = \{1_G\}$ donc l'union des gHg^{-1} pour $g \in G$ est H.
Si $[G : N] > 1$, l'union des gHg^{-1} pour $g \in S$ n'est pas disjointe (ils contiennent tous 1_G) donc
$$\text{Card}\left(\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}\right) < \sum_{g \in S} \text{Card}\,(gHg^{-1}) = [G : N]\text{Card}\, H \leqslant [G : H]\text{Card}\, H = \text{Card}\, G.$$
Dans tous les cas, l'union des gHg^{-1} pour $g \in G$ est strictement incluse dans G.
Remarque : la conclusion n'est plus valable pour les groupes infinis. On obtient un contre-exemple en prenant $G = GL_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 2$ et H le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures. En effet, toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable et peut être écrite sous la forme PTP^{-1} avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in GL_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure.

Université Joseph Fourier
L3 MAT36e

Devoir surveillé n°1
mardi 13 mars 2012, 15h–16h30

Aucun document n'est autorisé.

1. Questions

a) Donner la définition d'une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$.

b) Soit D^* le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, privé de 0. Existe–t–il f fonction analytique sur D^*, non constante, telle que $f(1/n) = 0$ pour tout entier $n \geq 2$?

2. Exercice

a) Donner une primitive de $z \to \frac{1}{1+z}$ sur l'ouvert $\mathrm{Re}(z) > -1$ de $\mathbb{C}$.

b) On note γ_1 le segment de 0 à i, γ_2 le demi–cercle de diamètre $[0, i]$ passant par $(1 + i)/2$, orienté de 0 à i.
Calculer $I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z}\, dz$. En déduire la valeur de $I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z}\, dz$.

3. Exercice

Soit γ le cercle unité parcouru dans le sens direct. Evaluer l'intégrale:

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2(z+3)}\, dz.$$

4. Exercice

Soit $R > 0$ et soit U un domaine de $\mathbb{C}$ qui contient le disque ouvert $D(0, R)$ de centre 0 et rayon R. On considère une fonction holomorphe f sur U. Pour $r \in]0, R[$, on note $m(r) = \sup\{\, |f(z)|\, ;\, |z| = r\}$.

a) Montrer que la fonction m est croissante.

b) Si f n'est pas constante sur U, m est–t–elle strictement croissante?

c) Soit $c > 0$. Existe–t–il f fonction holomorphe sur U telle que pour tout $z \in U$, $|f(z)| = |z|^2 + c$?

5. Exercice

a) Soit $u \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $z \mapsto y^3 - 3x^2y + 3x$, où $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. La fonction u est–elle harmonique?

b) Trouver toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est u.

- $\diamondsuit$ -

Université Joseph Fourier	2011-2012
Licence 3	Parcours A

Algèbre

Examen du 03/01/2012, 13h-17h

Les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Le barême est donné à titre indicatif.
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1 (Environ 4 points)**.** Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme minimal μ_u est scindé dans K et possède n racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ dans laquelle la matrice de u est diagonale, de coefficients diagonaux $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On notera $\mathrm{Diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ cette matrice.
2. On note $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes
$$L_i := \prod_{j \neq i} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}.$$
Soit $P \in K[X]$. Quelle est la matrice de $P(u)$ dans $\mathcal{B}$? Montrer que
$$P(u) = \sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i) L_i(u).$$
Reconnaître les endomorphismes $L_i(u)$.
3. Soit $v \in L(E)$. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors v est diagonalisable dans la base $\mathcal{B}$. En déduire qu'il existe $P \in K[X]$ tel que $v = P(u)$. On pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.
4. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E. Indication : on pourra prendre $x = e_1 + \cdots + e_n$.
5. A l'aide d'un ou de deux contre-exemples, montrer que les conclusions des questions 3 et 4 peuvent être mises en défaut si l'on suppose seulement que μ_u est scindé dans K.

Problème 1 (Réduction de Frobenius)**.** [Environ 10 points]

Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note μ_u le polynôme minimal de u. On définit
$$\mathcal{L}_u := \{P(u);\ P \in K[X]\}.$$
Pour tout $x \in E$, on définit
$$E_x := \{P(u)(x);\ P \in K[X]\}$$
et
$$I_x := \{P \in K[X];\ P(u)(x) = 0\}.$$
On dira que u est cyclique si, et seulement si, il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = E_x$.

1. Soit $x \in E$. Vérifier que I_x est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0\}$. En déduire qu'il existe un unique polynôme M_x de coefficient dominant égal à 1 tel que $I_x = M_x K[X]$.
2. Soit d_x le degré de M_x. Montrer que E_x est un sous-espace vectoriel de E de dimension d_x, dont une base est $\left\{x, \cdots, u^{d_x - 1}(x)\right\}$. Indication : on pourra utiliser une division euclidienne.

3. Soit $P \in K[X]$. Montrer que $M_{P(u)(x)}$ divise M_x et plus précisément que $M_{P(u)(x)}$ est le quotient de M_x par $M_x \wedge P$. Indication : si $D := M_x \wedge P$, on utilisera le fait que M_x/D et P/D sont premiers entre eux.
4. Soient $x, y \in E$ tels que M_x et M_y sont premiers entre eux.
   (a) Montrer que $E_{x+y} = E_x + E_y$. On utilisera le théorème de Bezout pour l'inclusion non triviale.
   (b) Montrer que $E_x \cap E_y = \{0\}$ (utiliser la question 3).
   (c) En déduire que $M_{x+y} = M_x M_y$.
   (d) Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_p \in E$ tels que, pour tous $i \neq j$, M_{x_i} et M_{x_j} soient premiers entre eux. Montrer que $E_{x_1+\cdots+x_p} = E_{x_1} \oplus \cdots \oplus E_{x_p}$ et que $M_{x_1+\cdots+x_p} = M_{x_1} \cdots M_{x_p}$.
5. On décompose μ_u en facteurs irréductibles : $\mu_u = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_p^{\alpha_p}$, avec $Q_1, \ldots, Q_p$ irréductibles deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ dans $\mathbb{N}^*$.
   (a) Pour $i \in [1, p]$, montrer qu'on peut trouver $y_i \in E$ tel que $(\mu_u/Q_i)(u)(y_i) \neq 0$. En utilisant la décomposition de M_{y_i} en produit de facteurs irréductibles, montrer que $Q_i^{\alpha_i}$ divise M_{y_i}, puis qu'on peut trouver $x_i \in E$ tel que $M_{x_i} = Q_i^{\alpha_i}$.
   (b) En déduire qu'il existe $x \in E$ tel que $M_x = \mu_u$, et montrer qu'un tel x est nécessairement non nul.
6. Dans cette question, on suppose u cyclique. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$
où $a_0, \cdots, a_{n-1} \in K$. Une telle matrice sera appelée matrice de Frobenius.
7. On suppose maintenant u non cyclique. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $M_x = \mu_u$. On note d le degré de μ_u.
   (a) On complète la base $(e_1, \ldots, e_d) = (x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On note $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale. Pour tout $1 \leqslant l \leqslant d$, on définit
   $$\varphi_l := ({}^t u)^{l-1}(e_d^*)$$
   et on note G le sous-espace vectoriel de E^* engendré par $(\varphi_1, \cdots, \varphi_d)$.
   (b) Montrer que G est de dimension d.
   (c) Vérifier que $E = E_x \oplus G^0$.
   (d) Montrer que G est stable par ${}^t u$ et que G^0 est stable par u.
   (e) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, de la forme
   $$\begin{pmatrix} F_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & F_r \end{pmatrix}$$
   où $F_1, \cdots, F_r$ sont des matrices de Frobenius.

Exercice 2 (Simplicité et groupe alterné). [Environ 5 points]

Dans cet exercice, on veut montrer que le groupe $\mathcal{A}_5$ est simple, c'est-à-dire que ses seuls sous-groupes distingués sont $\{\mathrm{Id}\}$ et $\mathcal{A}_5$. Soit $H \triangleleft \mathcal{A}_5$ avec $H \neq \{\mathrm{Id}\}$.

1. Donner la liste des différents types de permutations de $\mathcal{A}_5$ suivant la structure en orbites, en donnant le nombre et l'ordre des permutations de chaque type. On rappelle que l'ordre d'une permutation décomposée en produit de cycles à supports deux à deux disjoints est le PPCM des longueurs des cycles.
2. Montrer que deux éléments de $\mathcal{A}_5$ d'ordre 3 sont toujours conjugués dans $\mathcal{A}_5$. En déduire que si H contient un élément d'ordre 3, alors H contient tous les éléments d'ordre 3 de $\mathcal{A}_5$.
3. Montrer que deux éléments de $\mathcal{A}_5$ d'ordre 2 sont toujours conjugués dans $\mathcal{A}_5$. En déduire que si H contient un élément d'ordre 2, alors H contient tous les éléments d'ordre 2 de $\mathcal{A}_5$
4. On suppose maintenant que H contient un élément d'ordre 5. Montrer que H contient un 5-Sylow de $\mathcal{A}_5$. En déduire que H contient tous les éléments d'ordre 5 de $\mathcal{A}_5$.
5. En regardant les valeurs possibles pour l'ordre de H, en déduire que $H = \mathcal{A}_5$.

Exercice 3 (Formule de Burnside). [Environ 4 points]

Soient G un groupe fini et E un ensemble fini. On suppose que G agit sur E et on note Ω l'ensemble des orbites de E pour cette action. Pour tout $g \in G$, on définit

$$\mathrm{Fix}(g) := \{x \in E;\ g \cdot x = x\}.$$

On définit aussi

$$C := \{(g, x) \in G \times E;\ g \cdot x = x\}.$$

Dans la suite, pour tout ensemble fini A, $\sharp A$ désigne le cardinal de A.

1. Montrer que
$$\sharp C = \sum_{g \in G} \sharp \mathrm{Fix}\ (g) = \sum_{x \in E} \frac{\sharp G}{\sharp O_x},$$
où O_x désigne l'orbite de x dans E.
2. En utilisant le fait que E est l'union disjointe de ses orbites, montrer que
$$\sharp C = \sharp G \sharp \Omega.$$
En déduire que
$$\sharp \Omega = \frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \sharp \mathrm{Fix}(g).$$
3. Soit A un ensemble fini de cardinal a. Montrer que la formule $\sigma \cdot f = f \circ \sigma^{-1}$ définit une action de $\mathcal{S}_3$ sur $A^{\{1,2,3\}}$. Calculer le nombre d'orbites de cette action.

Université Joseph Fourier	2011-2012
Licence 3	Parcours A

Algèbre

Examen du 19/06/2012

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction. Le barême est donné à titre indicatif sur 30 *points et sera ramené à* 25.
Documents et calculatrices interdits.

Problème 1. Sous-groupes d'indice 2 et groupes d'ordre 12 [Environ 11 points]

Partie I

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G d'indice 2. On fixe $a \in G \setminus H$.

1. Vérifier que $aH = G \setminus H = Ha$.
2. Pour tout $g \in G$, on pose :
$$\varphi(g) := \begin{cases} 1 & \text{si } g \in H, \\ -1 & \text{si } g \notin H. \end{cases}$$
Montrer que φ est un morphisme de groupes de G dans $\mathbb{R}^*$ et que H est distingué dans G.

Partie II

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 2$, $\mathcal{S}_E$ le groupe symétrique de E et $\mathcal{A}_E$ le sous-groupe alterné de E (formé des permutations de E de signature 1). Soit $\varphi : \mathcal{S}_E \to \mathbb{R}^*$ un morphisme de groupes.

1. Vérifier que, pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_E$, $\varphi(\tau) = 1$ ou $\varphi(\tau) = -1$.
2. Montrer que $\varphi(\tau)$ ne dépend pas de la transposition $\tau \in \mathcal{S}_E$.
3. En déduire que φ est soit l'application constante égale à 1, soit la signature.
4. Montrer que le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{S}_E$ est le groupe alterné $\mathcal{A}_E$.

Partie III

Soit G un groupe d'ordre 12, dont l'élément neutre est noté e. Soit P un 3-Sylow de G. On note $E = G/P = \{aP\ ;\ a \in G\}$ l'ensemble des classes à gauche modulo P.

1. Quels sont l'ordre et l'indice de P ? Vérifier que P est cyclique, engendré par un élément b.
2. Justifier qu'il existe un morphisme de groupes ψ de G vers $\mathcal{S}_E$ dont le noyau K est un sous-groupe de P. Indication : utiliser une action de groupes.
3. On suppose désormais que G n'est pas isomorphe à $\mathcal{A}_4$. Montrer qu'il est impossible d'avoir $K = \{e\}$. En déduire que $K = P$, puis que P est un sous-groupe distingué de G.
4. Déduire de ce qui précède que P est le seul 3-Sylow de G. Quels sont tous les éléments d'ordre 3 de G ?
5. On considère l'action de G sur lui-même par conjugaison, définie par $g \cdot x = gxg^{-1}$ pour g et x dans G. Pour $x \in G$, on note $G \cdot x = \{g \cdot x;\ g \in G\}$ l'orbite de x et $S_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ le stabilisateur de x. Montrer que l'orbite $G \cdot b$ possède au plus deux éléments et en déduire que S_b est d'indice 1 ou 2 dans G.
6. En déduire que S_b contient un élément a d'ordre 2.

7. Déduire des questions précédentes que G possède un élément c d'ordre 6.

Exercice 1 (Environ 4 points). Soient G un groupe fini et p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous-groupe de G, d'indice p. Pour tout $x \in G$, on notera $\overline{x} = xH$ la classe de x dans G/H.

1. Soit $g \in G$. Vérifier que l'application $\sigma_g : \overline{x} \mapsto \overline{gx}$ est une bijection de G/H sur G/H.
2. Montrer que l'application $\varphi : g \mapsto \sigma_g$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathcal{S}(G/H)$.
3. Soit $K = \text{Ker } \varphi$. En déduire que l'indice $[G : K]$ divise $p!$, puis que $[G : K]$ divise p.
4. Montrer que $K \subset H$, puis que $K = H$. En déduire que H est distingué dans G.

Exercice 2 (Environ 7 points). Soit $d \geqslant 3$ un entier. On note $A = \{x+iy\sqrt{d}\ ;\ (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour $a \in A$, on note $N(a) = |a|^2$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ stable pour la conjugaison de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et est un morphisme pour la multiplication.
3. Déterminer les éléments inversibles de A.
4. Montrer que 2 est irréductible dans A.
5. Montrer que l'idéal $2A$ n'est pas premier. Indication : utiliser l'égalité $(d+i\sqrt{d})(d-i\sqrt{d}) = d^2+d$.
6. En déduire que A n'est pas principal.
7. Soit $I = \{a \in A : N(a) \in 2\mathbb{N}\}$. Montrer que I est un idéal de A, puis que I n'est pas principal. Indication : on vérifiera que $i\sqrt{d} \in I$ ou $1 + i\sqrt{d} \in I$.

Exercice 3 (Environ 3 points). Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On considère la matrice $B \in M_{2n}(\mathbb{K})$ donnée par

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout $P \in K[X]$,

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

2. On suppose B diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable, puis que $A = 0$. On utilisera un critère de diagonalisabilité du cours.

Exercice 4 (Environ 5 points). Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note μ_u le polynôme minimal de u.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par ${}^tu$.
2. Dans cette question, on suppose que μ_u est scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un plan de E stable par u. On pourra utiliser un critère de réduction des endomorphismes vu en cours.
3. Dans cette question, on suppose que μ_u n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré 2, irréductible sur $\mathbb{R}$, tel que $Q(u)$ ne soit pas injectif. En déduire qu'il existe un plan de E stable par u.
4. Dans cette question, on suppose que n est impair et on écrit $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Vérifier qu'il existe une droite de E stable par u et un plan de E stable par u.
   (b) Montrer que, pour tout entier $p \in \{0, .., 2k + 1\}$, il existe un sous-espace de E de dimension p stable par u. Indication : on raisonnera par récurrence sur k. On pourra appliquer la conclusion de la question précédente à ${}^tu$.

Université Joseph Fourier – Grenoble I

L3 : Licence Sciences et Technologies

UE Fonctions Holomorphes : examen 22 juin 2012

Durée 3h. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Autour du cours

1. Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses :
   (a) $z \mapsto \sqrt{z}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$.
   (b) Une fonction holomorphe est partout différentiable.
   (c) Une fonction méromorphe dont tout pôle éventuel est simple est holomorphe si et seulement si chaque résidu est zéro.
   (d) La fonction $u(x, y) = xy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est harmonique.
2. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de z_0. Donner une condition suffisante pour que f soit conforme autour de z_0.
3. Énoncer le principe du maximum.
4. Montrer : si u est une fonction harmonique réelle dans un domaine D, alors, localement, u est la partie réelle d'une fonction holomorphe. Est-ce que cela reste vrai globalement ?

Exercices

1. Soit f une fonction holomorphe sur un domaine D. On suppose que f est non-constante et que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$. Montrer : $|f(z)|$ n'atteint pas son minimum dans D.
2. Soit
$$f(z) := \frac{e^z}{z^2 \cdot (z^2 - 9)}.$$

(a) Déterminer toutes les singularités dans $\hat{\mathbf{C}}$ de la fonction f.

(b) Pour toute singularité discuter la nature (pôle, ordre du pôle, singularité apparente, essentielle).

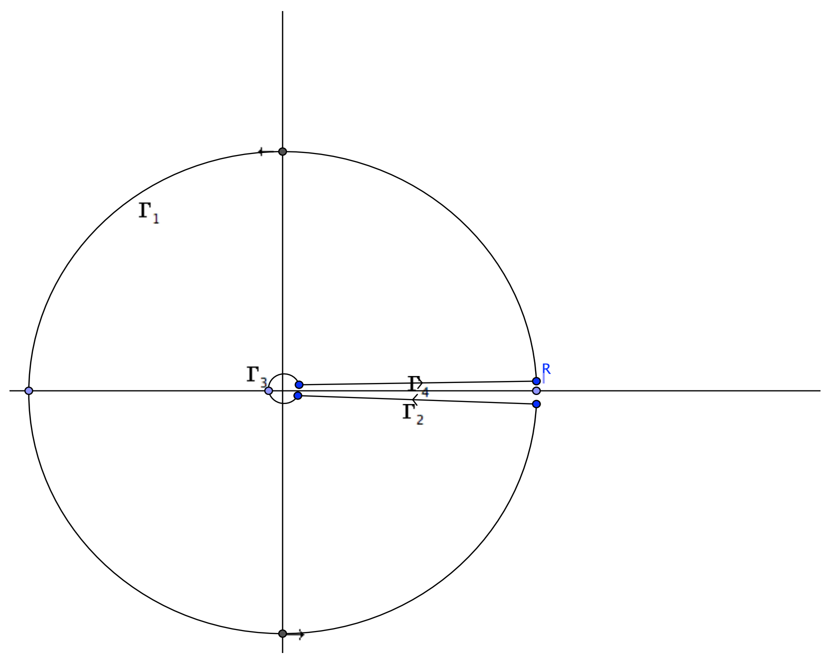
(c) Calculer le résidu en chaque singularité non essentielle.

(d) Calculer l'intégrale $\int_\gamma f dz$ où $\gamma(t) = Re^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$, en fonction de R.

3. Soit $f(z) = z^p$, $p \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ et $-1 < p < 1$. Pour cet exercice on utilisera la fonction argument Arg telle que $0 \leq \text{Arg} < 2\pi$.

   (a) Rappeler la définition de z^p dans le domaine $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$.

   On considère le contour Γ suivant :



Le chemin Γ_1 est un cercle incomplet de rayon R ; et Γ_3 est un cercle incomplet de rayon ϵ ; les chemins Γ_2 et Γ_4 sont les deux segments de rayon manquants, d'angles $2\pi - \eta$ et η. On pose

$$I_k := \int_{\Gamma_k} \frac{z^p}{1+z^2} dz.$$

(b) Montrer que $\lim_{R\to\infty} I_1 = 0$ et que $\lim_{\epsilon\to 0} I_3 = 0$.

(c) Déterminer la constante $C_p \in \mathbf{C}$ telle que $I_2 + I_4 \to C_p \int_\epsilon^R \frac{x^p}{1+x^2} dx$ lorsque l'angle η tend vers zéro. Attention : il faut justifier l'interversion de limite.

(d) Calculer les résidus en $\pm\mathrm{i}$ de $\frac{z^p}{1+z^2}$.

(e) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi p\right)}.$$

Université Joseph Fourier – Grenoble I

L3 : Licence Sciences et Technologies

UE Fonctions Holomorphes : examen, 14 mai 2012, 9–12 h.

Durée 3h. Tout document est interdit. Les calculatrices et les téléphones portables, même à titre d'horloge, sont également interdits.

Autour du cours

1. Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses :
   (a) Une fonction holomorphe bornée dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$ est constante.
   (b) Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine. Une fonction continue $f : D \to \mathbb{C}$ telle que $\int_\gamma f dz = 0$ pour chaque lacet γ (supposé C^1 par morceaux) est holomorphe.
   (c) Si f non identiquement nulle est méromorphe, alors $1/f$ est aussi méromorphe.
   (d) Une fonction méromorphe dont tous les résidus sont 0 est entière.
2. Montrer : si f et g sont deux fonctions holomorphes sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$ telle que $f = g$ sur un segment $[z_1, z_2] \subset D$, $(z_1 \neq z_2)$ alors $f = g$.
3. Soit f une fonction méromorphe. Quand dit-on que f a un pôle, resp. une singularité essentielle au point ∞ ? Montrer que f est une fonction rationnelle si et seulement si f n'a pas une singularité essentielle en ∞.
4. Montrer : si f et g sont deux fonctions entières avec les mêmes zéros (avec multiplicités) alors il existe une fonction entière h telle que $f(z) = e^{h(z)} g(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Exercices

1. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f = u + \mathrm{i}v$ sur $\mathbb{C}$ ($u =$Re (f), $v =$Im (f)) telles que, écrivant $z = x + \mathrm{i}y$ avec x, y réels, on ait $u = ye^x \cos y + xe^x \sin y$.
2. Soit k un entier strictement positif. Soit
$$f(z) := \frac{\sin z \cdot e^z \cdot (z-1)}{z^k(z-2)}.$$
   (a) Déterminer toutes les singularités dans $\hat{\mathbb{C}}$ de la fonction f.
   (b) Pour toute singularité discuter la nature (pôle, ordre du pôle, singularité apparente, essentielle).

   On suppose désormais $k = 3$.

   (c) Calculer le résidu de chaque singularité non essentielle.
   (d) Calculer l'intégrale $\int_\gamma f dz$ où $\gamma(t) = Re^{2\pi \mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 1$ en fonction de R.
3. Soit $f(z) = \dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2 + b^2}$ où b est un réel strictement positif.
   (a) Calculer les résidus de f aux 2 pôles de f.
   (b) Utiliser ce résultat pour montrer
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-b}}{2b}.$$
4. Soit $f = z^3 - 4z^2 + z + 12$.
   (a) Rappeler le théorème de Rouché.
   (b) Montrer que f a tous ses zéros dans le domaine $1 < |z| < 5$. Indication (comparer f avec deux fonctions convenables, e.g. une constante bien choisie ou bien la fonction $z^3 - 4z^2 + z - 4$.

Corrigé

Autour du cours

1. Vrai ou faux ?
   (a) NON. Par exemple z est borné sur $D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \|z\| \leq 2\}$.
   (b) OUI, c'est le thm. de Morera.
   (c) OUI : une fonction méromorphe f est holomorphe ou a des pôles dans $\mathbb{C}$. Autour de chaque point $a \in \mathbb{C}$ le développement de Laurent (DdL) s'écrit $\sum_{k \geq k_0} a_k(z-a)^k$. Pour un pôle $k_0 < 0$, $a_{k_0} \neq 0$ et le DdL pour $1/f$ autour de a est
   $$(z-a)^{k_0} \frac{1}{a_{k_0} + a_{k_0+1}z + \cdots} = (z-a)^{k_0} \text{ série entière en } (z-a)$$
   donc un zéro d'ordre k_0 et de même, si f a une zéro d'ordre ℓ en $z = b$, $1/f$ a un pôle d'ordre ℓ en b.
   (d) NON, la fonction $\frac{1}{z^2}$ a un seul pôle en 0 de résidu 0.
2. Le segment S contient une point d'accumulation de S. Le théorème d'identité implique alors que $f = g$.
3. f a un pôle, resp. une singularité essentielle au point ∞ si $g(z) = f(1/z)$ a un pôle, resp. une singularité essentielle au point zéro.
   Si $f = \frac{p}{q}$, $\deg p = n$, $\deg q = m$, alors
   $$\frac{p(\frac{1}{z})}{q(\frac{1}{z})} = \frac{z^n p(\frac{1}{z})}{z^m q(\frac{1}{z})}$$
   où $z^n p(\frac{1}{z}) = P(z)$ et $z^m q(\frac{1}{z}) = Q(z)$ sont des polynômes en z de degrés n et m et donc $\frac{P}{Q}$ a un singularité apparente en 0 si $n \geq m$ et sinon un pôle d'ordre $m - n$.
   Réciproquement, on n'a au plus un nombre fini de pôles $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ car sinon, ∞ serait un point d'accumulation de pôles. Alors, on écrira $f(z) = h_k(z) + f_k(z)$ avec $f(z_k)$ holomorphe autour de a_k et $h_k(z)$ la partie polaire. Alors $\tilde{f} := f - h_1 - \cdots - h_n$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ avec au plus un pôle à l'infini. Or, si le DdL de $\tilde{f}$ autour de 0 est $\sum a_k z^k$, alors $\tilde{f}(\frac{1}{z}) = \sum a_k z^{-k}$ et cela étant un pôle, il n'y a qu'un nombre fini

de termes non-nulles. Conclusion : $\tilde{f}$ est un polynôme et donc

$$f = \text{polynôme } + \sum h_i = \text{polynôme } + \sum_k \text{ polynôme en } \frac{1}{(z-z_k)}$$

est une fonction rationnelle.

4. La fonction $s := f/g$ est entière est sans zéros. Alors aussi $1/s$ et s' sont entières et donc aussi $\frac{s'}{s}$. Soit son DdL $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$. On a $s(0) \neq 0$ et on pose $s(0) = e^{b_0}$ et $h = b_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{c_{n-1}}{n} z^n$ qui satisfait $h' = s'$ par construction. Donc $(se^{-h})' = (s' - h')e^{-h} = 0$ et donc se^{-h} est constante $=s(0)e^{-b_0} = 1$ et donc $s = e^h$ avec h entier.

Exercices

1. On utilise les équations de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$ pour montrer que $v = y \sin y e^x - e^x x \cos y + C$ et donc

   $$u + \mathrm{i}v = ye^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y) - \mathrm{i}xe^x(\cos y + \sin y) + \mathrm{i}C = -\mathrm{i}ze^z + \mathrm{i}C,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. (a) On a les singularités $z = 0$, $z = 2$ et $z = \infty$.

   (b) Pour $z = 0$ un pôle d'ordre $k-1$ si $k \geq 2$, sinon une singularité apparente. Pour $z = 2$ un pôle d'ordre 1 et un singularité essentielle en $z = \infty$. Pour le dernier on remarque

   $$\frac{\sin(\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}(\frac{1}{z} - 1)}{(\frac{1}{z})^k(\frac{1}{z} - 2)} \sim \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(\frac{1}{z})^{k-1}} = z^{k-1}e^{\frac{1}{z}} = z^{k-1} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^{-n}.$$

   (c) On a $\mathrm{Res}(f, 2) = \lim_{z\to 2} \frac{\sin z \cdot e^z \cdot (z-1)}{z^3} = \frac{1}{8} \cdot e^2 \sin(2)$. Si $k = 3$, on a

   $$\frac{\sin z \cdot e^z \cdot (z-1)}{z^3(z-2)} = \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot e^z \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n\right)$$

   et pour $\mathrm{Res}(f, 0)$, on cherche le coefficient de z dans $\frac{\sin z}{z} \cdot e^z \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n\right)$ qui est $\frac{1}{4}$.

   (d) Par le théorème des résidues on a pour $0 < R < 2$ que l'intégrale vaut $-\frac{\pi \mathrm{i}}{2}$ et si $R > 2$ on trouve $2\pi\mathrm{i}(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot e^2 \sin(2))$. Pour $R = 2$ l'intégrale n'est pas définie.

3. On a autour de $z = \mathrm{i}b$:

$$\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2+b^2} = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i}b)(z-\mathrm{i}b)} = \left(\frac{e^{-b}}{2\mathrm{i}} + \text{séries en } (z-b\mathrm{i})^2\right) \cdot \frac{1}{z-\mathrm{i}b}$$

et donc le résidu en $z = \mathrm{i}b$ est égal à $\frac{e^{-b}}{2\mathrm{i}}$ et de même est égal à $-\frac{e^{-b}}{2\mathrm{i}}$ en $z = -\mathrm{i}b$. Par un résultat du cours, ou par un calcul direct (il faut choisir un contour convenable et faire une estimation pour la partie qu'on souhaite faire aller vers l'infini) l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+b^2} dx =$ partie réelle de $[2\pi\mathrm{i}$ somme des résidues de $f(z)$ dans le demi-plan supérieur et donc, puisque f est paire, on a

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+b^2} dx = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2} 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{e^{-b}}{2\mathrm{i}}\right] = \pi \frac{e^{-b}}{2b}.$$

4. (a) Sur un domaine D borné d'un lacet γ, où f et g sont méromorphes sans singularités essentielles et $|f-g| < |g|$ lelong de γ, alors le nombre de zéros moins le nombre de pôles est le même pour f et pour g.

   (b) Si $|z| = 1$ avec $g = 12$ on a $|f-g| = |z||z^2-4z+1| \leq |z|^2+4|z|+1 = 6 < 12$ donc f n'a pas de zéros dans $D(0,1)$; si $|z| = 5$ avec $g = z^3 - 4z^2 + z - 4 = (z-4)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$ on a $|f-g| = 16$ et $|g| > 1.4.4 = 16$ (ici on doit exclure l'égalité $|g| = 16$ par la remarque que si $|z| = R$ on a $|z-a| \geq ||z|-|a||$ avec égalité seulement si z et a sont alignés).

   On peut également prendre $g = z^3$ et remarquer que si $|z| = 5$ on a $|f-g| = |-4z^2+z-4| \leq 4.5^2+5+4 = 109 < |z|^3 = 125$.

   Donc f a exactement 3 zéros dans $D(0,5)$.