Actions sur le cercle.

Isabelle Liousse, Université de Lille 1

19 juin 2006

Introduction.

⋄◇♢◇⋄

Très peu d'équations différentielles peuvent être explicitement résolues. Partant de ce constat, Henri Poincaré initia la théorie des systèmes dynamiques "classiques" en substituant au calcul impossible des solutions d'une E.D.O l'étude qualitative des orbites du champs de vecteur associé. Pour décrire l'évolution du système au cours du temps, plus particulièrement pour décrire le comportement assymptotique de ses solutions $\phi_t(x)$ lorsque le temps t tend vers l'infini, Poincaré inventa d'importants concepts. En introduisant la notion d'application de premier retour, Poincaré associa au système continu : le champs de vecteur sur le tore un système discret : un homéomorphisme du cercle plus maniable et dont les orbites ont les mêmes comportements. Pour comprendre ces comportements, Poincaré définit entre autre le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle et montra que " $\rho(f) \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ *si et seulement si* f *possède au moins une orbite périodique.*"

Un généralisation naturelle des systèmes dynamiques "classiques" consiste à ne plus imposer au temps d'être réel ou entier mais seulement d'être l'élément d'un groupe Γ. Le système est alors paramétré par ce groupe. En conclusion, *un système dynamique général* sur un espace topologique X est la donnée d'un morphisme d'un groupe Γ dans le groupe des homéomorphismes de X, autrement dit d'une action topologique de Γ sur X.

L'étude des actions sur le cercle bénéficie d'un excellent survey de É Ghys ([Gh2001]"Groups acting on the circle", L'Enseignement Mathématique) qui privilégie les aspects topologiques (parfois PL). Ici, nous avons choisi de mettre en avant certains aspects et méthodes typiques des situations C^2 et/ou PL.

Dans le premier chapitre de ce cours, nous définissons les principales notions dynamiques (actions, orbites, minimaux, conjugaison).

Dans le second chapitre, nous énonçons et montrons un théorème dit "d'alternatives dynamiques" qui décrit les comportements dynamiques possibles pour un groupe G d'homéomorphismes du cercle : (1)- G a une orbite finie ou (2)- toutes les orbites de G sont denses ou (3)- G possède un minimal exceptionnel (i.e. homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor).

Ensuite, nous donnons des exemples de ces différents types de dynamiques y compris en grande régularité pour (3) ce qui constitue un phénomène nouveau par rapport au cas d'un seul difféomorphisme. Nous énonçons et montrons un Théorème de Sacksteder qui dit qu'un groupe de C^2-difféomorphismes du cercle avec minimal exceptionnel possède toujours des points hyperboliques. La preuve de ce théorème illustre bien les méthodes utilisées en dynamique des actions différentiables sur le cercle (contrôle de la distortion des dérivées).

Dans le troisième chapitre, suivant Plante, nous utilisons ce résultat de Sacksteder pour montrer qu'un groupe de C^2-difféomorphismes du cercle qui préserve une mesure sur le cercle n'a pas de minimal exceptionnel et en déduire qu'un groupe de C^2-difféomorphismes du cercle non abélien et qui préserve une mesure a une orbite finie.

Dans le quatrième chapitre, nous considérons le cas d'actions PL et illustrons par quelques résultats l'idée que des arguments de nature dynamique permettent de démontrer des résultats de nature algébrique.

Nous regrettons de n'avoir pu aborder les importants résultats de E. Ghys sur les actions de réseaux de rang au moins 2 [É Ghys : *Actions de réseaux sur le cercle,* Invent. Math. **137** (1999), 199-231] et de A. Navas sur les actions de groupes de Kazdhan [A.Navas : *Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle,* Ann. Sci. École Norm. Sup. **35** (2002), 749-758].

Table des matières

Première partie
Généralités sur les actions sur le cercle.

⋄◇♢◇⋄

Références

[Gh2001] É Ghys : *Groups acting on the circle*, L'Enseignement Mathématique **47** (2001), 329-407

1 Définitions, notations.

1.1 Actions de groupes.

Soit Γ un groupe et X un espace topologique. Une *action* (sous-entendue topologique) de Γ sur X est la donnée d'un morphisme ϕ de Γ dans $Homeo(X)$ le groupe des homéomorphismes de X :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma & \to Homeo(X) \\ \gamma & \mapsto \phi(\gamma) \end{array} \right.$$

Lorsque ϕ est injective, on dit que l'action est *fidèle*. Dans ce cas $\phi(\Gamma)$ est un sous-groupe de $Homeo(X)$ isomorphe à Γ, on dit aussi que Γ est *représentable* dans $Homeo(X)$.

Exemple 0. Se donner une action de $\mathbb{Z}$ sur X équivaut à se donner un homéomorphisme $f : X \to X$. De plus, l'action est fidèle si et seulement si f est d'ordre infini.

1.2 Dynamique d'une action de groupe.

Soit ϕ une action du groupe Γ sur l'espace topologique X.

Soit $x \in X$, on appelle *orbite* de x pour ϕ ou ϕ-*orbite* le sous-ensemble de X noté $\phi(\Gamma).x$ défini par :

$$\phi(\Gamma).x := \{\phi(\gamma)(x),\ \gamma \in \Gamma\}.$$

L'action ϕ est dite *transitive* si elle n'a qu'une seule orbite.

L'action ϕ est dite *libre* si pour tout $x \in X$, tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\phi(\gamma).x \neq x$.

Etudier la dynamique d'une action topologique c'est décrire topologiquement les orbites et leurs adhérences.

Pour comparer, classifier les actions topologiques d'un groupe abstrait fixé, on dit que deux actions ϕ_1 et ϕ_2 de Γ sur X_1 respectivement X_2 sont *conjuguées* s'il existe un homéomorphisme h de X_1 et X_2 tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait :

$$\phi_2(\gamma) = h \circ \phi_1(\gamma) \circ h^{-1}$$

On vérifie que le type topologique des orbites est un invariant de conjugaison (exercice).

2 Premiers exemples.

2.1 Le cercle S^1.

A homéomorphisme près, le cercle est l'unique variété compacte connexe de dimension 1. Il peut être défini de diverses manières :

- Le cercle unité du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$:
  $\mathcal{C}(0,1) = \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \ \}$.
- L'ensemble des *nombres complexes de module 1* :
  $S^1 = \{ \ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \ \}$.
- Le groupe des *rotations du plan euclidien* :
  $SO(2,\mathbb{R}) := \{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \ \theta \in [0, 2\pi[\ \}$.
- La variété $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ quotient de $\mathbb{R}$ par son sous-groupe des entiers :
c'est à dire l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\sim$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.
- La *droite projective réelle* $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$: l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire le quotient de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par la relation d'équivalence
  $(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$
- La droite projective réelle $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ s'identifie à la *droite réelle achevée* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par l'application (bien définie) qui à la classe du point (x,y) associe $\frac{x}{y}$.

2.2 Exemple 1. Action par translations.

Le groupe $SO(2,\mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur le cercle.

Le groupe $SO(2,\mathbb{Q})$ agit sur le cercle et toutes ses orbites sont denses.

2.3 Exemple 2. Actions par homographies.

Considérons la transformation linéaire bijective de $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$, le groupe des matrices 2×2 à coefficients réels et déterminant 1.

Cette transformation envoie droite sur droite, donc définit une bijection f_A de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ dans lui-même, appelée *homographie*. Après identification de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, l'homographie f_A a pour expression $f_A(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (on a $f_A(\infty) = \frac{a}{c}$ et $f_A(-\frac{d}{c}) = \infty$).

L'application : $\begin{cases} SL(2,\mathbb{R}) & \to Homeo(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \\ A & \mapsto f_A \end{cases}$ est une action de $SL(2,\mathbb{R})$ sur le cercle.
Cette action n'est pas fidèle car son noyau est $\{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$.
Cependant, elle induit une action fidèle du groupe quotient $PSL(2,\mathbb{R}) := \dfrac{SL(2,\mathbb{R})}{\{I,-I\}}$.
Cette action contient les rotations, elle est transitive.

Pour obtenir des actions par homographies dynamiquement intéressantes, on se restreint aux *groupes Fuchsiens* qui sont par définition les sous-groupes discrets de $PSL(2,\mathbb{R})$.

2.4 Exemple 3. Actions PL.

Pour cet exemple, nous identifions le cercle au quotient $S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ et notons Π la projection canonique de $\mathbb{R}$ sur S^1. Nous munissons S^1 de l'orientation induite par l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$ et notons $Hom\acute{e}o^+(S^1)$ le groupe des homéomorphismes de S^1 qui préservent l'orientation.

Soit $f \in Hom\acute{e}o^+(S^1)$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \Pi\downarrow & & \Pi\downarrow \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

où $\tilde{f}$ est un homéomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ tel que $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x)+1$ appelé *relevé de* f à $\mathbb{R}$, unique à composition au but par une translation entière près. Par conséquent, la différentiabilté, les valeurs des dérivées (à droite, à gauche) ne dépendent pas du choix du relevé de f et on peut donner les définitions suivantes.

Un homéomorphisme $f \in Hom\acute{e}o^+(S^1)$ est dit *affine par morceaux* ou *PL* (de l'anglais "piecewise linear") s'il existe une subdivision finie $(d_i)_{1\leq i\leq p}$ de $[0,1]$ telle la restriction de $\tilde{f}$ à $[d_i, d_{i+1}]$ est une application affine $\lambda_i x + \beta_i$ de $\mathbb{R}$.

Les d_i sont appelés les *points de coupure de* f et les λ_i *les pentes de* f.

L'ensemble noté $PL^+(S^1)$ des homéomorphismes affines par morceaux de S^1 préservant l'orientation est un sous-groupe de $Hom\acute{e}o^+(S^1)$ qui contient les rotations, son action est transitive. Comme dans le cas précédent, on obtient des actions PL intéressantes en considérant des "petits" sous-groupes de $PL^+(S^1)$. Nous définirons des groupes de ce type dans le chapitre IV, citons le plus célèbre d'entre-eux le *groupe de Thompson* T des *homéomorphismes dyadiques* du cercle, c'est à dire l'ensemble des $f \in PL^+(S^1)$ qui ont les propriétés suivantes :

- les points de coupure de f et leurs images sont des *nombres dyadiques* c'est à dire des nombres de la forme $\frac{N}{2^s}$ avec N et s entiers,
- les pentes de f sont des puissances de 2.

On vérifie (*exercice*) que cet ensemble est bien un groupe. Historiquement, ce groupe T fut inventé par R.Thompson pour être le premier exemple de groupe de présentation finie infini simple.

Deux homéomorphismes dyadiques.

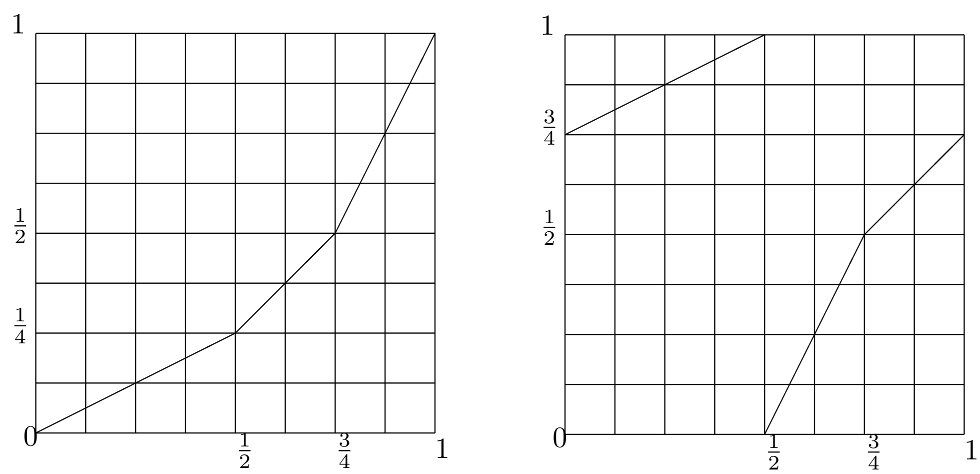


Figure 1.

Exercice. Calculer les nombres de rotation de ces homéomorphismes.

Deuxième partie
Alternatives dynamiques pour les actions sur le cercle

⋄◇♢◇⋄

Dans ce chapitre, le cercle S^1 est identifié au quotient $\frac{\mathbb{R}}{Z}$ et on note $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ la projection canonique. On munit S^1 de l'orientation induite par celle de $\mathbb{R}$, on note $[x, y]$ l'arc de cercle fermé de x à y orienté positivement (intervalle circulaire). De manière analogue, on écrit les arcs ouverts et semi-ouverts sous forme d'intervalles.

On munit S^1 de la distance définie par :

$$d(x, y) = ||x - y|| = inf\{|\tilde{x} - \tilde{y}|, \text{ où } \tilde{x}, \tilde{y} \text{ parcourent les relevés de } x, y\}.$$

On note $|\ [x, y]\ | = |\ ]x, y[\ | = d(x, y)$ la longueur d'un arc.

Soient f un homéomorphisme préservant l'orientation de S^1 et $\tilde{f}$ un relevé de f à $\mathbb{R}$. La dérivabilité de $\tilde{f}$, ses dérivées (à droite, à gauche) ne dépendent pas du relevé choisi.

Notations - Conventions.
On note $f' : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la dérivée de la restriction de $\tilde{f}$ à $[0, 1]$ et $Df : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ la différentielle de f, elle est reliée à f' par $Df(\pi(x)) = f'(x)$. Puisque f préserve l'orientation, Df et f' sont à valeurs positives. Souvent, on fera les identifications suivantes :

- S^1 et $[0, 1[$
- $x \in [0, 1[$ et $\pi(x) \in S^1$,
- f et la restriction de $\tilde{f}$ à $[0, 1[$ modulo 1 (voir figure 1),
- Df et f'.

En particulier, on appliquera le théorème des accroissements sur le cercle sous la forme : *soient a, b deux points de S^1, il existe $c \in I = [a, b]$ tel que* $Df(c) = \frac{|\ f(I)\ |}{|\ I\ |}$.

$Homéo^+(S^1)$ est l'ensemble des homéomorphismes du cercle qui préservent l'orientation,

$Difféo^r_+(S^1)$ –avec $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$– est l'ensemble des difféomorphismes C^r du cercle qui préservent l'orientation,

$PL^+(S^1)$ est l'ensemble des homéomorphismes du cercle affines par morceaux et qui préservent l'orientation.

On suppose connue la théorie de Poincaré-Denjoy.

L'objet de ce chapitre est de :

- Prouver un théorème dit "d'alternatives dynamiques" que l'on peut voir comme une généralisation aux actions de groupes du théorème "classique" de Poincaré pour les homéomorphismes du cercle. Ce théorème décrit les minimaux pour une action sur le cercle.

- Etudier quelques limites et généralisations possibles du théorème de Denjoy pour les actions de groupe sur le cercle :

  - limite : il existe des cantor invariants en régularité C^∞ et PL :
    les exemples de feuilletages espèces rares de G.Hector ;
  - une généralisation : un théorème de Sacksteder.

Références.

[Gh2001] É.Ghys : *Groups acting on the circle*,
L'Enseignement Mathématique **47** (2001),329-407.

[He1976] G.Hector : *Quelques exemples de feuilletages espèces rares*
Annales de l'institut Fourier **26** (1976), 239-264

[Hu1988] S.Hurder : *Ergodic theory of foliations and a theorem of Sacksteder*
Lecture Notes in Math. **1342** (1988), 291-328

[Hu1991] S.Hurder : *Exceptionnal minimal sets of $C^{1+\alpha}$-group action on the circle*
Erg. Theory and Dynamical Systems **11** (1991), 455-467

[DKN2006] B.Deroin, V.Klepsyn, A.Navas : *Dynamique unidimensionnelle en régularité intermédiaire*, preprint ArXiv (2006).

[Sa1965] R.Sacksteder : *Foliations and pseudogroups*,
Amer. Jour. Math. **87** (1965) 79-102.

⋄◇◊◇⋄

3 Ensembles Invariants- Ensembles minimaux.

Soit X un espace métrique compact et G un sous-groupe de $Hom\acute{e}o(X)$.

3.1 Définition. Ensemble invariant.

Un sous-ensemble K de X est dit *invariant par* G ou G-*invariant* si pour tout $g \in G$ on a $g(K) \subset K$.

3.2 Propriétés.

Soit K, K_1 et K_2 des ensembles G-invariants. Alors :

- pour tout, $g \in G$ on a $g(K) = K$,

- l'adhérence $\overline{K}$, la frontière ∂K, l'intérieur $int(K)$ et l'ensemble K' des points d'accumulation de K sont des ensembles G-invariants.

- $K_1 \cap K_2$, $K_1 \cup K_2$ sont des ensembles G-invariants.

Preuves. (Exercice)

3.3 Définition. Ensemble minimal.

Un compact non vide G-invariant K est dit *minimal* si les seuls fermés invariants qu'il contient sont $\emptyset$ et K.

Exemple. Une orbite finie est un ensemble minimal.

3.4 Propriétés des minimaux.

1. *Deux minimaux sont disjoints ou égaux.*
2. *Tout compact K non vide et G-invariant contient un ensemble minimal.*
3. *L'action possède au moins un minimal.*
4. *L'orbite de tout point d'un minimal est dense dans ce minimal.*

Preuve des propriétés.

La propriété 1 résulte du fait que l'intersection de deux compacts invariants est un compact invariant.

La preuve de la propriété 2 est basée sur le **Lemme de Zorn :** "*tout ensemble ordonné dans lequel toute partie totalement ordonnée est minorée admet un plus petit élément.*"

Soit K un compact non vide G-invariant, considérons la collection $\mathcal{C}$ des compacts non vides G-invariants contenus dans K munie de la relation d'ordre donnée par l'inclusion.

Comme toute intersection de compact est compact, toute intersection d'ensembles G-invariants est G-invariante et que toute intersection décroissante de compacts non vides est non vide, $\mathcal{C}$ vérifie les hypothèses du lemme de Zorn. En résulte que K contient un ensemble minimal.

La propriété 3 est une conséquence directe de la propriété 2 et de l'observation suivante : "l'adhérence de toute orbite est un compact G-invariant non vide".

Cette même observation et la minimalité implique la propriété 4.

4 Alternatives dynamiques.

4.1 Théorème d'alternatives dynamiques

Théorème (Poincaré). *Soit G un sous-groupe de $Homéo^+(S^1)$.*

Le groupe G vérifie l'un des trois cas exclusifs suivants :

(1)- G a une orbite finie,

(2)- toutes les orbites de G sont denses

(3)- G possède un minimal K homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor. Le minimal K est alors dit exceptionnel.

Dans les situations (2) et (3), le groupe G possède un unique minimal (S^1 dans (2) et K dans (3)) qui de plus est l'ensemble d'accumulation de toute G-orbite.

4.2 Preuve du théorème.

Soit a un point de S^1, l'adhérence $\overline{G(a)}$ de la G-orbite $G(a)$ de a est un compact G-invariant non vide. D'après la propriété (2) des minimaux, $\overline{G(a)}$ contient un minimal K.

L'ensemble K' des points d'accumulation de K et la frontière ∂K de K sont des compacts G-invariants. Ainsi par minimalité de K ils sont soit vides soit égaux à K. Par conséquent, on peut distinguer les situations suivantes.

1- $K' = \emptyset$ alors K est discret donc fini. Par conséquent et par minimalité, K est une orbite finie.

2- $K' = K$. Autrement dit, K est sans point isolé. D'autre part, ou bien :

- $\partial K = \emptyset$ alors $K = S^1$ et toute orbite de G est dense (propriété 4 des minimaux),

ou bien

- $\partial K = K$ alors $int(K) = \emptyset$. Par conséquent, K est un compact non vide d'intérieur vide et sans point isolé, il est homéomorphe au triadique de Cantor.

Nous devons maintenant établir l'unicité de K. Nous montrons la

Propriété. *Si G possède un ensemble minimal K infini alors K est l'unique minimal de G et est l'ensemble d'accumulation $(G(x))'$ de toute orbite $G(x)$.*

Si $K = S^1$, la propriété est claire puisque deux minimaux sont disjoints ou égaux et que toute orbite dans un minimal y est dense.

Si K est un ensemble de Cantor. Pour avoir la propriété, il suffit de montrer que pour tout $x \in S^1$, l'ensemble $(G(x))'$ des points d'accumulation de $G(x)$ est $K\cdot$ En effet, dans ce cas aucune orbite de G ne pourra être finie ou dense.
Soit $x \in S^1$.

Cas 1 : $x \in K$. Alors l'ensemble $(G(x))'$ est un compact contenu dans K, non vide (car contient $K \setminus G(x)$) et G-invariant donc $(G(x))' = K$, par minimalité de K.

Cas 2 : $x \notin K$. Notons I la composante connexe de $S^1 \setminus K$ qui contient x, c'est un intervalle ouvert $]a, b[$ avec a et b dans K.

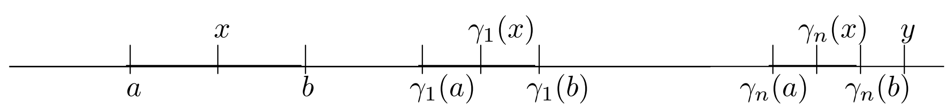
Soit $y \in K$. Puisque $G(a)$ est dense dans K, il existe un suite $\gamma_n(a)$ qui converge vers y et on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que la distance de $\gamma_n(a)$ à y décroit strictement.

Les intervalles $\gamma_n(I)$ sont deux à deux disjoints. – En effet :

- deux tels intervalles sont disjoints ou égaux, sinon il existe deux entiers n et n' tels que $\gamma_n(I) \cap \gamma_{n'}(I) \neq \emptyset$ et $\gamma_n(I) \neq \gamma_{n'}(I)$, alors une extrémité d'un de ces deux intervalles appartient à l'intérieur de l'autre intervalle donc au complémentaire de K, mais un tel point étant bord d'une composante connexe du complémentaire de K appartient nécesairement à K.
- s'ils sont égaux leurs extrémités sont égales, et ceci contredit le fait que la distance de $\gamma_n(a)$ à y décroit strictement.–

Par conséquent, la longueur des $\gamma_n(I)$ tend vers 0. Finalement $d(\gamma_n(x), y) \leq d(\gamma_n(x), \gamma_n(a)) + d(\gamma_n(a), y)$ tend vers 0 avec n. Donc $\gamma_n(x)$ est une suite non stationnaire qui converge vers y.

En conclusion, $K \subset (G(x))'$ et l'égalité résulte du fait que les $\gamma_n(I)$ étant disjoints, un point de $(G(x))'$ appartient nécessairement à $\overline{G(a)} = K$.



5 Exemples de dynamiques.

5.1 Actions de $\mathbb{Z}$.

Lorsque $G = \mathbb{Z}$, les trois situations dynamiques proposées par le théorème d'alternatives dynamiques sont possibles :

La situation 1 est réalisée par les rotations rationnelles,
La situation 2 est réalisée par les rotations irrationnelles,
La situation 3 est réalisée par les exemples de Denjoy.

Mais, d'après le théorème de Denjoy, la situation 3 ne se produit pas lorsqu'on suppose suffisament de régularité pour $G = \mathbb{Z}$, en particulier lorsqu'on suppose que $G \subset Diff_+^2(S^1)$. Nous verrons voir en 5.4 que ceci n'est plus vrai pour un groupe quelconque.

5.2 Autres exemples.

$SO(2,\mathbb{Q})$ et $SO(2,\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$ agissent avec orbites denses sur S^1 alors que chacun de leurs éléments a des points périodiques.

5.3 Homéomorphismes de l'intervalles.

Exercice. Soit $I=[0,1]$, montrer que le groupe $Hom\acute{e}o^+(I)$ des homéomorphismes croissants de I s'injecte dans $Hom\acute{e}o^+(S^1)$ (au sens où il existe un morphisme injectif i de $Hom\acute{e}o^+(I)$ dans $Hom\acute{e}o^+(S^1)$) et n'a pas de torsion. Décrire les minimaux de $i(G)$, pour un sous-groupe G de $Hom\acute{e}o^+(I)$.

5.4 Minimaux exceptionnels dans $Diff_+^\infty(S^1)$ et $PL^+(S^1)$.

Ces exemples sont dus à G. Hector ([He1976]). On considère G le sous-groupe de $PL^+(S^1)$ engendré par les deux homéomorphismes R et g représentés sur la figure ci-dessous, où S^1 est identifié au cercle $\frac{\mathbb{R}}{12\mathbb{Z}}$ de longueur 12. Un homéomorphisme f de S^1 est identifié à une bijection de $[0,12[$ par $f \equiv \tilde{f}(mod 12)$, où $\tilde{f}$ est un relevé de f à $\mathbb{R}$. La loi de composition sur G est notée ".".

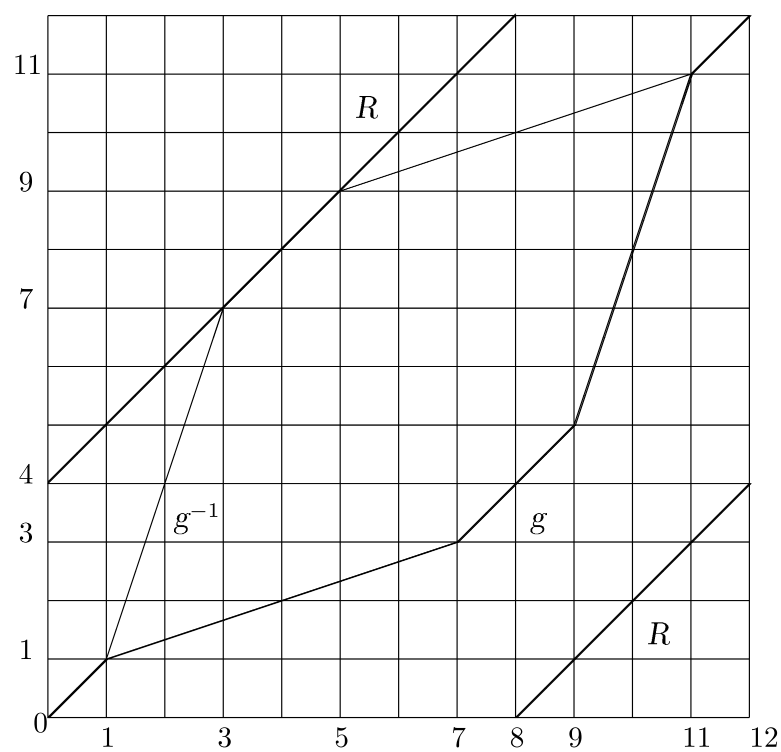


figure 3

On va montrer que $G =< R, g >$ possède un minimal exceptionnel qui est en fait le complémentaire de la G-orbite de l'intervalle circulaire $I = [11, 12[\cup[0, 1]$.

Décrivons précisément les générateurs de G et leurs propriétés.

$$\boxed{\begin{array}{l} R : x \mapsto x + 4 \ (mod 12) \text{ est une rotation d'ordre 3.} \\ g : \begin{cases} g(x) = x & \text{si } x \in [11, 12[\cup[0, 1] \\ g(x) = \frac{1}{3}(x-1)+1 & \text{si } x \in [1, 7] \\ g(x) = x - 4 & \text{si } x \in [7, 9] \\ g(x) = 3x - 22 & \text{si } x \in [9, 11]. \end{cases} \end{array}}$$

L'homéomorphisme R étant d'ordre 3 et les graphes de g et g^{-1} étant symétriques par rapport à la seconde diagonnale du carré (càd la droite d'équation $y = 12 - x$), on a les relations (*) (exercice) :

$$\boxed{(*) \qquad \begin{array}{ll} R^3 = Id & R^2 = R^{-1} \\ g^{-1}R = R^{-1}g & gR^{-1} = Rg^{-1} \end{array}}$$

Proposition 1. Soit $\gamma \in G$ alors :
$\gamma(I)$ est soit disjoint soit égal à I et si $\gamma(I) = I$ alors $\gamma_{|I} = Id_{|I}$.

Preuve de la proposition 1.

Notons G_{er} l'ensemble des éléments de G qui s'écrivent :

$$g^{\varepsilon_p n_p} R^{\varepsilon_P} \ ..... \ g^{\varepsilon_1 n_1} R^{\varepsilon_1},$$

avec $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ et $n_i \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 1. Ecriture "réduite"' des éléments de G.
Soit $\gamma \in G$ alors il existe $\gamma' \in G_{er} \cup \{Id\}$, $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$ et $p \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\boxed{\gamma = R^\varepsilon \gamma' g^p}$$

Preuve du lemme 1. La preuve se fait par récurrence sur la longueur relative à $\{R, g\}$ de γ.

> Soit $\gamma \in G$, on définit $l(\gamma)$ comme le nombre minimal de lettres nécessaires pour écrire γ comme mot en R et g et $l(Id) = 0$.

Si $l(\gamma) = 0$ alors $\gamma = Id = R^0 \ Id \ g^0$, la propriété est clairement vérifiée.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, supposons (HR) : tout $\delta \in G$ de longueur au plus $m - 1$ s'écrit :

$$\delta = R^\varepsilon \delta' g^p$$

avec $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $p \in \mathbb{Z}$ et $\delta' \in G_{er} \cup \{Id\}$ et montrons que tout mot de longueur m a aussi une telle écriture.

Soit γ de longueur m, alors il existe $\tilde{\gamma}$ de longueur $m-1$ tel que l'un des deux cas suivant est vérifié :

(1). $\gamma \ = \ R^{\sigma}\tilde{\gamma} \underset{(HR)}{=} R^{\sigma}\ R^{\varepsilon}\ \tilde{\gamma}'\ g^{p}$ et la propriété est claire puisque $R^2 = R^{-1}$ ou

(2). $\gamma \ = \ g^{\sigma}\ \tilde{\gamma} \underset{(HR)}{=} g^{\sigma}\ R^{\varepsilon}\ \tilde{\gamma}'\ g^{p}$ où $\sigma = \pm 1$.

(2.1). Si $\sigma\varepsilon > 0$ alors on a l'écriture souhaitée.

(2.2). Si $\sigma\varepsilon \leq 0$ alors ou bien :

(2.2.1)- $\varepsilon \neq 0$ alors $\varepsilon = -\sigma$ et $\gamma \ = \ R^{\sigma}\ g^{-\sigma}\ \tilde{\gamma}'\ g^{p}$, d'après les relations (*), donc

- si $\tilde{\gamma}' = Id$ on a $\gamma \ = \ R^{\sigma}\ g^{p-\sigma} = \ R^{\sigma}\ Id\ g^{p-\sigma}$,
- si $\tilde{\gamma}' \in G_{er}$ alors $\tilde{\gamma}' = g^{\zeta n} R^{\zeta}$ ...... et

$$\gamma \ = \ R^{\sigma}\ g^{-\sigma}\ g^{\zeta n}\ R^{\zeta}\ .... \ = \ R^{\sigma}\ g^{\zeta n-\sigma}\ R^{\zeta}\ ......\ g^{p}$$

or $\zeta n - \sigma$ garde le signe de ζn ou s'annule et on a l'écriture souhaitée ;

(2.2.2)- $\varepsilon = 0$ alors $\gamma \ = \ g^{\sigma}\ \tilde{\gamma}'\ g^{p} \ = \ g^{\zeta n-\sigma} R^{\zeta}$ ...... g^{p} et pour la même raison que ci-dessus, on a l'écriture souhaitée.

Lemme 2. Eléments errants de G.
Si $\gamma_{er} \in G_{er}$ alors $\gamma_{er}(I) \subset\ ]1,3[\ \cup\ ]9,11[\ =:\ J$, donc $\gamma_{er}(I)$ est disjoint de I.

Preuve du lemme 2.
Fixons $\gamma_{er} = g^{\epsilon_p n_p} R^{\epsilon_p}$ ...... $g^{\epsilon_1 n_1} R^{\epsilon_1} \in G_{er}$ et notons $g_k = g^{\epsilon_k n_k} R^{\epsilon_k}$ ..... $g^{\epsilon_1 n_1} R^{\epsilon_1}$.
On va montrer, par récurrence sur $k = 1, ..., p$, que $g_k(I) \subset J$.
Pour $k = 1$, on a $g_1 = g^{\epsilon_1 n_1} R^{\epsilon_1}$. Donc

$$g_1(I) = g^{\epsilon_1 n_1} R^{\epsilon_1}(I) = \begin{cases} g^{n_1}(]3,5[) \subset]1,3[\subset J & \text{si } \epsilon_1 = 1 \\ g^{-n_1}(]7,9[) \subset]9,11[\subset J & \text{si } \epsilon_1 = -1 \end{cases}$$

Supposons maintenant que $g_{k-1}(I) \subset J$ et montrons que $g_k(I) \subset J$.
On a $g_k(I) = g^{\epsilon_k n_k} R^{\epsilon_k} g_{k-1}(I) \subset g^{\epsilon_k n_k} R^{\epsilon_k}(J)$, par hypothèse de récurrence,

$$\text{d'où } g_k(I) \subset g^{\epsilon_k n_k} R^{\epsilon_k}(J) = \begin{cases} g^{n_k}(R(J)) & \text{si } \epsilon_k = 1 \\ g^{-n_k}(R^{-1}(J)) & \text{si } \epsilon_k = -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} g^{n_k}\ (]5,7[\cup]1,3[) \ \subset \ g^{n_k}(]1,7[) \ \subset]1,3[\ \subset J & \text{si } \epsilon_k = 1 \\ g^{-n_k}(]5,7[\cup]9,11[) \subset g^{-n_k}(]5,11[) \subset]9,11[\subset J & \text{si } \epsilon_k = -1. \end{cases}$$

Preuve de la proposition 1.
Soit $\gamma \in G$, d'après le lemme 1, $\gamma(I) = R^{\varepsilon}\gamma' g^{p}(I)$, avec $\gamma' \in G_{er} \cup \{Id\}$.
Si $\gamma' \in G_{er}$ alors $\gamma(I) = R^{\varepsilon}\gamma'(I) \subset R^{\varepsilon}(J) \subset]1,3[\cup]5,7[\cup]9,11[$ est bien disjoint de I.

Si $\gamma' = Id$ alors $\gamma_{|I} = R^\varepsilon g^p_{|I} = R^\varepsilon$. Si $\varepsilon \neq 0$ alors $\gamma(I)$ est encore disjoint de I et si $\varepsilon = 0$ on a $\gamma_{|I} = Id_{|I}$. ◄

G **possède un minimal exceptionnel.**

Fait 1. G n'a pas d'orbite finie.

En effet, sinon il existe $x_0 \in S^1$ tel que $G(x_0)$ est finie, en particulier la g-orbite de x_0 est finie, x_0 est un point périodique de g, mais d'après le théorème de Poincaré tous les points périodiques de g ont la même période, or $g(0) = 0$ donc $g(x_0) = x_0$ par suite $x_0 \in\ [11, 12[\cup [0, 1]$ l'ensemble des points fixes de g.

Mais la suite $g^n R(x_0)$ décroit strictement vers 1, donc $\{g^n R(x_0), n \in \mathbb{N}\}$ est infini, ce qui contredit la finitude de $G(x_0)$.

Fait 2. G n'a pas d'orbite dense.

En effet, sinon il existe $x \in S^1$ tel que $\overline{G(x)} = S^1$, en particulier on peut trouver deux points distincts x' et $x'' = \gamma(x')$ de $G(x) \cap I$, mais alors $\gamma(I) \cap I \neq \emptyset$ et $\gamma_{|I} \neq Id_{|I}$ ce qui contredit la proposition 1.

Conclusion. Le théorème d'alternative dynamique montre que seule la situation (3) est possible, autrement dit que G a un minimal exceptionnel.

Le cas C^∞. On peut modifier g dans des demi-voisinages des points 1_+, 7_-, 9_+, 11_- de manière à la rendre C^∞ et de sorte que la symétrie par rapport à la seconde diagonale soit préservée. Dans ce cas les relations (*) sont préservées ainsi que la preuve de l'existence d'un minimal exceptionnel.

6 Le théorème de Sacksteder.

Théorème de Sacksteder. *Si G est un sous groupe de type fini de $Diff^+_2(S^1)$ préservant un minimal exceptionnel K_0 alors il existe $x_0 \in K_0$ et $\gamma_0 \in G$ tels que $\gamma_0(x_0) = x_0$ et $|D\gamma_0(x_0)| < 1$.*
On dit que x_0 est un point hyperbolique de G.

Preuve du Théorème de Sacksteder. Soient G un sous-groupe de $Diff^2_+(S^1)$ préservant un minimal exceptionnel K_0 et $I_0 =]a, b[$ une composante connexe du complémentaire de K_0. On rappelle que deux composantes connexes du complémentaire de K_0 sont disjointes ou égales.

Plan de la preuve du théorème.

Pour montrer l'existence d'un point hyperbolique dans K_0, nous allons montrer que : *"il existe un intervalle fermé V_0 contenant strictement I_0 et $g \in G$ tels que $g(V_0) \subset V_0$ et $Dg_{|V_0} \leq \frac{1}{4}$."*

> Ainsi, d'après le théorème du point fixe, il existe un unique $x_0 \in V_0$ tel que $g(x_0) = x_0$. En fait $\{x_0\} = \cap g^n(V_0)$. Cet ensemble $\cap g^n(V_0)$ contient les valeurs d'adhérence de la suite $\{g^n(a), n \in \mathbb{N}\} \subset K_0$. Donc $\lim g^n(a)$ existe et vaut x_0 et puisque K_0 est fermé on a $x_0 = \lim g^n(a) \in K_0$.

Définitions.

Fixons $S = \{g_1, ..., g_s\}$ un système de générateurs de G. On définit $l_s : G \to \mathbb{N}$, la fonction qui à un élément γ de G associe le nombre minimal d'éléments de S nécessaires pour écrire γ.

Soit $x \in G(a)$, on définit $k(x) = inf\{l_S(\gamma)$, où $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma(a) = x\}$.

Par hypothèse $a \in K = (G(a))'$ (théorème d'alternatives dynamiques). Donc, il existe une suite w_n d'éléments de G telle que :

(i) $w_n(a) \to a$,

(ii) la suite $w_n(a)$ est strictement monotone, au sens où la suite $d(w_n(a), a)$ décroit strictement vers 0,

(iii) quitte à changer w_n sans changer $w_n(a)$, on peut supposer que $k(w_n(a)) = l_S(w_n)$.

On voit que la suite $k(w_n(a))$ n'est pas bornée. En effet, sinon l'ensemble des $k(w_n(a))$ serait fini et l'ensemble des $w_n(a)$ aussi ce qui contredit (ii). Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer de plus que :

(iv) la suite $k(w_n(a))$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

On pose $I_{k(w_n(a))} = w_n(I_0)$ et $W_{k(w_n(a))} = w_n$. Les I_m sont deux à deux disjoints. –En effet, sinon il existe $m < m'$ tels que $I_m = I_{m'}$ et puisque l'orientation est préservée on a $W_m(a) = W_{m'}(a)$ et la minimalité de $m' = k(W_m(a))$ est contredite.– Par suite, leurs longueurs $|I_m| = |W_m(I_0)|$ tendent vers 0.

Proposition 1. *Soient G un sous-groupe de type fini de $Diff_2^+(S^1)$ préservant un minimal exceptionnel, $]a, b[$ une composante connexe de son complémentaire et w_n une suite d'entiers comme ci-dessus.*

Alors il existe deux constantes C et $\delta_0 > 0$ telles que, pour tout $m \in \{k(w_n(a)), n \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $x \in V_0 = [a - \delta_0, a + \delta_0]$ on a :

$$DW_m(x) \leq C\ |W_m(I_0)|.$$

Conclusion : existence de l'intervalle de contraction V_0.

Maintenant, on choisit $m \in \{k(w_n(a)), n \in \mathbb{N}\}$ assez grand pour que :

- $|DW_m(x)| \leq \frac{1}{4}$, pour $x \in V_0 :=]a - \delta_0, a + \delta_0[$ et
  (un tel choix est possible d'après la proposition 1 et puisque $|W_m(I_0)| \to 0$)
- $W_m(a) \in]a - \frac{\delta_0}{2}, a[$ (un tel choix est possible d'après (ii)).

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que $W_m(V_0) \subset V_0$.

On a $|W_m([a - \delta_0, a + \delta_0])| \leq \frac{1}{4}|[a - \delta_0, a + \delta_0]| = \frac{\delta_0}{2}$ et $W_m(a) \in W_m([a - \delta_0, a + \delta_0])$ donc $V_0 \subset [W_m(a) - \frac{\delta_0}{2}, W_m(a) + \frac{\delta_0}{2}] \subset [a - \delta_0, a + \delta_0] = V_0$ car $W_m(a) \in]a - \frac{\delta_0}{2}, a[$.

Preuve la proposition 1.

Hypothèses Générales. Soient $G =< g_1, ..., g_s >$ un sous-groupe de $Diff^2_+(S^1)$ préservant un minimal exceptionnel K_0 et $]a, b[$ une composante connexe du complémentaire de K_0. On pose $\theta = \sup_{i=1,...,s} |\frac{g_i''}{g_i'}|$.
Soient $m \in \mathbb{N}$ et $W \in G$ tels que $k(W(a)) = l_S(W) = m$. On écrit $W = g_{i_m} \circ .... \circ g_{i_1}$. On pose $h_0 = Id$ et pour $j = 1, ..., m$ on pose $h_j = g_{i_j} \circ .... \circ g_{i_1}$, en particulier $W = h_m$. Pour $x \in S^1$, on note $x_j = h_j(x)$.

Remarques. - L'hypothèse de régularité C^2 implique que θ est finie.
- Pour tout $j = 0, ..., m$, on a $k(h_j(a)) = j$ (Exercice).

Lemme 1 (lemme de distortion). *Sous les hypothèses générales.*
Pour tous $x, y \in S^1$, pour tout $0 \leq p \leq m$ on a :

$$-\theta \sum_{j=0}^{p-1} |x_j - y_j| \leq \log\left(\frac{Dh_p(x)}{Dh_p(y)}\right) \leq \theta \sum_{j=0}^{p-1} |x_j - y_j|.$$

Preuve du Lemme 1.

$$|\log\left(\frac{Dh_p(x)}{Dh_p(y)}\right)| = |\log Dh_p(x) - \log Dh_p(y)| =$$

$$= |\log D(g_{i_p} \circ .... \circ g_{i_1})(x) - \log D(g_{i_p} \circ .... \circ g_{i_1})(y)| =$$

– Or $D(g_{i_p} \circ .... \circ g_{i_1})(x) = Dg_{i_p}(g_{i_{p-1}} \circ .... \circ g_{i_1}(x)) \times ... \times Dg_{i_1}(x)$
$= Dg_{i_p}(x_{p-1}) \times ... \times Dg_{i_j}(x_{j-1}) \times ... \times Dg_{i_1}(x).$

–

$$\left|\log\left(\frac{Dh_p(x)}{Dh_p(y)}\right)\right| = \left| \sum_{j=0}^{p-1} \log Dg_{i_j}(x_j) - \log Dg_{i_j}(y_j) \right|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{p-1} |\log Dg_{i_j+1}(x_j) - \log Dg_{i_j+1}(y_j)| \leq \sum_{j=0}^{p-1} |(\log Dg_{i_j})'(c_j)||x_j - y_j|.$$

Pour $c_j \in [x_j, y_j]$, d'après le théorème des accroissements finis. Et par définition de θ, on a

$$|\log\left(\frac{Dh_p(x)}{Dh_p(y)}\right)| \leq \theta \sum_{j=0}^{p-1} |x_j - y_j|. \blacktriangleleft$$

Lemme 2. *Sous les hypothèses générales, on a*
(a) $\sum_{p=0}^{m-1} Dh_p(a) \leq C_0 := \frac{e^\theta}{|I_0|}$, *(b)* $DW(a) \leq C_0 |W(I_0)|$.

Preuve du Lemme 2. Notons $J_p = h_p(I_0)$, pour $p = 0, ..., m$. Puisque $k(h_m(a)) = m$, pour tout $p = 0, ...m$, on a $k(h_p(a)) = p$ (exercice).

Par conséquent les J_p sont deux à deux disjoints et $\sum_{p=0}^{m} |J_p| \leq 1$.

D'autre part, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $p = 0, ..., m$ il existe $d^p \in J_p$ tel que $Dh_p(d^p) = \frac{|J_p|}{|I_0|}$. Donc :

$$(*) \quad \sum_{p=0}^{m} Dh_p(d^p) \leq \frac{1}{|I_0|}.$$

En utilisant le lemme 1, on obtient pour tout $p = 0, ..., m$:

$$(**) \;\; Dh_p(a) \leq Dh_p(d^p) \;\; exp \; (\;\; \theta \sum_{j=0}^{p-1} |a_j - d_j^p|) \leq Dh_p(d^p) e^{\theta},$$

car les a_j et d_j^p appartiennent à J_j et les J_j sont disjoints donc $\sum_{j=0}^{p-1} |a_j - d_j^p| \leq 1$,

- Par suite, en sommant pour $p = 0, ..., m-1$ et en utilisant $(*)$, on obtient :

$$\sum_{p=0}^{m-1} Dh_p(a) \;\; \leq \;\; \sum_{p=0}^{m-1} Dh_p(d^p) \; e^{\theta} \;\; \leq \;\; \frac{e^{\theta}}{|I_0|} := C_0.$$

- Par ailleurs, $(**)$ avec $p = m$ s'écrit :

$$(**) \;\; DW(a) \;\; \leq \;\; DW(d^m) \;\; e^{\theta} \;\; \leq \;\; e^{\theta} \frac{|J_m|}{|I_0|}.$$

Finalement, $J_m = W(I_0)$ et on a le (b). ◀

Lemme 3. *Sous les hypothèses générales. Fixons $\lambda > 1$ et $\delta > 0$ tels que $e^{\lambda\delta\theta C_0} \leq \lambda$. Alors pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta]$ on a :*

$$DW(x) \leq \lambda DW(a).$$

Remarque : $\lambda = e$ et $\delta = \frac{1}{\theta C_0}$ conviennent.

Preuve du Lemme 3. Fixons $\lambda > 1$ et $\delta > 0$ tels que $e^{\lambda\delta\theta C_0} \leq \lambda$.

Puisque $W = h_m$, on doit montrer que $Dh_m(x) \leq \lambda Dh_m(a)$. On va montrer par récurrence sur $p = 0, ..., m$ que $Dh_p(x) \leq \lambda Dh_p(a)$, pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta]$.

Pour $p = 0$, on a $h_0 = Id$ et l'estimation voulue est clairement vérifiée.

Soit $p \in \{0, ..., m\}$, on suppose que pour tout $j \in \{0, ..., p-1\}$ et pour tout $x' \in [a - \delta, a + \delta]$, on a $Dh_j(x') \leq \lambda Dh_j(a)$.

Soit $x \in]a-\delta, a+\delta[$. D'après le lemme 1, on a :

$$Dh_p(x) \leq Dh_p(a) \;\; exp\ (\theta \sum_{j=0}^{p-1} |x_j - a_j|) \leq Dh_p(a) \;\; exp\ (\theta |x-a| \sum_{j=0}^{p-1} Dh_j(e_j)),$$

avec $e_j \in]a-\delta, a+\delta[$ donné par le théorème des accroissements finis.

D'autre part, on a $|x-a| \leq \delta$ et pour tout $j = 0, ...p-1$, par hypothèse de récurrence, $Dh_j(e_j) \leq \lambda Dh_j(a)$. Par conséquent :

$$Dh_p(x) \leq Dh_p(a) \;\; exp\ (\theta\delta\lambda \sum_{j=0}^{p-1} Dh_j(a)) \leq Dh_p(a) e^{\theta\delta\lambda C_0},$$

d'après le lemme 2.

Or, par hypothèse sur λ et δ, on a $e^{\theta\delta\lambda C_0} \leq \lambda$ et finalement $Dh_p(x) \leq \lambda Dh_p(a)$. ◀

Preuve de la Proposition 1. Choisissons δ_0 et λ comme dans le lemme 3.

Pour tout $x \in V_0 = [a-\delta_0, a+\delta_0]$, on a par le lemme 3 :

$$DW(x) \leq \lambda DW(a) \leq \lambda C_0 |W(I_0)|.$$

par le lemme 2 (b). Pour conclure, il suffit de poser $C = \lambda C_0$. ◀

Généralisations.

En classe intermédiaire (entre C^1 et C^2). Le problème de la validité en classe inférieure à C^2 a été initié par Hurder ([Hu 1988] et [Hu 1991]) et prolongé tout récemment par Deroin-Klepsyn-Navas ([DKN2006]) qui améliorent aussi la conclusion en prouvant l'existence dans G d'éléments n'ayant que des points fixes hyperboliques.

Remarque sur le cas PL. Il est facile de voir qu'avec de légères modifications des preuves, on peut avoir les estimations voulues sur l'intervalle $[a, a+\delta]$. Par contre, pour les estimations sur l'intervalle $[a-\delta, a]$ les arguments du cas C^2 ne fonctionnent plus. En effet, le lemme 1 (de distortion) et par suite le lemme 3 utilisent fortement la continuité des dérivées des éléments de G. Ils ne sont plus valables dans le cas PL lorsque le minimal contient un point de coupure d de l'un des générateurs, en effet l'orbite de d rencontre $[a-\delta, a]$ une infinité de fois et DW_m pour m assez grand pourrait avoir un grand nombre N_m de sauts sur $[a-\delta, a]$ et la majoration de $\frac{DW(x)}{DW(a)}$ dépendrait de N_m.

Exercice. Trouver des points hyperboliques dans l'exemple de la section 5.3.

⋄⋄◇⋄⋄

Troisième partie
Mesures invariantes.

⋄◇◊◇⋄

L'objet de ce chapitre est d'étudier les groupes d'homéomorphismes (difféomorphismes) du cercle qui ont la propriété de préserver une mesure finie.

Nous rappelons quelques généralités sur les mesures : support, invariance, théorème de Krilov-Bogolioubov. Les références principales pour ces généralités sont : [Fathi1994], [Has-Kat1995], [Herman1979] et [Walters1985].

Ensuite, nous prouvons un résultat de J. Plante ([Pl1975]) qui dit qu'un groupe de C^2-difféomorphismes qui préserve une mesure ne peut avoir de minimal exceptionnel.

Références.

[Fathi 1994], A. Fathi, cours de l'école d'été, Grenoble 1994.

[Herman1979], M. Herman : *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., **49**, (1979), 5-234.

[Has-Kat1995], B.Hasselblatt et A.Katok : *Introduction to the modern theory of dunamical systems*, Cambridge University Press (1995)

[Ma2000], G. Margulis : *Free subgroups of the homeomorphsim group of the circle.*; C.R.A.S **331** (2000) 669-674

[Pl1975], J.Plante : *Measure preserving pseudogroups and a theorem of Sackstder*, Ann. Inst. Fourier **25** (1975), 237-249.

[Walters1985], P.Walters *An introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag (1985).

7 Mesures invariantes. Généralités.

Soit X un espace métrique compact muni de $\mathcal{B}(X)$ la tribu des boréliens de X. Soit G un sous-groupe du groupe $Homéo(X)$ des homéomorphismes de X.

7.1 Support d'une mesure.

Définition. Soit $\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}^+$ une mesure borélienne finie, on appelle *support* de μ le sous-ensemble de X noté $supp\mu$ défini par $supp\mu := \{x \in X$ tel que $\mu(U) > 0$, pour tout ouvert U contenant x $\}$.

Propriétés du support.
(1) - $supp\mu$ est compact.
(2) - $\mu(X \setminus supp\mu) = 0$.
(3)- Si $\mu(A) = \mu(X)$ alors $supp\mu \subset \overline{A}$.
En d'autre termes, on peut voir le support d'une mesure comme le plus petit fermé de μ-mesure pleine.

Preuves. (*exercice*)

7.2 Mesures invariantes, définitions.

Soit $\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}^+$ une mesure borélienne finie.

Propriétés-Définitions. Soit $g \in Homéo(X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- la mesure image $g_*\mu$ de μ par g est égale à μ,
- pour tout borélien A on a $\mu(g^{-1}(A) = \mu(A)$,
- pour tout borélien A on a $\mu(g(A)) = \mu(A)$,
- pour tout fonction continue $\phi : X \to \mathbb{R}$, on a $\int_X (\phi \circ g)\, d\mu = \int_X \phi\, d\mu$.

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on dit que μ est *invariante par* g.

Exercice : les preuves.

Définition. On dit que la mesure μ est *invariante par* G, si pour tout $g \in G$, la mesure μ est invariante par g.

Propriétés. Soit μ une mesure finie invariante par G.
(1)- Le support de μ est un ensemble invariant par G.
(2)- Le point $a \in X$ est un atome de μ si et seulement si la G-orbite de a est finie.
(2')- Si $x \notin G'(x)$ (i.e il existe V un voisinage de x tel que $G(x) \cap V = \{x\}$) et $x \in supp\mu$ alors $G(x)$ est finie.
(3)- Lorsque $X = S^1$, si G n'a pas d'orbite finie alors μ est sans atome et son support est l'unique minimal de G (cercle ou Cantor).
Preuves.
(1) (2) et (2') : Exercices.

(3)- Le fait que μ soit sans atome résulte du point précédent. D'après (1), le support de μ est un fermé, G-invariant non vide il contient donc l'unique minimal de G, si ce minimal est S^1 alors $supp\mu = S^1$ et on a fini. Si ce minimal est un

Cantor K, on doit montrer que le support de μ est contenu dans K. Sinon, soit $x \in supp\mu \cap (S^1 \setminus K)$ et $]a, b[$ la composante connexe du complémentaire de K qui contient x. Par définition du support on a $\mu(]a, b[) = \delta > 0$ et $\mu(g(]a, b[)) = \delta > 0$ pour tout $g \in G$, par invariance de μ. Mais$S^1 \subset \bigcup_{g \in G} g(]a, b[$ est de μ-mesure infinie car peut-être écrit comme réunion infinie (car l'orbite de a est infinie) d'ouverts deux à deux disjoints tous de μ-mesure δ. Ce qui contredit le fait que μ soit finie.

7.3 Existence d'une mesure invariante. *([Fathi1994] [Herman1979])*

Théorème de Krilov-Bogolioubov. *Soit X un espace métrique compact, on note $\mathcal{B}(X)$ la tribu des boréliens de X. Soit $f : X \to X$ un homéomorphisme, alors il existe une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B}(X))$invariante par f.*

Preuve. Par compacité pour la topologie faible de l'espace $\mathcal{M}(X)$ des mesures boréliennes de probabilité sur X on a :

Pour toute suite $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$ et toute suite d'entiers $m_n \to +\infty$, il existe une suite $n_j \to +\infty$ telle que la suite de mesures $\dfrac{1}{m_{n_j}} \displaystyle\sum_{i=0}^{m_{n_j}} f_*^i \mu_{n_j}$ converge, quand $j \to +\infty$ vers une mesure invariante par f.

En particulier, si x_n est une suite de points dans X, on peut trouver une suite $n_j \to +\infty$ tels que la suite de mesure $\dfrac{1}{m_{n_j}} \displaystyle\sum_{i=0}^{m_{n_j}} f_*^i \delta_{x_{n_j}}$ converge, quand $j \to +\infty$ vers une mesure invariante par f.

Théorème de Markov-Kakutani. *Soit X un espace métrique compact, on note $\mathcal{B}(X)$ la tribu des boréliens de X. Soit $f, g : X \to X$ deux homéomorphismes commutant, alors il existe une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{B}(X))$ qui est invariante par f et par g.*

Si on applique le fait ci-dessus en choisissant comme suite de mesures $\mu_{(p,q)} = \delta_{f^p \circ g^q(x_0)} = \delta_{g^q \circ f^p(x_0)}$ on obtient comme limite une mesure qui est à la fois invariante par f et g.

Comme corollaire, on obtient que tout groupe abélien de type fini préserve une mesure.

Exercice. Montrer que si G possède une orbite finie alors G préserve une mesure.

Un exemple de groupes sans mesure invariante.

Exercice. Soit f est un difféomorphisme du cercle avec une dynamique nord-sud. Montrer que si μ_f est une mesure invariante par f alors le support de μ_f est $\{N, S\}$ les deux points fixes hyperboliques de f. En déduire un groupe engendré par deux éléments f et g ne possède pas de mesure invariante.

7.4 Le théorème ergodique de Birkhoff. *(Has.Kat p136)*

Soit (X, μ) un espace de probabilité et $T : X \to X$ une transformation qui préserve μ alors pour toute fonction $\phi \in L^1(X, \mu)$ on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi(T^k(x)) \to \int_X \phi d\mu$$

pour μ presque tout point $x \in X$.

8 Cas du cercle. Nombre de rotation et mesure invariante.

Nous reprenons les hypothèses, conventions et notations du chapitre II.

8.1 Nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle.

Proposition-définition du nombre de rotation.

Soit $g \in Homéo^+(S^1)$ et $\tilde{g}$ un relevé de g à $\mathbb{R}$. Alors la suite $\frac{1}{n}(\tilde{g}^n(x) - x)$ converge uniformément vers une constante $\rho(\tilde{g})$.

De plus, $\pi(\rho(\tilde{g})) \in S^1$ ne dépend pas du choix de relevé $\tilde{g}$ de g et est appelé le *nombre de rotation de* g.

Théorème *Soit $g \in Homéo^+(S^1)$ et $\tilde{g}$ un relevé de g à $\mathbb{R}$. La fonction $\tilde{\phi} := \tilde{g} - Id_{\mathbb{R}}$ étant $\mathbb{Z}$-périodique s'écrit $\tilde{\phi} = \phi \circ \pi$, où $\phi : S^1 \to \mathbb{R}$ est unique à composition au but par une translation entière près.*

Si μ est une mesure de probabilité invariante par g, alors on a :

$$\rho(\tilde{g}) = \int_{S^1} \phi d\mu.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}$, on écrit :

$$\tilde{g}^n(x) - x = \tilde{g}^n(x) - \tilde{g}^{n-1}(x) + ... + \tilde{g}(x) - x = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{g}^{i+1}(x) - \tilde{g}^i(x) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\phi}(\tilde{g}^i(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(\pi(\tilde{g}^i(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(g^i(\pi(x))).$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{n}(\tilde{g}^n(x) - x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \phi(g^i(\pi(x))).$$

Par définition du nombre de rotation le terme de gauche tend vers $\rho(\tilde{g})$ pour tout x et le terme de droite tend vers $\int_{S^1} \phi d\mu$ pour μ-pp $\pi(x)$ (donc pour au moins une valeur de x) d'après le théorème ergodique de Birkhoff. ◄

8.2 L'application nombre de rotation.

Théorème. *Soit G un sous-groupe de Homéo$^+(S^1)$ et μ une probabilité G-invariante,*

alors l'application nombre de rotation $\rho : \begin{cases} G & \to S^1 \\ g & \mapsto \rho(g) \end{cases}$ *est un morphisme.*

Preuve. Nous allons utiliser le théorème précédent.

Soient f [resp. g] un homéomorphisme du cercle, $\tilde{f}$ [resp.$\tilde{g}$] un relevé de f [resp. g] et ϕ_f [resp. ϕ_g] : $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ choisie pour que $\tilde{f} - Id_{\mathbb{R}} = \phi_f \circ \pi$ [resp. $\tilde{g} - Id_{\mathbb{R}} = \phi_g \circ \pi$].

Fait. *On peut choisir $\phi_{g\circ f} = \phi_g \circ f + \phi_f$.*

–En effet, $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ est un relevé de $g \circ f$ et

$$(\tilde{g} \circ \tilde{f} - Id_{\mathbb{R}})(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x)) - x = \tilde{g}(\tilde{f}(x)) - \tilde{f}(x) \ + \ \tilde{f}(x) - x$$

$$= (\phi_g \circ \pi \circ \tilde{f})(x) + (\phi_f \circ \pi)(x) = (\phi_g \circ f \circ \pi)(x) + (\phi_f \circ \pi)(x) = ((\phi_g \circ f + \phi_f) \circ \pi)(x).$$

Finalement, l'application $\phi_g \circ f + \phi_f$ convient.–

Conclusion. D'après le théorème précédent, on a $\rho(g \tilde{\circ} f) =$
$\int_{S^1} \phi_{g\circ f}\ d\mu = \int_{S^1} \phi_g \circ f + \phi_f\ d\mu = \int_{S^1} \phi_g \circ f\ d\mu\ +\ \int_{S^1} \phi_f\ d\mu = \rho(\tilde{g}) + \rho(\tilde{f})$,
après changement de variable $y = f(x)$ dans la première intégrale.

Exercice. Montrer que le groupe de Thompson T ne préserve pas de mesure sur le cercle.

9 Théorème de Plante.

9.1 Enoncé et corollaires.

Théorème de Plante. *Si G est un sous-groupe de type fini de $Diff^2_+(S^1)$ qui préserve une mesure de probabilité sur S^1 alors G n'a pas de minimal exceptionnel.*

Corollaires au théorème de Plante.

(1) Si G est un sous-groupe de type fini de $Diff^2_+(S^1)$ qui préserve une mesure de probabilité μ sur S^1 alors ou bien G a une orbite finie ou bien G est abélien.

(2) Si G est un sous-groupe abélien de type fini de $Diff^2_+(S^1)$ agissant librement sur S^1 alors l'action de G est minimale.

Preuve du Corollaire.

(1)- En effet, si G n'a pas d'orbite finie, le théorème de Plante combiné avec le théorème d'alternative dynamique indiquent que G a pour unique minimal S^1. Ainsi le support de μ est égal à S^1 (d'après la propriété 3 des mesures invariantes). D'autre part la mesure μ est sans atome, car G n'a pas d'orbite finie (propriété 2 des mesures invariantes). Par conséquent :

Exercice. L'application définie par $h(x) = \pi(\mu([0, x[)$, lorsque μ est une mesure sans atome et de support total est un homéomorphisme de S^1 qui conjugue G à un sous-groupe d'homéomorphismes de S^1 qui préservent la mesure de Haar.

Puisqu'un homéomorphisme de S^1 qui préserve la mesure de Haar est une rotation, le groupe G est conjugué (donc isomorphe) à un groupe de rotations, ainsi G est abélien.

(2)- Exercice.

9.2 Preuve du théorème de Plante.

Par l'absurde, d'après le théorème de Sacksteder, il existe $x_0 \in K_0$ un point hyperbolique de G associé à $\gamma_0 \in G$.

Fait 1. Il existe un intervalle $]a, b[$ qui contient x_0 tel que $\mu(]a, b[) = \mu\{x_0\}$.

– En effet, Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé contenant x_0 et sur lequel $D\gamma_0 < 1$. On a $\mu(]\gamma_0^n(a), \gamma_0^n(b)[) = \mu(]a, b[)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et l'intersection décroissante $\bigcap_{n\geq 0}]\gamma_0^n(a), \gamma_0^n(b)[= \{x_0\}$ donc $\mu(\{x_0\}) = \mu(\bigcap_{n\geq 0}]\gamma_0^n(a), \gamma_0^n(b)[) = \lim_n \mu(]\gamma_0^n(a), \gamma_0^n(b[) = \mu(]a, b[)$.–

Fait 2. L'ensemble $\bigcup_{g\in G} g(]a, b[) = S^1$.

–Car le complémentaire de cet ensemble est un fermé G-invariant qui ne contient pas x_0, il est vide, car sinon il contiendrait un minimal qui ne contient pas x_0 ce qui est impossible car l'unique minimal est K_0.–

Conclusion. Si $\mu\{x_0\} = 0$, alors $0 = \mu(\bigcup_{g\in G} g(]a, b[) = \mu(S^1)$ ce qui est impossible. Donc $\mu\{x_0\} > 0$ ce qui est impossible car l'orbite de x_0 est infinie (puisque dense dans K_0).

Nous terminons cette section par l'énoncé d'un théorème qui précise des sous-groupes de $Homéo^+(S^1)$ admettant des mesures invariantes : ce résultat peut se voir comme une "alternative de Tits dynamique ".

10 Théorème de Margulis.

Si G un sous groupe de $Homéo^+(S^1)$ ne contient pas de sous groupe libre de rang 2 alors G préserve une mesure sur S^1.

⋄⋄◊⋄⋄

Quatrième partie
Groupes d'homéomorphismes affines par morceaux.

⋄⋄◊⋄⋄

Dans ce chapitre, nous allons par quelques théorèmes illustrer l'idée que des arguments de nature dynamique permettent de démontrer des résultats de nature algébrique.

Références.

[BS1985] R. Bieri and R. Strebel : *On groups of PL homeomorphisms of the real line.* Preprint, Math. Sem. der Univ. Frankfurt, Frankfurt am Main (1985).

[BrSq1985] M. G. Brin, C. Squier : *Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line.* Invent. Math. **79** (3), 485–498 (1985).

[CFP1996] J. Cannon, W. Floyd, W. Parry : *Introductory notes on Richard Thompson's groups.* L'Ens. Math. **42**, 215-256 (1996).

[GhSe1987] É. Ghys, V. Sergiescu : *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle.* Comm. Math. Helv. **62**, 185-239 (1987).

[Li2006] I. Liousse : *Rotation numbers in Thompson-Stein groups and applications.* preprint ArXiv (2006)

[St1992] M. Stein : *Groups of piecewise linear homeomorphisms*, Trans. A.M.S. **332**, 477-514 (1992).

11 Homéomorphismes affines par morceaux de l'intervalle $I = [0, 1]$.

11.1 Définitions. Propriétés utiles.

Soit f un homéomorphisme de I (ou S^1). On note :

$Fixf$ l'ensemble des points fixes de f,

$supp_o(f)$ le support ouvert de f c'est à dire le complémentaire de $Fixf$,

$[g, f] := g \circ f \circ g^{-1} \circ f^{-1}$ le commutateur de f et g.

On vérifie (*exercice*) que :

(i)- $Fix(g \circ f \circ g^{-1}) = g(Fixf)$,

(i')- $supp_o(g \circ f \circ g^{-1}) = g(supp_o(f))$,

(ii)- si a est un point fixe de f et g alors $[g, f](a) = a$ et $D([g, f])(a) = 1$.

Lorsque $f \in PL^+(I)$, on a de plus

(iii)- $Fixf$ [resp. $supp_o(f)$] est réunion finie d'intervalles fermés peut-être dégénérés [resp. ouverts] f-invariants,

(iv)- $\overline{supp_o([g, f])} \subset supp_o(g) \cap supp_o(f)$.

11.2 Le théorème de Brin-Squier.

11.2.1 Enoncé. ([BrSq 1985])

Théorème. *$PL^+(I)$ ne contient pas de sous-groupe libre de rang 2.*

11.2.2 Preuve.

Supposons par l'absurde qu'il existe $G =< f, g >$ un sous-groupe libre de rang 2 contenu dans $PL^+(I)$. Posons $supp_o(G) = supp_o(f) \cup supp_o(g)$.
Pour tout $h \in G$ on a $supp_o(h) \subset supp_o(G)$.

Soit $H = \{h \in G \setminus \{Id\} : \overline{supp_o(h)} \subset supp_o(G)\}$.

L'ensemble H est non vide car il contient le sous-groupe $[G, G]$ engendré par les commutateurs. En effet, la propriété utile (ii) indique que si $h \in [G, G]$ alors $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 1$ donc puisque h est PL, $h = Id$ au voisinage de 0.

Choisissons $h \in H$ qui minimise le nombre de composantes connexes de $supp_o(G)$ rencontrées par $\overline{supp_o(h)}$ et considérons $]a, b[$ une composante connexe de $supp_o(G)$ qui rencontre $\overline{supp_o(h)}$ et $[c, d] \subset]a, b[$ contenant $\overline{supp_o(h)} \cap]a, b[$.

Dynamique : considérons le point c, on a $\overline{G(c)} \subset [a, b]$ et contient un minimal de l'action de G, mais on a vu (cf exercice) que les minimaux pour une action sur I sont les points fixes, donc $\overline{G(c)}$ contient un point fixe de G donc contient a ou b. Supposons que ce soit b. Alors, il existe $\delta \in G$ tel que $\delta(c) \in]d, b[$ donc par conservation de l'orientation on a $[\delta(c), \delta(d)] \subset]d, b[$ donc est disjoint de $[c, d]$.

Maintenant le commutateur $[h, \delta \circ h \circ \delta^{-1}]$ est non trivial (car est un mot non trivial dans G libre) et son support ouvert $supp_o([h, \delta \circ h \circ \delta^{-1}]) \subset supp_o(h) \cap supp_o(\delta \circ h \circ \delta^{-1})$, donc son intersection avec $]a, b[$ vérifie :
$supp_o([h, \delta \circ h \circ \delta^{-1}]) \cap]a, b[\subset (supp_o(h) \cap]a, b[) \cap \delta(supp_o(h) \cap]a, b[) \subset [c, d] \cap \delta([c, d]) = \emptyset$. Ce qui contredit notre hypothèse de minimalité sur h.

11.3 Le théorème de Plante-Thurston en PL.

11.3.1 Enoncé.

Théorème. *Tout sous-groupe nilpotent de $PL^+(I)$ est abélien.*

11.3.2 Preuve.

Nous rappelons la définition : un groupe N est *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que : $N_0 = N$, $N_1 = [N, N]$, $N_2 = [N, N_1]$, ... , $N_p = [N, N_{p-1}] \neq \{e\}$, $N_{p+1} = [N, N_p] = \{e\}$.

Soit N un sous-groupe nilpotent de $PL^+(I)$ non abélien, alors $N_p \subset Z(N)$ le centre de G. Soit $h \in N_p \setminus \{e\}$. On a $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 1$ car h est un produit de commutateurs puisque $N_p = [N, N_{p-1}]$ donc $h = Id$ sur un intervalle non dégénéré contenant 0. Notons $Fix_0 h = [0, a]$ l'intervalle maximal contenant 0 sur lequel $h = Id$, c'est la composante connexe de $Fixh$ qui contient 0. Pour tout $f \in F$ on a $Fix_0(f \circ h \circ f^{-1}) = f(Fix_0 h)$. Ainsi, puisque h commute à tous les f, on a : $f(Fix_0 h) = Fix_0 h$, par conséquent $f(a) = a$, pour tout $f \in N$ ainsi le point $a \neq 0$ est un point fixe de N. On a vu que h est un produit de commutateur, de même que en 0 on a $h(a) = a$ et $Dh(a) = 1$ donc $h = Id$ dans un intervalle non dégénéré qui contient a, ce qui contredit le fait que a soit l'extrémité de l'intervalle maximal $Fix_0 h$.

11.4 Le Lemme de Koppel PL.

Soient f et g deux éléments de $PL^+(S^1)$ tels que f et g commutent et ont des points fixes alors $\partial Fixf \subset g$ et vis-versa.

Preuve. L'ensemble $Fix(f)$ est g-invariant et possède un nombre fini de composantes connexes. Par conséquent, sa frontière $\partial Fix(f)$ est un ensemble fini g-invariant donc constitué de points g-périodiques. Par hypothèse g a des points fixes, donc (par le théorème classique de Poincaré) les points g-périodiques sont les points fixes de g. Par suite, $\partial Fixf$ est constitué de points fixes par g.

12 Sous-Groupes de type fini de PL $^+(S^1)$.
Groupes de Thompson, Bieri-Strebel, Stein.

Les groupes d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle de type fini sont connus pour avoir fourni d'intéressants exemples de groupes dénombrables. En 1965, R. Thompson exhiba le groupe T des homéomorphismes dyadiques du cercle comme premier exemple de groupe infini simple et de type fini. Depuis de nombreux travaux sur le groupe de Thompson T et son sous-groupe F constitué des éléments fixant 0 ont été effectués. Un article introductif et de survol sur les groupes de Thompson T et F est [CFP1996].

Dans [GhSe1987], Ghys et Sergiescu ont étudié la dynamique des actions différentiables de T sur le cercle. L'action standard contenant toutes les rotations d'angle dyadique a toutes ses orbites denses. Cependant, Ghys et Sergiescu ont montré qu'il existe une action lisse de T semi-conjuguée à l'action standard et qui possède un minimal exceptionnel sur S^1. En résulte, par le théorème de Denjoy et l'invariance par semi-conjugaison du nombre de rotation, que le nombre de rotation de tout homéomorphisme dyadique du cercle est rationnel.

Exercice. En utilisant presque tous les résultats enoncés jusqu'ici, montrer que toute action C^2 de F sur le cercle admet une orbite finie et que T contient un sous-groupe libre de rang 2.

12.1 Définitions. Exemples

Soit r un entier strictement positif, on définit le cercle de longueur r par $S_r = \frac{\mathbb{R}}{r\mathbb{Z}} = \frac{[0,r]}{0=r}$. Soit f un homéomorphisme de S_r. On identifie f à une bijection de $[0, r[$ en posant $f(x) = \tilde{f}(x)\ modr$.

On dit que f est *homéomorphisme affine par morceaux* s'il existe une subdivision finie $0 = a_0 < a_1 < .... < a_p < a_{p+1} = 1$ de $[0, r[$ telle que pour tout $i = 0, ..., p$, on a $f(x) = \lambda_i x + \beta_i$ pour $x \in [a_i, a_{i+1}]$.

- les a_i sont les *points de coupure* de f,
- les λ_i sont les *pentes* de f.

Soit Λ un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^{+*}$ et A un $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{R}$ invariant par Λ et contenant r. On définit $\mathbf{T_{r,\Lambda,A}}$ comme étant l'ensemble des homéomorphismes f de S_r tels que :

-(i) f est affine par morceaux et préserve l'orientation,
-(ii) les pentes de f appartiennent à Λ,
-(iii) les points de coupure de f appartiennent à A et
-(iv) les images par f des points de coupure de f appartiennent à A.

On définit $\mathbf{F_{r,\Lambda,A}} = \{f \in T_{r,\Lambda,A} : f(0) = 0\}$.

Exercices :

1- Montrer que sous les hypothèses (i), (ii), (iii), les trois hypothèses suivantes sont équivalentes : (iv), (v)- $f(A) = A$ et (vi)- $f(0) \in A$.

2- Vérifier que $\mathbf{T}_{r,\Lambda,A}$ est un groupe.

Exemples.

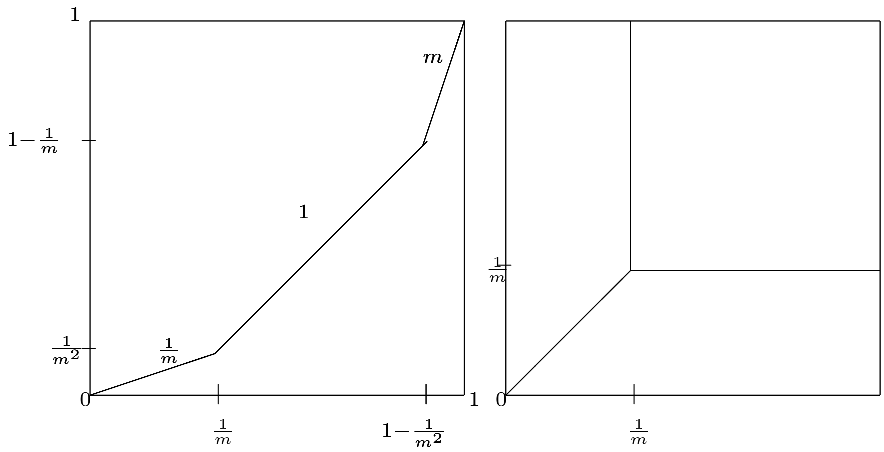
1- *Les homéomorphismes rationnels.* Ce sont les éléments des groupes $T_{r,\mathbb{Q},\mathbb{Q}}$.

2- *Les groupes de Thompson-Stein* $\mathbf{T}_{\mathbf{r},(\mathbf{n}_i)}$. Soient $(n_1, ..., n_p)$ un p-uplet d'entiers strictement positifs dont les logarithmes sont rationnellement indépendants et $m = ppcm(n_i)$.
On pose $\Lambda =< n_1, ..., n_p >$ le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^{+*}$ engendré par les n_i autrement dit $\Lambda = \{\prod_i n_i^{s_i}, s_i \in \mathbb{Z}\}$ et $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} .... \frac{1}{n_p}]$ l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{N}{(m)^s}$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{Z}$.
On note $T_{\mathbf{r},(\mathbf{n}_i)}$ le groupe de Bieri-Strebel correspondant à ces choix de Λ et A. Ces groupes sont de présentation finie d'après [St1992].

Exercice. Vérifier que $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} .... \frac{1}{n_p}]$ est $< n_i >$-invariant et que A est le plus petit $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{R}$ contenant 1 et $< n_i >$-invariant.

En particulier, si $\Lambda =< m >$ et $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$, le groupe correspondant est noté $T_{r,m}$. On retrouve le groupe de Thompson classique en posant $T = T_{1,2}$.

Quelques éléments du groupe $F_{1,m}$.



12.2 Isomorphismes entre groupes de Bieri-Strebel.

Soient Λ un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}^{+*}$ et A un $\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{R}$ invariant par Λ et contenant 1. Soient r et r' deux entiers positifs.

Fait.– *S'il existe $H : [0,r] \mapsto [0,r']$ un homéomorphisme affine par morceaux dont les pentes sont dans Λ et les points de coupure dans A, alors les groupes $T_{r,\Lambda,A}$ et $T_{r',\Lambda,A}$ sont isomorphes.*–

En effet, le conjugué $H \circ f \circ H^{-1}$ de $f \in T_{r,\Lambda,A}$ est dans $T_{r',\Lambda,A}$ et inversement en changeant r par r' et H par H^{-1}.

Exercice. Montrer que $T_{r,\Lambda,A}$ est isomorphe à $T_{kr,\Lambda,kA}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que les groupes $\mathbf{T}_{r,\Lambda,\mathbb{Q}}$, $r \in \mathbb{N}^*$ sont tous isomorphes à $\mathbf{T}_{1,\Lambda,\mathbb{Q}}$

Théorème d'isomorphismes de Bieri-Strebel.

(1)- Soit $m > 1$ un entier, si r et r' sont congrus modulo $m-1$ alors les groupes $T_{r,m}$ et $T_{r',m}$ sont isomorphes.
(2)- Soient $n_1, ..., n_p$ des entiers positifs et $d = pgcd(n_1 - 1, ..., n_d - 1)$, si r et r' sont congrus modulo d alors les groupes $T_{r,(n_i)}$ et $T_{r',(n_i)}$ sont isomorphes.

Conséquences. Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
Le groupe $T_{r,m}$ est isomorphe à l'un des $m-1$ groupes $T_{1,m}$ .... $T_{m-1,m}$.
Le groupe $T_{r,(n_i)}$ est isomorphe à l'un des d groupes $T_{1,(n_i)}$ .... $T_{d,(n_i)}$.

Question. Peut-il y avoir d'autres isomorphismes entre ces groupes ?

Preuve du théorème d'isomophisme.

Proposition 1. *Soient a, a', c et c' dans A. Il existe un homéomorphisme affine par morceaux $H : [a,c] \to [a',c']$ avec pentes dans Λ et points de coupure dans A si et seulement si $(c-a)-(c'-a') \in (1-\Lambda)A$, où $(1-\Lambda)A$ est le sous-module de A engendré par les éléments de la forme $(1-\lambda)a$, avec $\lambda \in \Lambda$, $a \in A$.*

Preuve.
(i). Supposons qu'une telle application f existe et montrons que :
$(c-a)-(c'-a') \in (1-\Lambda)A$.

Soient $a = b_0 < b_1 ... b_{n-1} < b_n = c$ les points de coupure de f, en particulier $b_i \in A$. On note λ_i la pente de f sur $[b_{i-1}, b_i]$. Alors on a :
$(c-a) = \sum_i (b_i - b_{i-1})$ et $(c'-a') = \sum_i \lambda_i(b_i - b_{i-1})$ donc
$(c-a)-(c'-a') = \sum_i (1-\lambda_i)(b_i - b_{i-1}) \in (1-\Lambda)A$.

(ii). Réciproquement, supposons qu'existe $a_i \in A$, $\lambda_i \in \Lambda$ pour $i = 1, ..., n$ tels que : $(c'-a') = (c-a) + \sum_i (1-\lambda_i)a_i$.
Posons $b' = c'-a'$ et $b = c-a$. Si on peut construire g convenable qui envoie $[0,b]$ sur $[0,b']$ alors en composant à la source par la rotation d'angle $-a \in A$ et au but par celle d'angle $a \in A$, on aura $f : [a,c] \to [a',c']$ convenable.

$$b' = b + \sum_i (1-\lambda_i)a_i = b + \sum_i (1-\lambda_{\pi(i)})a_{\pi(i)}.$$

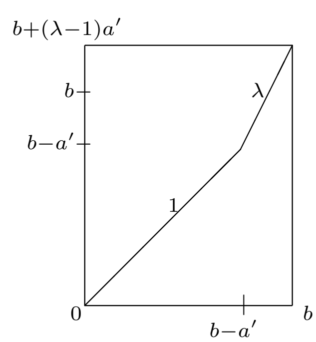
où π est une permutation de $\{1, ..., n\}$ telle que

$$b_j = b + \sum_{i \leq j} (1-\lambda_{\pi(j)})a_{\pi(j)} > 0.$$

La permutation π s'obtient en ordonnant les $(1-\lambda_i)a_i$ dans l'ordre décroissant. Maintenant, si on sait construire $f_j : [0, b_{j-1}] \to [0, b_j]$ convenable alors la composée $f_n \circ .... \circ f_1$ est l'application cherchée.

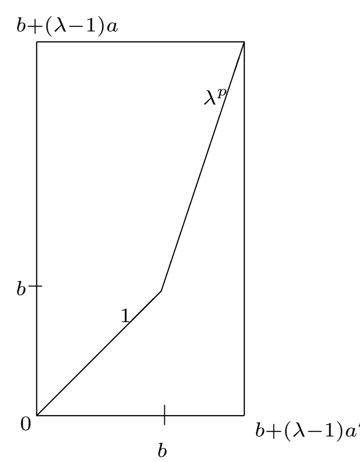
Puisque $(1-\lambda)a = (\lambda^{-1}-1)\lambda a = (\lambda-1)(-a)$, il suffit de trouver une application convenable $f : [0,b] \to [0, b+(\lambda-1)a]$ pour tous $a, b \in A$ et $\lambda \geq 1$.

CAS 1 : $a = a' < b$**.**



L'application $f_{0,a'}$

CAS 2 : $a' < b \leq a = \lambda^p a'$ **avec** $p \in \mathbb{N}$**.**



L'application $f_{a',a}$

Dans le cas 1, il suffit de considérer $f_{0,a} : [0,b] \to [0, b + (\lambda - 1)a]$.
Dans le cas 2, il suffit de composer :

$$f_{a,a'} \circ f_{0,a'} : [0,b] \to [0, b + (\lambda - 1)a'] \to [0, b + (\lambda - 1)a].$$

Proposition 2. *Si* $\Lambda =< n_i >$ *et* $A = \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ *avec* n_i *entiers,* $m = ppcm(n_i)$ *et* $d = pgcd(n_i - 1)$*, alors*

$$(1 - \Lambda)A = \Lambda(d\mathbb{Z}) \quad et \quad (1 - \Lambda)A \cap \mathbb{Z} = d\mathbb{Z}.$$

En effet, soit $x \in (1 - \Lambda)A$ alors il existe $\lambda_i \in \Lambda$ et $a_i \in A$ tels que

$$x = \sum_i (1 - \lambda_i)a_i.$$

Réduisons les rationnels $(1-\lambda_i)a_i$ au même dénominateur $\lambda \in \Lambda^+ = \{\prod n_i^{s_i}, s_i \geq 0\ \}$, on obtient

$$(1 - \lambda_i)a_i = \frac{N_i}{\lambda}(n_1^{s_1}....n_p^{s_p} - n_1^{r_1}....n_p^{r_p}),$$

avec $N_i \in \mathbb{Z}$ et s_j, r_j dans $\mathbb{N}$.

Maintenant, écrivons $n_i = k_i d + 1$, avec $k_i \in \mathbb{N}$, on a

$$n_1^{s_1}....n_p^{s_p} - n_1^{r_1}....n_p^{r_p} = (k_1 d + 1)^{s_1}...(k_p d + 1)^{s_p} - (k_1 d + 1)^{r_1}...(k_p d + 1)^{r_p} = dM_i.$$

Finalement,

$$x = \frac{1}{\lambda}\sum_i N_i d M_i = \frac{1}{\lambda} dN \in \Lambda(d\mathbb{Z}).$$

Réciproquement, par Bezout, il existe des entiers α_i tels que :
$d = \sum \alpha_i(n_i - 1) = \sum(1 - n_i)(-\alpha_i) \in (1 - \Lambda)A$.

De plus, si un entier $M \in (1 - \Lambda)A = \Lambda(d\mathbb{Z})$ alors $M = \lambda dN = \frac{dN'}{n_1^{s_1}...n_p^{s_p}}$ avec $N' \in \mathbb{Z}$ non divisible par les n_i et $s_i \in \mathbb{N}$. Or d est premier avec chacun des n_i (par Bezout car $n_i - k_i d = 1$), l'écriture ci-dessus est donc réduite ; elle représente un entier si et seulement si chaque s_i est nul, c'est à dire si et seulement si $M = dN'$.

Exercice.

1)- Montrer que $F_{1,m}$ agit transitivement sur les m-adiques de $]0, 1[$.

2)- Soit $g_0 \in T_{1,m} \setminus F_{1,m}$ fixé, montrer que tout $g \in T_{1,m}$ s'écrit $g = g_0 \circ f$, avec $f \in F_{1,m}$.

12.3 Etude des nombres de rotation. *[Li2006]*

Définition. On définit l'application "nombre de rotation sur S_r" par :
$\rho :$ Homeo$^+(S_r) \to \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ donné par $\rho(f) = \lim_{n\to\infty} (\tilde{f}^n(0)/rn)$ $(mod 1)$.

Théoreme. Nombre de rotation dans $T_{r,m}$. *Soient $m \geq 2$, $r \geq 1$ et $q \geq 1$ des entiers. Alors :*

A. Tout élément de $T_{r,m}$ a un nombre de rotation rationel, donc a des points périodiques.

B. Les propriétés siuvantes sont équivalentes :
(1) Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_{r,m}$ contient un élément de nombre de rotation réduit $\frac{p}{q}$.
(1') Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le groupe $T_{r,m}$ contient un élément de nombre de rotation réduit $\frac{p}{q}$.
(2) pgcd $(m-1, q)$ divise r.
(3) Le groupe $T_{r,m}$ contient un élément d'ordre q.
(3') Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le groupe $T_{r,m}$ contient un élément d'ordre q de nombre de rotation $\frac{p}{q}$.

Conséquences de Théoreme. Soient deux entiers $m \geq 2$ et $r \geq 1$.

0. En posant $r = 1$, $m = 2$, on retrouve le résultat de Ghys-Sergiescu sur la rationnalité des nombres de rotation des éléments de T.

1. $\rho(T_{r,m}) \subset \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ et tout nombre dans $\rho(T_{r,m})$ est réalisé comme le nombre de rotation d'un élément d'ordre fini de $T_{r,m}$.

2. Tout rationnel est réalisé comme le nombre de rotation d'un élément d'ordre fini de $T_{m-1,m}$; en particulier, $\rho(T_{m-1,m}) = \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$.

3. Le groupe $T_{m-1,m}$ est l'unique groupe parmi les $T_{r,m}$ pour $0 < r < m-1$ contenant un élément d'ordre $m-1$. En particulier, $\rho(T_{r,m}) \neq \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ pour $0 < r < m-1$ $(mod\ m-1)$.

4. Si m, r sont impairs, le groupe $T_{r,m}$ ne contient pas d'élément d'ordre 2 et de n'importe quel ordre pair.

5. L'image $\rho(T_{1,m}) = \{\frac{p}{q} \ : (q, m-1) = 1\}$. Si $m-1$ est premier alors $\rho(T_{1,m}) = \rho(T_{r,m})$, pour tout $0 < r < m-1$ $(mod\ m-1)$.

Conséquences sur la question d'isomorphisme.

6. Le groupe $T_{m-1,m}$ n'est isomorphe à aucun des groupes $T_{r,m}$ avec $0 \leq r < m-1$.

7. Si m is pair, r pair and r' impairs, les groupes $T_{r,m}$ et $T_{r',m}$ ne sont pas isomorphes.

Preuve du théorème.

A. Le nombre de rotation de tout $f \in \mathbf{T}_{r,m}$ est rationnel.

Soit $f \in \mathbf{T}_{r,m}$ un homéomorphisme de $S_r = \frac{[0,r]}{0=r}$ que nous identifions à la bijection $\tilde{f}$ (mod r) de $[0, r[$.

Pour tout $x \in [0, r[$, on a $f(x) = m^{e(x)}x + \dfrac{p(x)}{m^{k(x)}}$, avec $e(x) \in \mathbb{Z}$, $p(x) \in \mathbb{Z}$ et $k(x) \in \mathbb{N}$ qui sont des fonctions bornées par des constantes qui ne dépendent pas des itérées de f.

L'orbite de 0 est constituée de nombres m-adiques, nous écrivons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f^n(0) = \frac{M_n}{m^{N_n}},$$

avec $N_n \in \mathbb{N}$ et $(*)$ $\quad M_n \in \mathbb{N}$ n'est pas divisible par m ou est nul. Notons que si m n'est pas premier cette fraction peut ne pas être réduite, mais la condition $(*)$ garantit l'unicité d'une telle écriture.

S'il existe un entier n non nul pour lequel M_n est nul alors $f^n(0) = 0$, l'orbite de 0 est périodique et le nombre de rotation de f rationnel. Nous supposons dans la suite que pour tout n entier non nul M_n n'est pas divisible par m.

Fait 1 : $N_n \to +\infty$ *ou bien l'orbite de* 0 *est périodique.*

La suite N_n ne tend pas vers $+\infty$ signifie qu'il existe une sous-suite N_{s_n} bornée par un certain B. Dans ce cas, la suite $f^{s_n}(0)$ de points de l'orbite de 0 est contenue dans l'ensemble fini : $\{\dfrac{p}{m^k} \quad : \quad 0 \leq p \leq r.m^B \text{ et } 0 \leq k \leq B\}$, ce qui n'est possible que lorsque l'orbite de 0 est périodique.

Fait 2 : *si* $N_n \to +\infty$ *alors* $Df^n(0) \to 0$.

En effet, supposons $N_n \to +\infty$ et calculons $f^{n+1}(0)$:

$f^{n+1}(0) = f(f^n(0)) = m^{e(f^n(0))}\frac{M_n}{m^{N_n}} + \frac{p(f^n(0))}{m^{k(f^n(0))}} = \frac{M_n}{m^{N_n - e(f^n(0))}} + \frac{p(f^n(0))}{m^{k(f^n(0))}}$.

Puisque la suite N_n tend vers $+\infty$ et que e et k sont bornées, il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on ait $N_n - e(f^n(0)) > k(f^n(0))$. Il en résulte que :

$$f^{n+1}(0) = \frac{M_n + m^{N_n - e(f^n(0)) - k(f^n(0))}p(f^n(0))}{m^{N_n - e(f^n(0))}} = \frac{M_{n+1}}{m^{N_{n+1}}}.$$

Puisque m divise $m^{N_n - e(f^n(0)) - k(f^n(0))}$ mais ne divise pas M_n, m ne divise pas $M_n + m^{N_n - e(f^n(0)) - k(f^n(0))}p(f^n(0))$. Par unicité de l'écriture de $f^{n+1}(0)$ sous la forme $\frac{M_{n+1}}{m^{N_{n+1}}}$, on a $N_{n+1} = N_n - e(f^n(0))$, pour tout $n \geq n_0$.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $N_{n_0+p} = N_{n_0} - \left(e(f^{n_0}(0)) + ... + e(f^{n_0+p-1}(0))\right)$.

Par conséquent, $e(f^{n_0}(0)) + ... + e(f^{n_0+p-1}(0)) \to -\infty$ lorsque $p \to +\infty$. Finalement, $e(0) + e(f(0)) + ... + e(f^n(0)) \to -\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Or $Df^n(0) = m^{e(0) + e(f(0)) + ... + e(f^n(0))}$ donc $Df^n(0) \longrightarrow 0$.

Conclusion. Si le nombre de rotation de f est irrationnel :

- La f-orbite de 0 n'est pas périodique, impliquant par le fait 1 que $N_n \to +\infty$ et par suite par le fait 2 que $Df^n(0) \to 0$.

- Les inégalités de Denjoy s'appliquent à f et on a $Df^{q_n}(0) \geq e^{-VarlogDf}$ ne peut donc tendre vers 0.

Par cette contradiction, le nombre de rotation de $f \in T_{r,m}$ est rationnel. ◀

B. Implications faciles.

(3) $\Rightarrow$ (1) est claire, puisque un homéomrphisme f d'ordre q a un nombre de rotation de la forme $\frac{p}{q}$ avec $(p,q) = 1$.

(1) $\Leftrightarrow$ (1$'$) et (3) $\Leftrightarrow$ (3$'$) sont obtenus en choisissant des puissances convenables de f (*exercice*).

Preuve des implications (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)**.**

(1) $\Rightarrow$ (2). Par hypothèses, il existe $f \in T_{r,m}$ avec $\rho(f) = \frac{p}{q}$. D'après Poincaré, f a un point periodique a de période q. Quitte à remplacer f par une puissance convenable, on peut supposer que $\rho(f) = \frac{1}{q}$.

Fixons $\tilde{f}$ un relévé de f à $\mathbb{R}$ et identifions f à $\tilde{f}(mod\ r)$. Remplaçons a par le point de son orbite le plus proche de 0, l'orbite de a est ordonné :

$$0 \leq a = a_0 < f(a) = a_1 < .... < f^{q-1}(a) = a_{q-1} < r$$

Les intervalles $[0,a]$ et $[f(0), f(a)]$ sont $PL_{\Lambda,A}$-équivalents, donc d'après Bieri-Strebel, $a = f(a) - f(0)\ mod(1-\Lambda)A$ et donc $f(a) - a = f(0)\ mod(1-\Lambda)A$. De plus, (via $\tilde{f}$) les intervalles $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ... et $[a_{q-1}, a_0 + r]$ sont $PL_{\Lambda,A}$-équivalents donc leurs longueurs l_i sont égales $mod(1-\Lambda)A$ à la longueur de l'intervalle $[a_0, a_1]$ qui est $f(a) - a$.

Finalement, les longueurs l_1 , l_2 , ... , l_q
des intervalles $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ... , $[a_{q-1}, a_0 + r]$
sont toutes égales à $a_1 - a_0 = f(a) - a = f(0)\ \ mod\ (1-\Lambda)A$.

En sommant ces égalités, on obtient :
$r = l_1 + l_2 + ... + l_q = qf(0)\ mod\ (1-\Lambda)A$.
Or $(1-\Lambda)A = dA = (m-1)\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ donc $r - qf(0) \in (m-1)\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$. Par conséquent, il existe des entiers u, v, s tels que $r - qf(0) = (m-1)\frac{v}{m^s}$ et $f(0) = \frac{u}{m^s}$, donc tels que $m^s r - qu = (m-1)v$, autrement dit $m^s r = qu + (m-1)v$. Ceci implique que $m^s r$ est un multiple du $pgcd(q, m-1)$. Mais comme $(m-1)$ et m^s sont premiers entre eux, on conlut que r est un multiple de $pgcd(q, m-1)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Fixons r, m deux entiers positifs et supposons que r soit un multiple de $pgcd(q, m-1)$. D'après Bezout, $r = uq + v(m-1)$, donc $r = uq$ modulo $(m-1)$. Le critère de Bieri-Strebel implique que les groupes $T_{uq,m}$ et $T_{r,m}$ sont isomorphes. De plus, le groupe $T_{uq,m}$ contient la rotation $x \mapsto x + u$ d'ordre q, ce qui achève la preuve.

⋄◇◊◇⋄